

Cenni di teoria delle onde sismiche

Stress (sforzo)

Definizione: forza per area unitaria $\sigma = \frac{F}{A}$

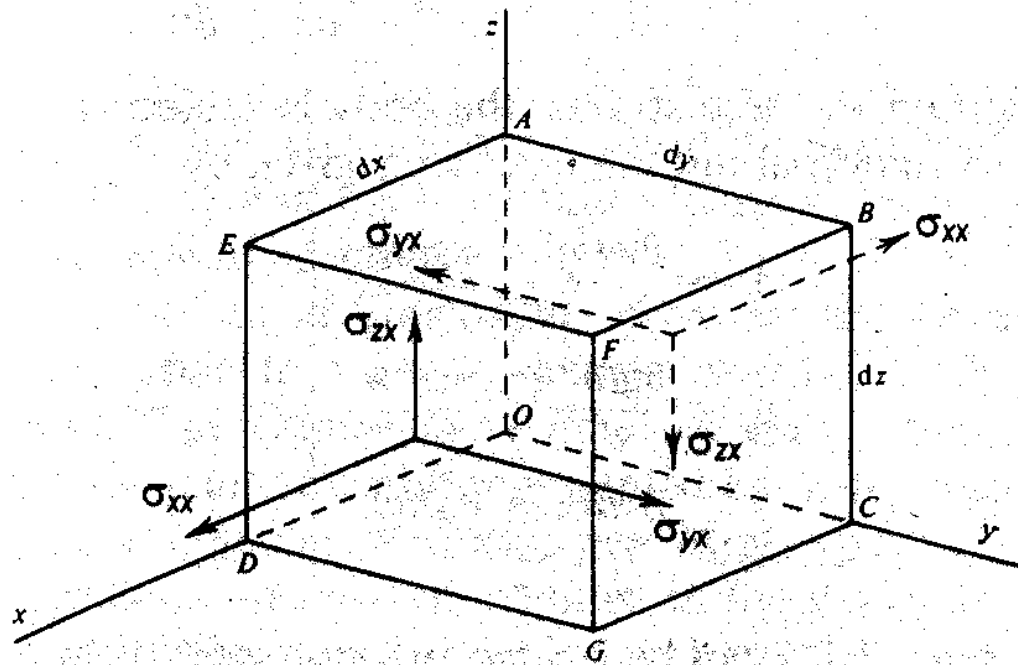
Sforzo normale (pressione): se forza perpendicolare ad area

Sforzo di taglio: se forza parallela ad area

In generale, lo sforzo puo' essere risolto in componenti normali e di taglio

Cenni di teoria delle onde sismiche

Analisi degli sforzi che agiscono su un elemento infinitesimo



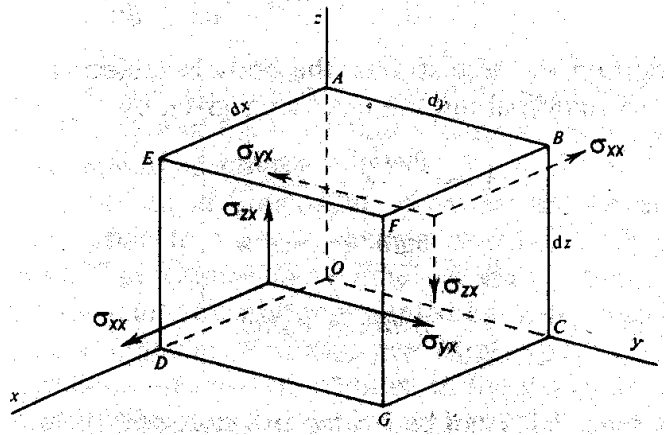
Se il mezzo e' in equilibrio statico gli stress devono essere bilanciati.



$$(\sigma_{xx}, \sigma_{yx}, \sigma_{zx})_{OABC} = -(\sigma_{xx}, \sigma_{yx}, \sigma_{zx})_{DEFG}$$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Analisi degli sforzi che agiscono su un elemento infinitesimo



Inoltre, gli sforzi di taglio formano coppie che tendono a ruotare l'elemento intorno agli assi

$$\sigma_{yx}, \sigma_{xy} \Rightarrow z$$

$$forza \times braccio = (\sigma_{yx} dy dz) dx$$

All'equilibrio il momento totale deve essere nullo quindi

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$$

E, in generale

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

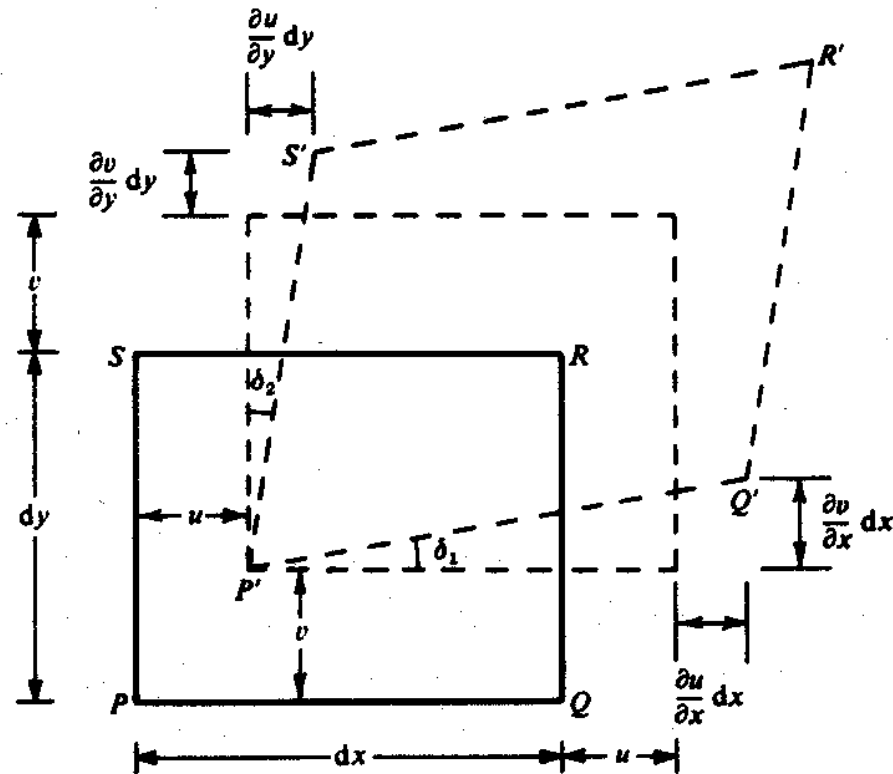
Cenni di teoria delle onde sismiche

Strain (deformazione) = variazione relativa di forma o dimensioni di un corpo

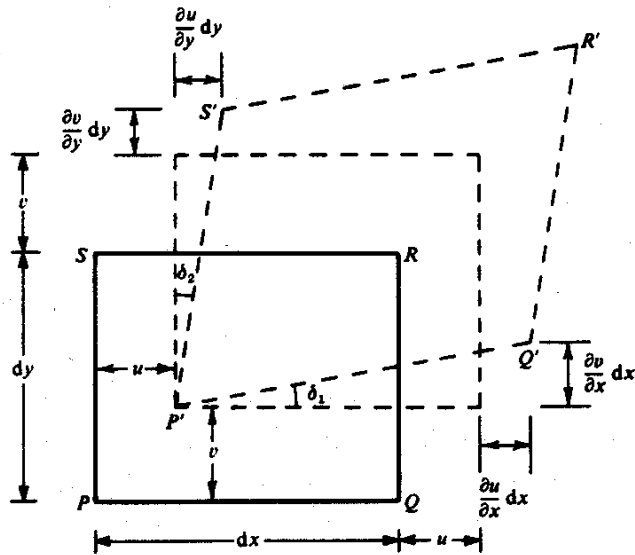
Si verifica se

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$



Cenni di teoria delle onde sismiche



Le coordinate dei punti prima e dopo la deformazione saranno:

$$P(x, y); \quad P'(x + u, y + v)$$

$$Q(x + dx, y); \quad Q'(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, y + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx)$$

$$R(x + dx, y + dy); \quad R'(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy)$$

$$S(x, y + dy); \quad S'(x + u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy)$$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Variazioni in u e v sono molto piu' piccole di dx e dy , dunque prodotti e potenze di $(\delta u/\delta x, \delta u/\delta y), (\delta v/\delta x, \delta v/\delta y)$ possono essere trascurate. Si ha quindi che:

1. PQ aumenta in lunghezza di $(\delta u/\delta x)dx$
PS aumenta in lunghezza di $(\delta v/\delta y)dy$
2. $\delta_1 = (\delta v/\delta x)$; $\delta_2 = (\delta u/\delta y)$
3. Angolo retto in P diminuisce di $\delta_1 + \delta_2 = (\delta v/\delta x + \delta u/\delta y)$
4. Rettangolo ruota in senso anti-orario di $(\delta_1 - \delta_2)/2 = (\delta v/\delta x - \delta u/\delta y)/2$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Si definiscono quindi le seguenti deformazioni:

Normali

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Di taglio

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Si definiscono quindi le seguenti deformazioni:

Normali $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$

Di taglio $\epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}$

E inoltre le seguenti rotazioni:

$$\theta_x = \frac{\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}}{2}$$

$$\theta_y = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}}{2}$$

$$\theta_z = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}{2}$$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Variazioni di dimensioni dovute a sforzi normali producono variazioni di volume. La variazione di volume per volume unitario prende il nome di **dilatazione** (Δ).

Partendo da un parallelepipedo di dimensioni dx , dy , dz

Si arriva a dimensioni deformate date da

$$dx(1+\varepsilon_{xx}), dy(1+\varepsilon_{yy}), dz(1+\varepsilon_{zz})$$

Trascurando i prodotti dei termini infinitesimi, la variazione di volume sara'

$$(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) dx dy dz$$

$$\text{E la dilatazione } \Delta = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = (\delta u / \delta x) + (\delta v / \delta y) + (\delta w / \delta z)$$

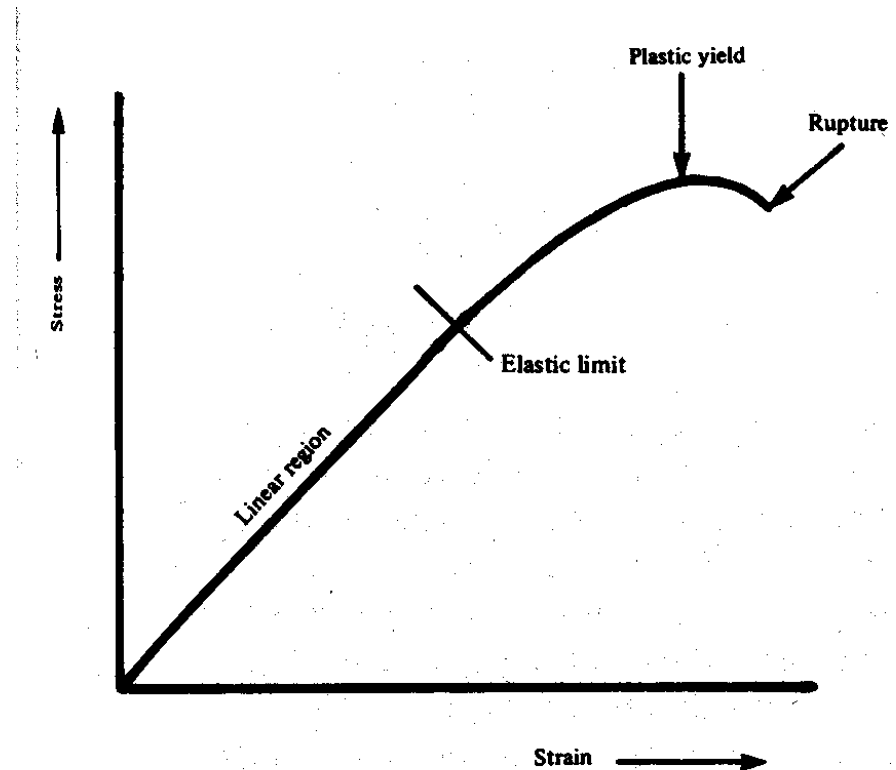
Cenni di teoria delle onde sismiche

Legge di Hooke

La deformazione e' direttamente proporzionale allo sforzo (quando la deformazione e' piccola >> nel caso sismico

$\Delta < 10^{-8}$ ad eccezione intorno sorgente, quindi valida)

Multipli sforzi producono deformazioni indipendentemente l'uno dall'altro e deformazione totale e' somma deformazioni individuali.



Cenni di teoria delle onde sismiche

Legge di Hooke (2)

In generale

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{pmatrix}$$

Ma per mezzo isotropo, si riduce a

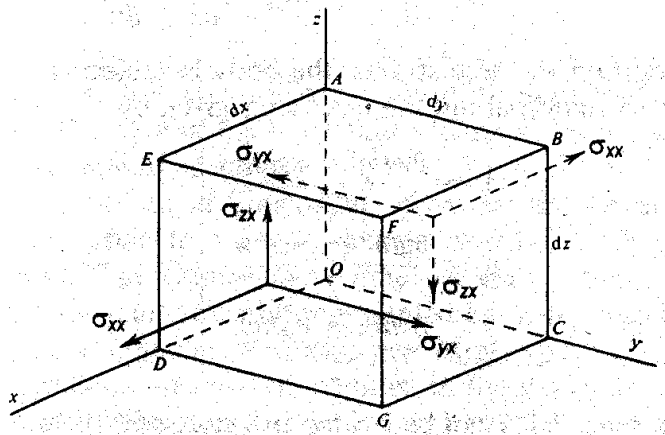
$$\sigma_{ii} = \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{ii} \quad (i = x, y, z)$$

$$\sigma_{ij} = \mu \varepsilon_{ij} \quad (i, j = x, y, z; i \neq j)$$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Equazione d'onda

Se il mezzo non e' in equilibrio possiamo scrivere per gli sforzi sulla faccia DEFG



$$\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$$

$$\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx$$

$$\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx$$

Essendo sforzi opposti a quelli su faccia OABC, lo sforzo netto non bilanciato sara'...

Cenni di teoria delle onde sismiche

Equazione d'onda (2)

...

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx$$

la forza per volume unitario nelle direzioni x,y,z sara'

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}$$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Equazione d'onda (3)

analoghe equazioni si ottengono per le altre facce: quindi la forza totale che agisce nella direzione x sarà'

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}$$

Per la legge di Newton, la forza non bilanciata nella direzione x per volume unitario e'

$$\rho \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}$$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Equazione d'onda (4)

analoghe equazioni si ottengono per il moto lungo gli assi y e z . Queste equazioni legano spostamenti a stress. Usando legge di Hooke possiamo esprimere sforzi come deformazioni e da queste passare agli spostamenti. Si ha:

$$\sigma_{ii} = \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{ii} \quad (i = x, y, z)$$

$$\sigma_{ij} = \mu \varepsilon_{ij} \quad (i, j = x, y, z; i \neq j)$$

$$\rho \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} =$$

$$= \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z}$$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Equazione d'onda (5)...

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \\ &= \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} = \\ &= \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right]\end{aligned}$$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Equazione d'onda (6)...

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] = \\ & = \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ & = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \end{aligned}$$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Equazione d'onda (7)

Si ottengono quindi analoghe equazioni per v e w

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w$$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Equazione d'onda (8)

L'equazione d'onda si ottiene differenziando rispettivamente per x , y , z e sommando I risultati

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ = (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} \right) + \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta$$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Equazione d'onda (9)

O anche

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} &= \nabla^2 \Delta \\ \alpha^2 &= (\lambda + 2\mu) / \rho \end{aligned} \right\}$$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Equazione d'onda (10)

Sottraendo la derivata di (1) rispetto a z dalla derivata di (2) rispetto ad y si ottiene:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial v}{\partial z} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y \partial z} + \mu \nabla^2 \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial w}{\partial y} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z \partial y} + \mu \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Cenni di teoria delle onde sismiche

Equazione d'onda (11)

...

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial t^2} &= \mu \nabla^2 \vartheta_x \\ \beta^2 &= \frac{\mu}{\rho} \end{aligned} \right\}$$

Cenni sulla propagazione delle onde sismiche

Equazione d'onda (12)

La soluzione generale dell'equazione d'onda e' la funzione

$$f(x \pm vt)$$

La quantita' $(x \pm vt)$ e' la **fase**.

Le superfici caratterizzate da identica **fase** (per le quali il moto dell'onda e' lo stesso) sono i fronti d'onda.

Se la perturbazione e' la stessa su un piano perpendicolare alla direzione di propagazione il fronte d'onda e' piano e si ha **un'onda piana**

Cenni sulla propagazione delle onde sismiche

Onde P ed S

in un mezzo omogeneo ed isotropo si possono propagare 2 tipi di onde :

- **Onde P (dilatazionali, longitudinali, irrotazionali, compressionali):** corrispondono a variazioni nella dilatazione Δ .
- **Onde S (di taglio, trasversali, rotazionali):** corrispondono a variazioni in una o piu' componenti della rotazione θ .

Cenni sulla propagazione delle onde sismiche

Onde P ed S (2)

- **Velocita' delle Onde P:**

$$\alpha = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}};$$

- **Velocita' delle Onde S :**

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Definiamo poi il rapporto di Poisson σ come

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Cenni sulla propagazione delle onde sismiche

Onde P ed S (3)

λ e μ sono quantità positive, quindi σ deve assumere valori inferiori ad 1 e compresi tra 0 e 0.5.

In particolare vale 0.05 per rocce molto dure e rigide e 0.45 per materiali morbidi e poco consolidati (sedimenti). Per i liquidi σ è uguale a 0.5 ($\mu=0 \rightarrow \sigma=0.5$).

Utilizzando il rapporto di Poisson, possiamo scrivere per le onde P ed S

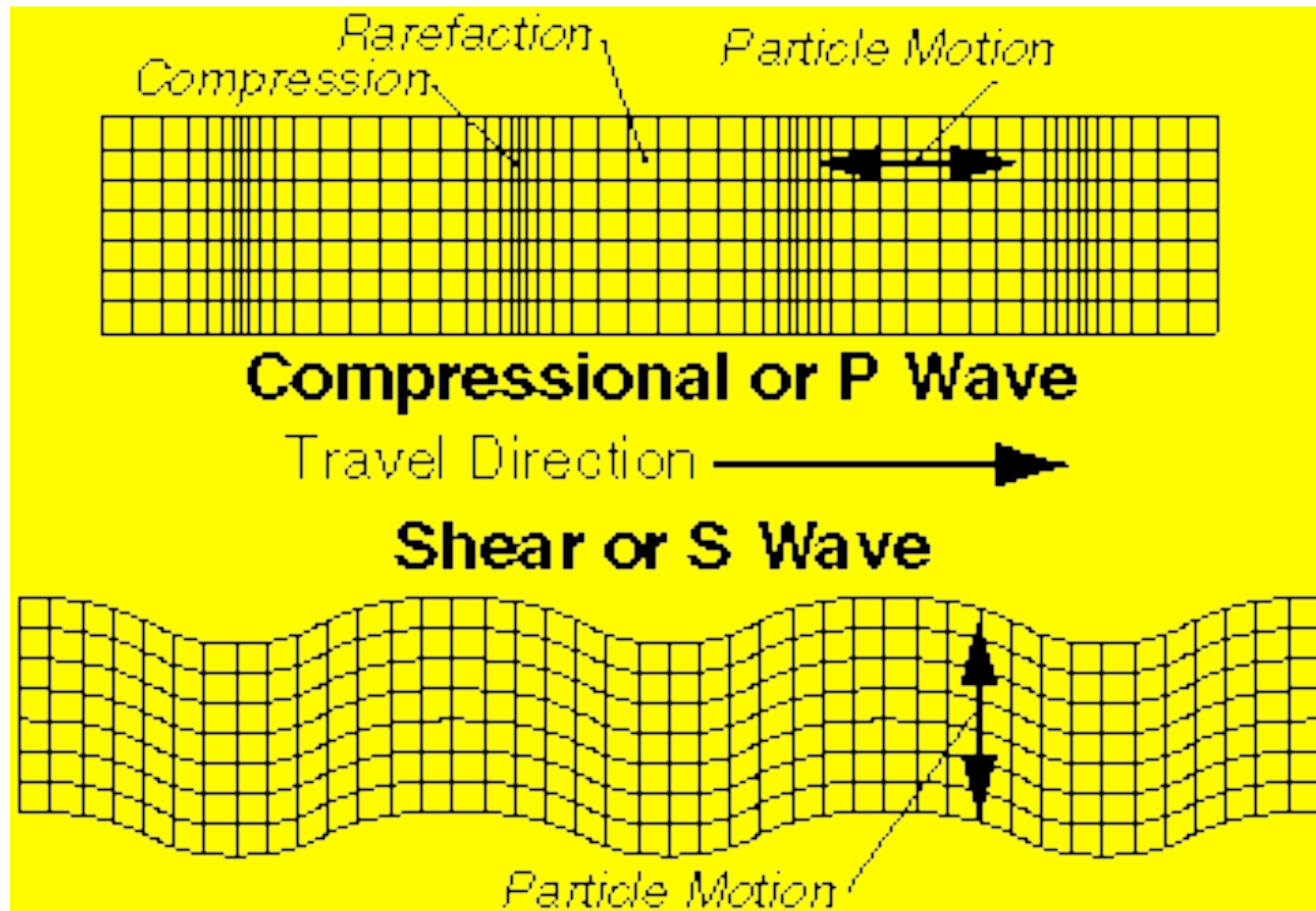
$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{(\lambda + 2\mu)}} = \left(\frac{0.5 - \sigma}{1 - \sigma} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cenni sulla propagazione delle onde sismiche

Onde P ed S (4)

Il rapporto β/α , variando σ tra 0.5 e 0, può variare tra 0 ed un valore massimo di $(2)^{-0.5}$, e la velocità delle onde S può quindi raggiungere un massimo del 70% della velocità delle onde P.

Cenni sulla propagazione delle onde sismiche



Cenni sulla propagazione delle onde sismiche

Significato e definizioni di alcune costanti elastiche:

- Per un mezzo dove tutti gli stress sono =0 ad eccezione di σ_{xx}
- Rapporto di Poisson

$$\sigma = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}}$$

Modulo di Young:

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}}$$

Cenni sulla propagazione delle onde sismiche

Significato e definizioni di alcune costanti elastiche (2):

- Per un mezzo dove agisce esclusivamente una pressione P (ovvero sforzi di taglio $=0$)

- Modulo di volume:

$$k = -\frac{P}{\Delta}$$

E sostituendo nella legge di Hooke i valori precedenti si ottiene:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}; k = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$$