

FUNZIONI RAZIONALI SIMMETRICHE

F campo

$F(x_1, \dots, x_n)$ è il campo delle frazioni di $F[x_1, \dots, x_n]$

$$E \stackrel{\text{def}}{=} F(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)} \mid f, g \in F[x_1, \dots, x_n], g \neq 0 \right\}$$

- Sia $\pi \in S^n$, si può definire in maniera univoca univoca $\varphi(\pi) \in \text{Aut}(E)$ t.c. $\varphi(\pi)(a) = a \quad \forall a \in F$
e $\varphi(\pi)(x_i) = x_{\pi(i)}$

- Definiamo $\varphi: S_n \rightarrow \text{Gal}(E/F)$
 $\pi \rightarrow \varphi(\pi)$

Si osservi che φ è un omomorfismo di gruppi (dim. per esercizio)

- definiamo $S \stackrel{\text{def}}{=} \text{Inv}(\varphi(S_n))$ il campo delle funzioni razionali simmetriche

- esempi di funzioni di S :

$$P_1 = x_1 + \dots + x_n \quad P_2 = \sum_{i < j} x_i x_j$$

$$P_3 = \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k \quad \dots \quad P_n = x_1 \dots x_n$$

queste funzioni si chiamano funzioni simmetriche elementari

Se $n=4$, otteniamo $P_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$$P_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$$

$$P_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4$$

$$P_4 = x_1 x_2 x_3 x_4$$

Consideriamo $\underbrace{F(P_1, \dots, P_m)}_{\substack{\text{estensione di } F \\ \text{con } P_1, \dots, P_m}} \subseteq S$

e $g(x) \in E(x)$ tale che

$$g(x) = (x - x_1) \dots (x - x_m) = x^m - P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} - \dots + (-1)^m P_m$$

da cui si ottiene $g(x) \in F(P_1, \dots, P_m)[x]$

Possiamo concludere che:

E campo di spezzamento di $g(x)$ (polinomio separabile) su $F(P_1, \dots, P_m)$

$\Rightarrow$
 $E/F(P_1, \dots, P_m)$ è un'estensione di Galois

per teoremi fondamentali teoria di Galois
 otteniamo che

$$n! = |\varphi(S_n)| = |E : \text{gr}(\varphi(S_n))| = |E : S|$$

$\uparrow$
 suriettivo

• $\mathcal{G}(S_m) \subseteq \text{Gal}(\bar{E}/\mathbb{F}(P_1, \dots, P_m))$ per definizione

Inoltre se $f \in \text{Gal}(\bar{E}/\mathbb{F}(P_1, \dots, P_m))$

$\Rightarrow f$ permuta le radici di $g(x)$
e viene unicamente determinato
dell'azione su $\{x_1, \dots, x_m\}$

$\Rightarrow f = \varphi(\pi)$ per qualche $\pi \in S_m$

conclusione $\mathcal{G}(S_m) = \text{Gal}(\bar{E}/\mathbb{F}(P_1, \dots, P_m))$

$$\begin{aligned} S &= \mathbb{F}_{\text{inv}}(\mathcal{G}(S_m)) = \mathbb{F}_{\text{inv}}(\text{Gal}(\bar{E}/\mathbb{F}(P_1, \dots, P_m))) = \\ &= \mathbb{F}(P_1, \dots, P_m) \end{aligned}$$

Riassumendo:

- S è generato come campo dalle funzioni simmetriche elementari
- E/S estensione di Galois
- $[E:S] = m!$ e $\text{Gal}(\bar{E}/S) \cong S_m$