

Risoluzione angolare: Criterio di Rayleigh

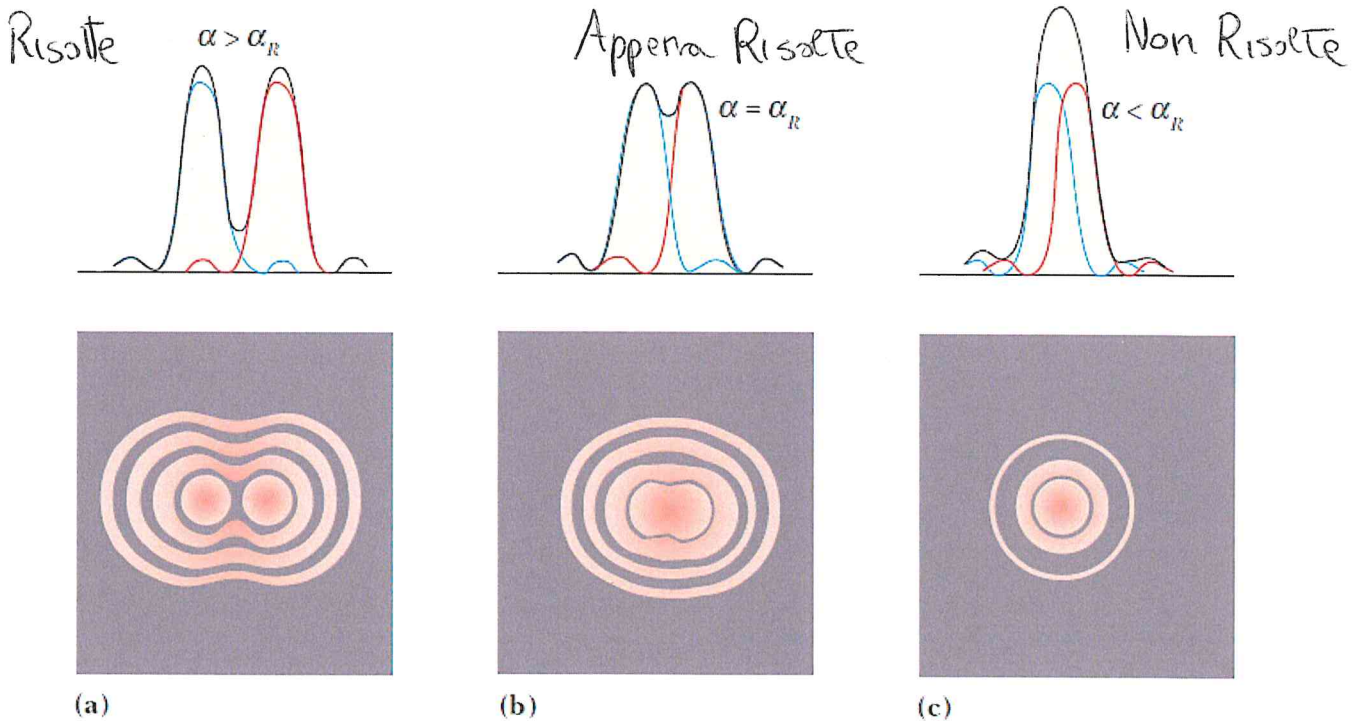
La capacità di sistemi ottici di distinguere tra oggetti vicini fra loro è limitata dalla natura ondulatoria della luce.

Si consideri ora la diffrazione prodotta da un foro circolare, come una lente convergente, attraverso cui passa la luce. La figura mostra l'immagine che forma un laser puntato su un'apertura circolare di piccolissimo diametro.

Quest'immagine non è un punto, come risulterebbe da un'analisi condotta secondo le approssimazioni dell'ottica geometrica, ma un disco circolare circondato da anelli secondari di intensità via via minore. Si tratta, anche in questo caso, di un fenomeno di diffrazione.



Il fatto che le immagini delle lenti siano figure di diffrazione è importante quando si voglia risolvere, ossia distinguere, due oggetti puntiformi lontani la cui distanza angolare è piccola. Se le due sorgenti sono separate in modo tale che i loro massimi centrali non si sovrappongano, le loro immagini possono essere distinte e si dice che le due sorgenti sono risolte. Però, se le sorgenti sono vicine l'una all'altra, i due massimi centrali possono sovrapporsi e le sorgenti non sono risolte.



Per decidere quando due immagini sono risolte, si usa spesso il seguente criterio:

Si dice che le immagini sono appena risolte quando il massimo centrale della figura di diffrazione di una sorgente cade sul primo minimo della figura di diffrazione dell'altra sorgente. Questa condizione limite per la risoluzione è nota come criterio di Rayleigh.

Criterio di Rayleigh

La Figura mostra le figure di diffrazione da aperture circolari per tre situazioni. Quando gli oggetti sono distanti tra loro, le loro immagini sono ben risolte (Fig. a). Le sorgenti sono appena risolte quando la loro separazione angolare soddisfa il criterio di Rayleigh (Fig. b). Infine, in Figura c le sorgenti sono non risolte.

Usando il criterio di Rayleigh, possiamo determinare la minima separazione angolare $\theta_{\min}$, sottesa dalle sorgenti rispetto alla fenditura (angolo visivo), tale che siano appena risolte. Un'analisi completa mostra che l'angolo limite di risoluzione per l'apertura circolare è:

$$\theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

dove D è il diametro dell'apertura. Questa equazione è correlata alla difficoltà che abbiamo ad esempio nel vedere due fari distanti come distinti. Quando osserviamo con l'occhio, D nell'Equazione è il diametro della pupilla (circa 2mm). La figura di diffrazione che si forma quando la luce passa attraverso la pupilla causa la difficoltà nel risolvere i fari. Sempre secondo la stessa formula risulta chiaro in un telescopio, per aumentarne il potere risolutivo, è necessario aumentare il diametro della lente

Potere separatore dell'occhio umano, acuità visiva

Il diametro della pupilla dell'occhio umano, ~~paragrafo 21.4.2~~, varia all'incirca tra i limiti $D = 8$ mm e $D = 2$ mm; con luce di lunghezza d'onda $\lambda = 0.55 \cdot 10^{-6}$ m si ha da ~~(20.15)~~

$$0.005^\circ \leq \theta_{\min} \\ 0.84 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \leq 3.36 \cdot 10^{-4} \text{ rad.}$$

$$0.02'$$

→ luce visibile

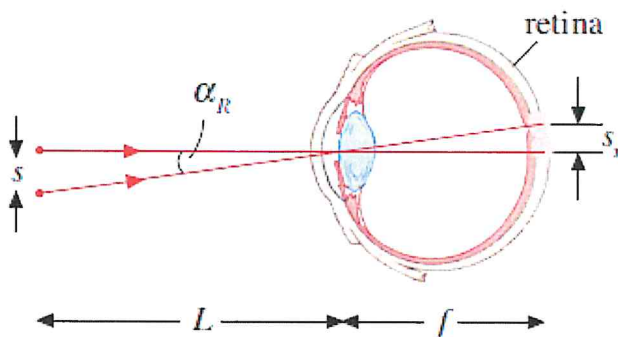
$$\theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Nel caso più sfavorevole, $D = 2$ mm, la minima distanza tra due punti ancora distinguibili dall'occhio, posti alla distanza $L = 25$ cm detta di visione distinta, è

$$s = L\alpha_R = 250 \cdot 3.36 \cdot 10^{-4} = 84 \mu\text{m.}$$

→ p.to prossimo

Con $D = 8$ mm si troverebbe $s = 21 \mu\text{m.}$



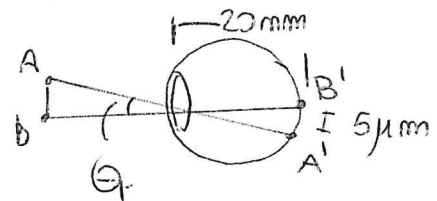
$$\frac{s}{L} = \tan \alpha_r \Rightarrow s \approx L \alpha_r$$

Sperimentalmente l'angolo minimo risolvibile dall'occhio umano è più vicino a $3 \cdot 10^{-4}$ rad (corrispondente a $\sim 100 \mu\text{m}$ a 25 cm), per cui non è la diffrazione che lo limita. Esso dipende

invece dalla struttura "granulosa" del sistema che regola la formazione dell'immagine. Il sistema di ricezione dei segnali luminosi è situato sulla retina. Gli elementi fotosensibili sono i coni e i bastoncelli, di dimensioni caratteristiche di qualche micrometro. I 120 milioni di bastoncelli a gruppi di cento sono collegati ad un singolo neurone, che viene attivato quando viene colpito uno qualunque dei bastoncelli ad esso collegati; i circa 6 milioni di coni sono collegati singolarmente ad un neurone. Il sistema di circa 7 milioni di neuroni, che nel suo complesso può essere visto come un sistema di 7 milioni di fibre ottiche che trasmette i dati al cervello, costituisce il nervo ottico. Due punti luminosi sono percepiti come distinti quando la luce proveniente da essi attiva due neuroni distinti. Non basta quindi che i dischetti di diffrazione siano appena risolvibili, occorre, nell'occhio, che i dischetti di diffrazione abbiano dimensioni paragonabili con la distanza minima che occorre per attivare neuroni distinti, ed anzi, come succede in pratica, che vengano attivati neuroni non adiacenti. È questo il parametro che limita il potere separatore angolare dell'occhio umano.

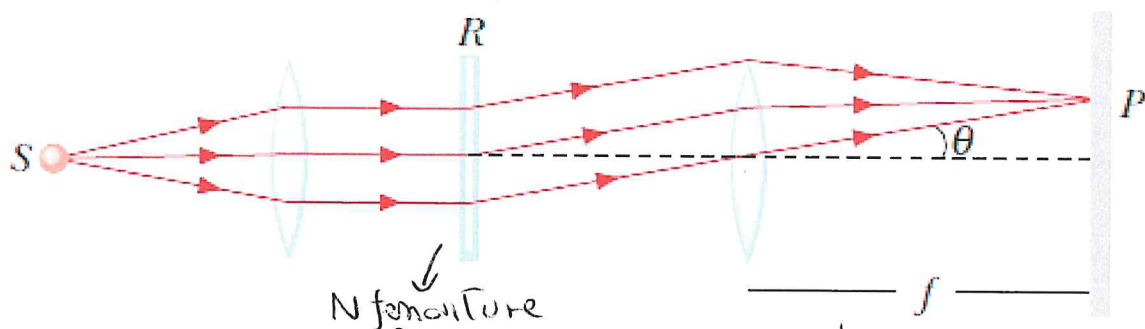
↓
distanza 2 fotorecettori

$$\sim 5 \mu\text{m} \Rightarrow \theta_r = \frac{5 \mu\text{m}}{20 \text{ mm}} \sim 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

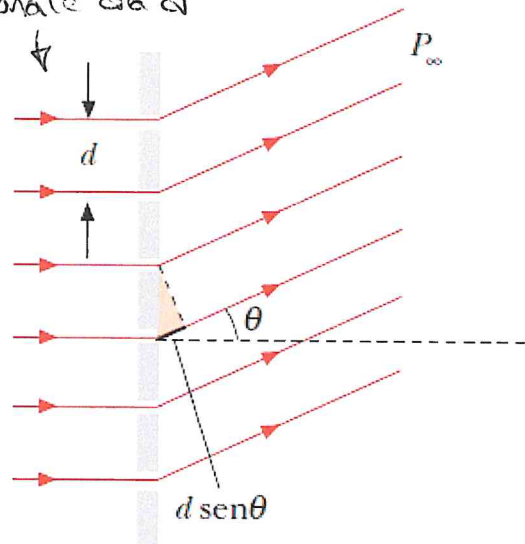


Reticolo di diffrazione:

Un reticolo di diffrazione è un sistema di N fenditure, ciascuna di larghezza α , equispaziate di una distanza d . Esso può essere realizzato tracciando delle incisioni parallele molto sottili su una lastra di vetro, in modo da produrre sottili strisce opache, utilizzando una punta di diamante il cui movimento è comandato da una macchina utensile molto precisa. Lo spazio che rimane tra una incisione e la successiva costituisce una fenditura. La distanza d tra due fenditure è detta passo del reticolo e la larghezza complessiva è $L = Nd$. Il reticolo è uno strumento molto potente per l'analisi della luce emessa da sostanze. Nella figura un'onda piana di lunghezza d'onda λ incide sul reticolo, con incidenza normale; dopo il reticolo si pone una lente convergente e si osserva la figura di interferenza nel piano focale della lente. Il sistema, nel suo complesso, prende il nome di spettroscopio a reticolo di diffrazione.



Fissato un punto P sullo schermo, individuato dall'angolo θ , l'intensità in P si calcola considerando l'interferenza dovuta a N sorgenti, in cui l'intensità $I_1(\theta)$ della singola fenditura è modulata dalla diffrazione. Con riferimento alla Figura a fianco, in cui per esemplificare $N = 6$, discutiamo dapprima l'aspetto interferenziale. Se ci poniamo in direzione perpendicolare al reticolo, $\theta = 0$, tutte le onde emesse dalle N fenditure sono in fase. Se $E_1(0)$ è l'ampiezza del campo elettrico di ciascuna sorgente l'ampiezza risultante è $E_p(0) = N E_1(0)$, l'intensità è quindi $I(0) = N^2 I_1(0)$ ed è massima. La stessa situazione si presenta per l'angolo θ tale che la differenza di fase δ , che deriva dalla differenza di percorso $d \sin \theta$ tra due sorgenti consecutive, è un multiplo intero di 2π :



Aspetto
interferenziale:

Massimi

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 2m\pi \quad \sin \theta_m = \frac{m\lambda}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

differenza di
fase dovuta al
percorso multiple
di 2π

fissato il rapporto tra lunghezza d'onda e passo del reticolo, le direzioni alle quali risulta massima l'intensità per effetto dell'interferenza. Per $m = 0$, $\theta = 0$ si ha il massimo centrale, detto massimo di ordine 0; per $m = \pm 1$ si hanno le posizioni dei due massimi adiacenti al massimo

centrale, detti massimi principali del primo ordine, per $m = \pm 2$ si hanno i massimi principali del secondo ordine e così via. L'ordine massimo per effetto dell'interferenza risulta fissato dalla condizione:

$$\sin \theta_m \leq 1, \quad m \leq d/\lambda.$$

Nell'intorno dei massimi principali l'intensità diminuisce. Se ci poniamo nell'intorno del massimo centrale, quando la differenza di fase, tra la prima e la N-esima sorgente soddisfa alla relazione:

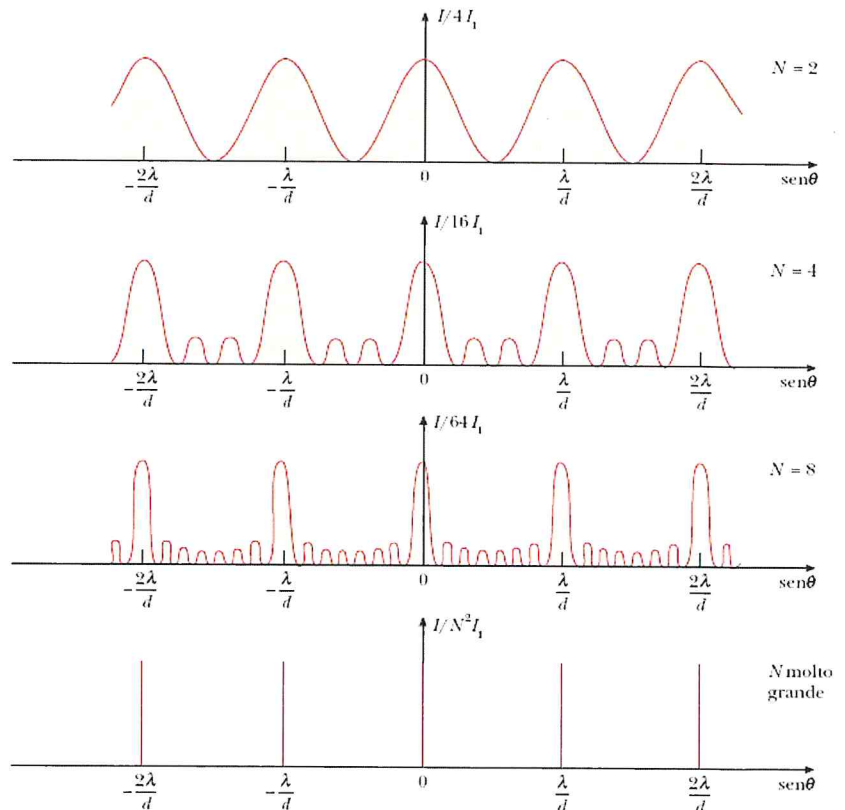
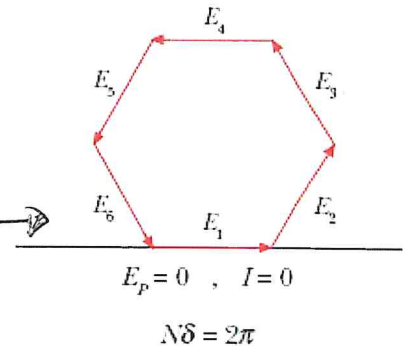
$$N\delta = N \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = \pm 2\pi, \quad \sin \theta = \pm \frac{\lambda}{Nd} = \pm \frac{\lambda}{L},$$

gli N fasori formano una poligonale chiusa, il campo elettrico risultante è nullo e l'intensità è conseguentemente nulla. La distanza angolare tra un massimo che si forma all'angolo per cui $\sin \theta_m = m \lambda / d$ e i minimi adiacenti è dunque:

$$\Delta(\sin \theta) = \pm \frac{\lambda}{Nd} = \pm \frac{\lambda}{L} \quad \text{Larghezza Angolare} \Rightarrow 2\Delta \sin \theta \approx 2 \frac{\lambda}{Nd}$$

Massimi

I risultati di questa trattazione semplificata sono mostrati in Figura, per alcuni valori di N. Sono riportati anche gli N-2 massimi secondari che si formano tra i massimi principali, di bassa intensità e quindi irrilevanti agli effetti pratici. Si vede molto bene che al crescere di N la larghezza angolare dei primi massimi principali, che come diremo tra breve sono quelli effettivamente visibili, pari a $\Delta \theta_m \approx 2\lambda / Nd$ in quanto $\cos \theta_m \approx 1$, diventa molto piccola rispetto alla distanza tra due massimi principali consecutivi $\Delta(\sin \theta_m) = \lambda / d$, che non dipende da N: $\Delta \theta_m / \Delta(\sin \theta_m) = 2/N$. Nei comuni reticoli di diffrazione N è in effetti molto grande, i massimi principali sono molto stretti e pertanto sono ben definite le direzioni θ_m per cui avviene il massimo della trasmissione da parte del reticolo.



L'effetto della diffrazione è quello di far diminuire l'intensità I_1 di ciascuna fenditura all'aumentare di θ_m secondo

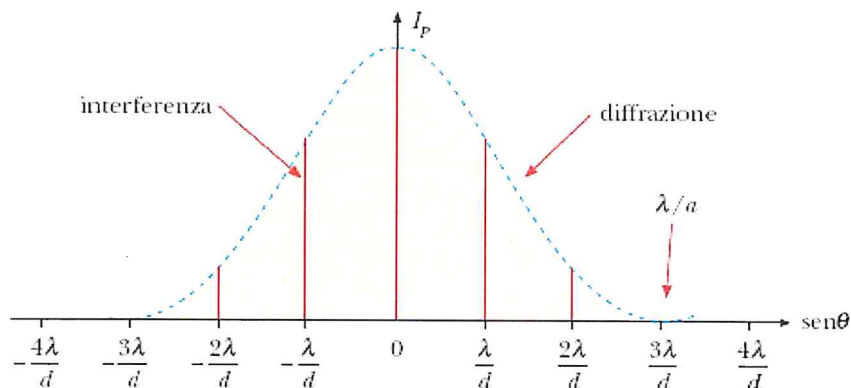
$$I(\theta) = I_{\max} \left[\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right]^2 = I_{\max} \left[\frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 \quad \leftarrow \text{Modulazione Intensità dovuta alla diffrazione}$$

per cui l'intensità ~~interferenza~~ del massimo principale di ordine m sarà ora $I(m) = N^2 I_1(\theta_m)$: ovvero l'intensità della figura di interferenza è modulata dalla diffrazione alle singole fenditure. Per fissare l'entità dell'effetto basta osservare che, per il valore di θ_m per cui

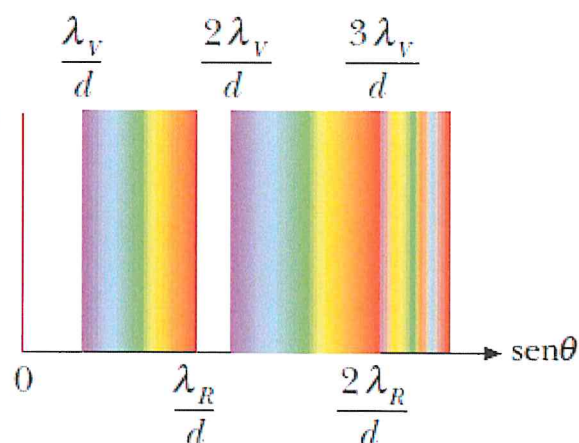
$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d} \quad \text{e} \quad \sin \theta_m = \frac{\lambda}{a}, \quad (\text{minimi diffrazione } \sin \theta = m \frac{\lambda}{a})$$

Si ha un massimo principale di interferenza, ma anche un minimo nullo di diffrazione, per cui l'intensità in quel punto risulta nulla. La relazione $m' = d/a$ dà l'ordine del primo massimo principale mancante a causa della diffrazione.

In Figura è rappresentato il caso in cui $d/a \approx 3$, per cui manca il massimo principale di ordine 3; quelli degli ordini successivi, sempre per effetto della diffrazione, non sono praticamente visibili.



Se la sorgente che illumina il reticolo non emette luce monocromatica, le differenti lunghezze d'onda che compongono la luce incidente producono massimi principali ad angoli diversi, in quanto la posizione dei massimi dipende dalla lunghezza d'onda; solo il massimo di ordine zero si forma a $\theta = 0$ per tutte le lunghezze d'onda. Questa dipendenza dell'angolo di formazione dei massimi dalla lunghezza d'onda si chiama dispersione angolare. Fissato un valore dell'ordine m , l'insieme dei massimi che si formano per le diverse lunghezze d'onda prende il nome di spettro di ordine m , per cui si ha uno spettro del primo ordine ($m = 1$), uno del secondo ordine ($m = 2$) e così via. Quando l'illuminazione è in luce bianca, nella quale si trovano con continuità tutte le lunghezze d'onda



comprese tra il viola $\lambda_V = 0.4 \mu\text{m}$ e il rosso $\lambda_R = 0.7 \mu\text{m}$, lo spettro del prim'ordine è l'unico cosiddetto puro, dato che ad un certo angolo corrisponde un solo colore (questo perché $\lambda_R < 2\lambda_V$). Invece negli spettri di ordine superiore si ha sovrapposizione tra spettri di ordine diverso.

-Potere
Risolutivo
Reticolo

Da quanto detto risulta evidente la capacità del reticolo di diffrazione di analizzare la composizione della luce che lo colpisce, proprietà sfruttata per studiare le caratteristiche della sorgente luminosa. Discutiamo in particolare la possibilità offerta dal reticolo di distinguere due onde luminose con lunghezze d'onda molto vicine, introducendo il concetto di potere risolutivo del reticolo. Per raggiungere lo scopo i massimi principali relativi a queste lunghezze d'onda devono avere larghezza angolare più piccola possibile. Il potere risolutivo si definisce seguendo il criterio di Rayleigh.

Consideriamo due lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 , con $\lambda_2 > \lambda_1$, e un reticolo di passo d con N fenditure; i massimi principali di ordine m e i minimi ad essi adiacenti si formano agli angoli

$$\begin{aligned} \text{MAX} & \quad \text{MIN} \\ \sin \theta_{m,1} &= m \frac{\lambda_1}{d} \quad , \quad \sin \theta'_{m,1} = m \frac{\lambda_1}{d} \pm \frac{\lambda_1}{Nd} \quad , \\ \sin \theta_{m,2} &= m \frac{\lambda_2}{d} \quad , \quad \sin \theta'_{m,2} = m \frac{\lambda_2}{d} \pm \frac{\lambda_2}{Nd} \quad . \end{aligned}$$

Le due lunghezze d'onda sono appena risolubili, secondo il criterio di Rayleigh, quando il massimo di λ_1 coincide con il minimo di λ_2 , condizione che si può scrivere in due modi:

$$m \frac{\lambda_1}{d} = m \frac{\lambda_2}{d} - \frac{\lambda_2}{Nd} \quad , \quad m \frac{\lambda_2}{d} = m \frac{\lambda_1}{d} + \frac{\lambda_1}{Nd} \quad .$$

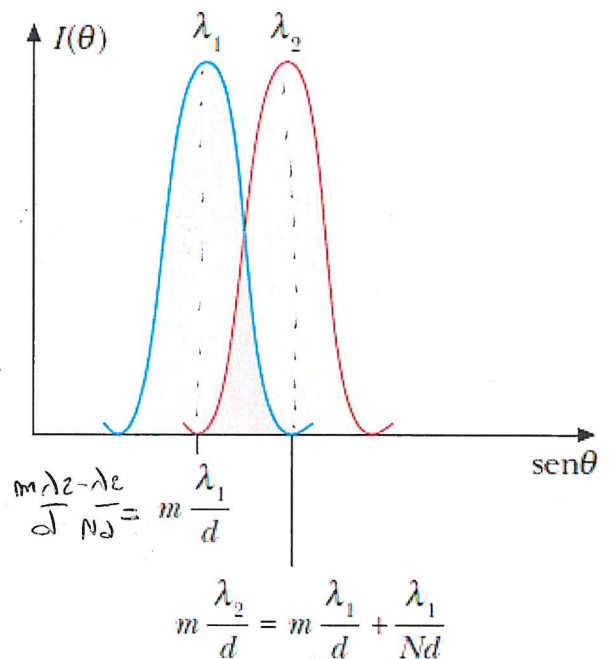
Dato che $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda$, chiamando $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ si ha da entrambe: $m \Delta\lambda = \lambda / N$ e si definisce potere risolutivo del reticolo all'ordine m la grandezza:

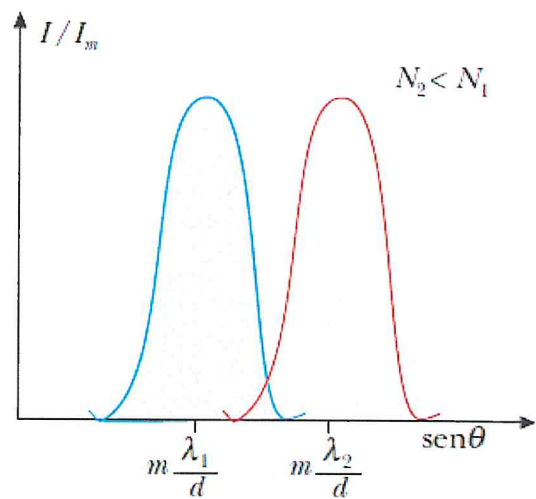
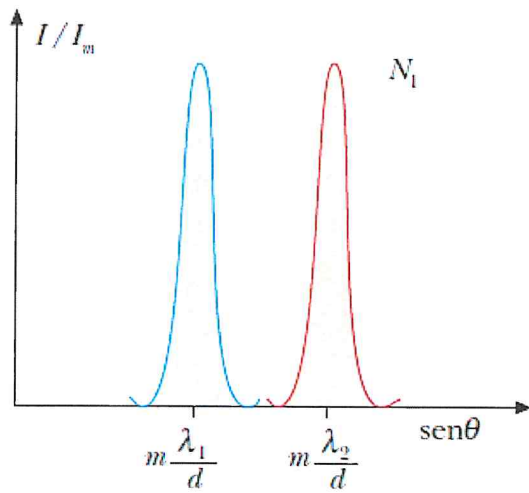
$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \quad , \quad \text{Potere Risolutivo Reticolo}$$

Prop. al numero di fenditure

la quale esprime, per una data λ , la differenza $\Delta\lambda$ risolubile. Dunque:

- il potere risolutivo del reticolo risulta proporzionale al numero totale di fenditure e aumenta con l'ordine dello spettro utilizzabile;
- il potere risolutivo non dipende dal passo del reticolo.

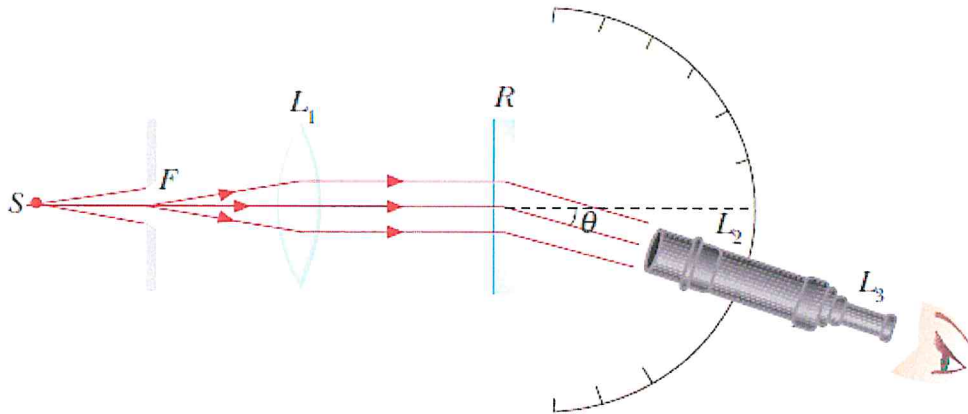




Infatti, anche se la dimensione del passo d incide sulla separazione angolare dei massimi di due onde con λ_1 e λ_2 (potere dispersivo $D = d \vartheta / d \lambda = 1 / d \sin \vartheta_m$), l'estensione delle bande non permette di risolvere i due massimi.

Spettroscopia:

I reticoli di diffrazione hanno un utilizzo molto importante nell'analisi della radiazione elettromagnetica visibile emessa dalle varie sostanze opportunamente eccitate, analisi che viene chiamata spettroscopia. L'apparecchio usato per la misura delle lunghezze d'onda emesse da una sorgente è mostrato schematicamente in figura; esso costituisce un esempio di spettroscopio a reticolo di diffrazione.



La luce emessa dalla sorgente S passa attraverso una sottile fenditura F posta nel piano focale della lente L_1 ; l'insieme fenditura-lente costituisce il collimatore. Da L_1 emerge un fascio di raggi paralleli che incide ortogonalmente sul reticolo R. I raggi trasmessi dal reticolo secondo una certa direzione θ sono focalizzati dal sistema di lenti L_2 e L_3 che costituiscono il telescopio. Muovendo il telescopio non si osserva nulla a meno che esso non sia posizionato secondo una direzione θ che soddisfa alla relazione:

$$\sin \theta_\lambda = m \frac{\lambda}{d} .$$

Noto il passo d del reticolo, misurato l'angolo θ_λ con un goniometro di precisione e individuato l'ordine m , si determina il valore della lunghezza d'onda.

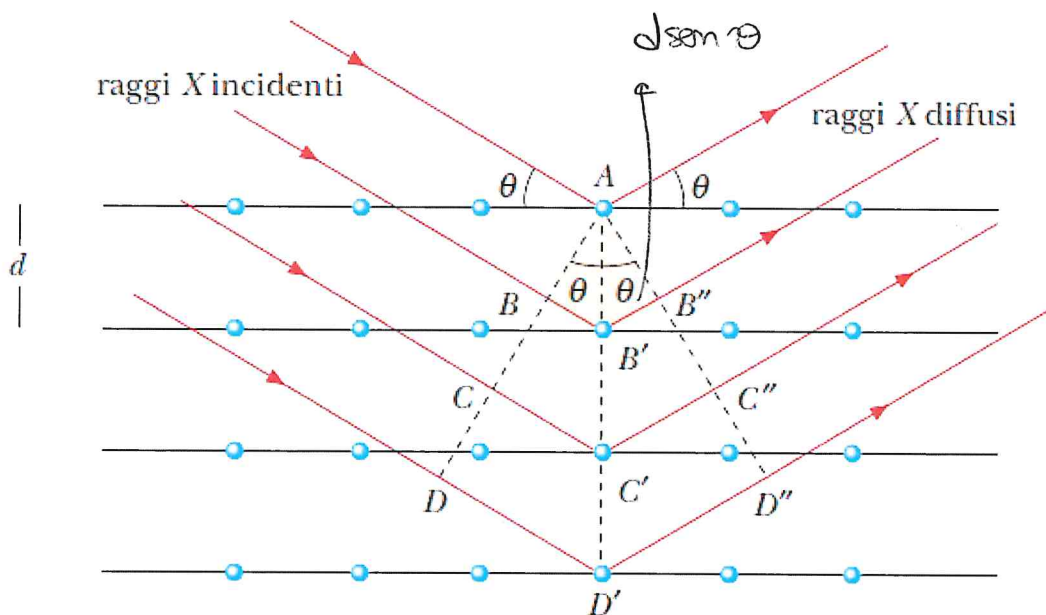
Diffrazione dei raggi X

I raggi X occupano la banda di radiazioni elettromagnetiche con lunghezze d'onda inferiori a 10^{-9} m; essi vengono prodotti dal frenamento in un materiale pesante di elettroni accelerati da una differenza di potenziale tipicamente compresa tra 10 e 100 kV, oppure quando un elettrone compie una transizione verso uno dei livelli energetici più interni di un atomo.

In un normale reticolo di diffrazione ottico i raggi X non vengono praticamente diffratti; ad esempio, con $\lambda = 10^{-10}$ m e $d = 10^{-6}$ m il massimo del prim'ordine si forma all'angolo $\theta = \lambda/d = 10^{-4}$ rad = $5.7 \cdot 10^{-3}$ gradi, troppo vicino al massimo di ordine zero per essere osservato. Invece un reticolo spaziale naturale adatto a produrre la diffrazione dei raggi X è un reticolo cristallino, in cui gli atomi sono disposti secondo strutture regolari con distanze reciproche molto piccole confrontabili appunto con la lunghezza d'onda dei raggi X.

Quando un fascio di raggi X di lunghezza d'onda λ incide su questa struttura di atomi, gli elettroni che circondano ogni singolo nucleo si comportano come dipoli oscillanti, emettendo radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda λ in tutte le direzioni. Il cristallo si comporta quindi come un sistema tridimensionale di sorgenti coerenti e nello spazio circostante si osserva l'interferenza delle onde emesse da queste sorgenti.

Un'onda piana, che incide sul cristallo formando l'angolo di radenza θ con un insieme di piani reticolari distanti d , vede la serie di atomi, uno per piano reticolare, che appartengono ad una retta ortogonale ai piani reticolari, come un reticolo unidimensionale. Se ci poniamo nella direzione di osservazione che forma l'angolo θ rispetto ai piani reticolari, le differenze di cammino $BB'B''$, $CC'C''$, $DD'D''$ tra le onde emesse da due sorgenti contigue come A e B', B' e C', C' e D' sono eguali a $2d\sin\theta$.



abbiamo interferenza costruttiva quando:

Massimi
Interferenza

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad \sin \theta = \frac{m\lambda}{2d} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

legge di Bragg

relazione detta legge di Bragg. Per angoli diversi il fascio risulta notevolmente attenuato o addirittura soppresso a causa dell'interferenza distruttiva, proprio come avviene per i reticoli ottici.

Un dispositivo per l'osservazione della diffrazione di raggi X è lo spettrografo a cristallo ideato da Bragg. In corrispondenza di una determinata serie di piani reticolari, cioè ad un certo valore di d , si varia l'angolo θ e misurando gli angoli dei massimi si deduce lo spettro delle lunghezze d'onda del fascio di raggi X emessi dagli elettroni frenati. Si verifica così l'esistenza della componente continua alla radiazione di frenamento, alla quale è sovrapposta la componente a righe caratteristica del materiale emettitore.

Viceversa, utilizzando un fascio monocromatico di raggi X di cui è nota la lunghezza d'onda si possono determinare le varie distanze d , acquisendo informazioni sulla struttura cristallina del materiale usato come bersaglio nello spettrografo.

