

LATERALI E GRUPPI QUOZIENTI

15

Sia $H \leq G$ e $x \in G$
definiamo

$$xH = \{ xh \mid h \in H \} \quad \text{laterale sinistro di } H$$

$$Hx = \{ hx \mid h \in H \} \quad \text{laterale destro di } H$$

Oss: 1) i laterali sinistri sono le classi di equivalenza della seguente relazione d'eq.

$$x \sim y \iff x^{-1}y \in H$$

(per i laterali destri la relazione è $x y^{-1} \in H$)

2) i laterali sinistri (o destri) formano una partizione di G

3) due laterali (indifferentemente destri o sinistri) sono in biiezione

Def: Sia $H \leq G$ definiamo l'indice di H in G come il numero di laterali sinistri di H in G che si indice con $|G:H|$

[se avessimo scelto laterali dx avremmo ottenuto lo stesso numero, perchè?]

Teorema di Lagrange [importante]

G gruppo finito e $H \leq G$ allora $|G| = |H| \cdot |G:H|$

Corollario: 1) $|H| \mid |G|$ 2) se $g \in G \Rightarrow |g| \mid |G|$

3) $g^{|G|} = 1_G \quad \forall g \in G$
(divisibile)

4) G gr ciclico di ordine primo $\Rightarrow G$ non contiene sottogr. propri non banali

(i.e. $H \leq G \Rightarrow H = \{1_G\} \vee H = G$)

Applicazione:

Teorema (piccolo Teorema di Fermat)

p primo, $m \in \mathbb{Z}$, $m \not\equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Dim ragioner in $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ gr moltiplicativo di ordine $p-1$

[Domanda: si può dare una struttura di gruppo a $\{Hx \mid x \in G\}$?]

Def Sia $H \leq G$, H si dice normale in G se e solo se $xH = Hx$ per ogni $x \in G$ e si indica con $H \triangleleft G$

[Attenzione]: $H \triangleleft G$ non significa che $xh = hx$ per ogni $x \in G$ e $h \in H$

$H \triangleleft G$ significa che per ogni $x \in G$ e $h \in H$ esiste $h' \in H$ t.c. $xh = h'x$

Oss: Sia $H \leq G$

$$H \triangleleft G \iff H^x = H \quad \forall x \in G$$

$$H \triangleleft G \iff H^x \leq H \quad \forall x \in G$$

Esempi: 1) $\{1_G\} \triangleleft G$ e $G \triangleleft G$

2) $Z(G) \triangleleft G$ 3) $C_G(S) \triangleleft N_G(S)$

4) $H \leq G$ e $[G:H] = 2 \Rightarrow H \triangleleft G$

[dimostrazioni per esercizio]

17

Teorema Sia $H \triangleleft G$ definiamo in $\{xH \mid x \in G\}$
l'operazione $xH \cdot yH = xyH$

Questa operazione è ben definita e
rende l'ins dei laterali sinistri un gruppo

$$\text{Dim: } \left. \begin{array}{l} xH = \bar{x}H \\ yH = \bar{y}H \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{x}^{-1}x \in H \\ \bar{y}^{-1}y \in H \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists h, h' \in H \text{ t.c. } x = h\bar{x} \text{ e } y = h'\bar{y}$$

$$\Rightarrow xy = h\bar{x}h'\bar{y} = \bar{x}h''h'\bar{y} = \bar{x} \underbrace{(h''h')}_{\in H} \bar{y}$$

$$\boxed{H \triangleleft G \quad \exists h'' \in H \text{ t.c. } h\bar{x} = \bar{x}h''}$$

↙ stesso argomento

$$\Rightarrow xy = \bar{x}\bar{y}h''' \text{ con } h''' \in H$$

$$\Rightarrow xy(\bar{x}\bar{y})^{-1} = h''' \in H \Rightarrow xyH = \bar{x}\bar{y}H$$

Abbiamo dimostrato che è ben definita
Verificare che con questa operazione
otteniamo un gruppo è facile



Oss 1) Siccome $H \triangleleft G$ se usassimo i laterali
destri otterremmo la stessa cosa

2) vale anche il viceversa cioè

se l'operazione $xHyH = xyH$ è ben definita
allora $H \triangleleft G$

Def Sia $H \triangleleft G$ il gruppo $\{xH \mid x \in G\}$

con l'operazione appena definita si dice
gruppo quoziente di G su H

e si indica con G/H

Esempio 1) G abeliano $H \leq G \Rightarrow H \triangleleft G$

2) $A_4 = \{\text{permutazioni pari di } S_4\}$

$$H = \{ \text{Id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \}$$

il sottinsieme costituito dall'identità e
da tutte le permutazioni prodotto di due 2-cicli
disgiunti

• si può verificare che $H \leq A_4$

• Vi faccio notare che se $\alpha \in A_4$

$$\alpha \circ \underbrace{(\pi_1, \dots, \pi_m)}_{n\text{-ciclo}} \circ \alpha^{-1} = \underbrace{(\alpha(\pi_1), \dots, \alpha(\pi_m))}_{n\text{-ciclo}}$$

[il coniugato di un n -ciclo è un n -ciclo]

$$\alpha \circ (1,2) \circ (3,4) \circ \alpha^{-1} = \alpha(1,2) \alpha^{-1} \circ \alpha \circ (3,4) \circ \alpha^{-1}$$

$$= (\alpha(1), \alpha(2)) \circ (\alpha(3), \alpha(4)) \in H$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 due 2-cicli disgiunti

analogo per $(1,3) \circ (2,4)$ e $(1,4) \circ (2,3)$

Abbiamo ottenuto che per ogni $h \in H$
 e per ogni $\alpha \in A_4$ $\alpha \circ h \circ \alpha^{-1} \in H$

e quindi $H \triangleleft A_4$ □

- far vedere che $H^x = H$ è il metodo più usato per provare la normalità
 - torneremo sui gruppi di permutazioni per rivedere le loro principali proprietà

Domande

(20)

$$\boxed{\text{Chi è } \frac{A_4}{H} ?} \quad \frac{A_4}{H} \text{ ha ordine } 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ tutti gli elementi non banali hanno ordine 3

$\Rightarrow \frac{A_4}{H}$ è ciclico

$$\frac{A_4}{H} = \{H, (1,2,3)H, (1,3,2)H\}$$

! Attenzione il rappresentante del letterale non è unico

$$\frac{A_4}{H} = \{H, (2,3,4)H, (2,4,3)H\}$$

[A_4 contiene un sottogruppo normale proprio e non banale ma è un'eccezione]

Def G si dice semplice se non ha sottogruppi normali propri e non banali.

$$(H \triangleleft G \Rightarrow H = \{1_G\} \text{ o } H = G)$$

Teorema A_n per $n \neq 4$ è un gruppo semplice (dimostrazione non facciamo)

Domande: quali sono i gruppi ciclici semplici? 21

Sappiamo che $H, K \leq G \Rightarrow H \cap K \leq G$
e
 $H \leq K \text{ e } K \leq G \Rightarrow H \leq G$

Valegono le stesse proprietà per i sottogruppi normali?

Proposizione $H \triangleleft G, K \triangleleft G \Rightarrow H \cap K \triangleleft G$

Dim Sappiamo che $H \cap K \leq G$

Sia $g \in G$ e $x \in H \cap K$ allora

$g^{-1} x g \in H$ perché $H \triangleleft G$ e $g^{-1} x g \in K$ perché $K \triangleleft G$

$\Rightarrow g^{-1} x g \in H \cap K$ $\square$

[La seconda proprietà invece non vale]

Esempio

$$K = \{ \text{Id}, (1,2) \circ (3,4) \} \triangleleft H \triangleleft A_4$$

sottogruppo di
ordine 2

normale
perché
abeliano

gruppo
introdotto
prima

ma $(1,2,3) \circ (1,2) \circ (3,4) \circ (1,2,3)^{-1} = (2,3) (1,4) \notin K$
da cui si deduce che K non è normale in A_4