

Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 01.09.26

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2025/2026

Esercizio 1

1. Scrivere la definizione di costante del moto per un sistema Hamiltoniano. Fare un esempio. [2pt]
2. Definire le Parentesi di Poisson e dimostrare la loro relazione con le costanti del moto. [1,5pt]
3. Scrivere le componenti del momento angolare di un punto materiale che si muove in $\mathbb{R}^3$ in coordinate canoniche e calcolare $\{M_1, M_2\}$. [1,5pt]
4. Usare il risultato del punto precedente per dimostrare che se M_1 e M_2 sono costanti del moto, allora anche M_3 è una costante del moto. [1pt]
5. Si definisca il flusso Hamiltoniano e si dimostri che è una famiglia di trasformazioni canoniche. [4pt]
6. Si consideri la seguente famiglia di trasformazioni di coordinate dipendenti dal parametro continuo t :

$$p = \tilde{p}e^{-t} \quad \text{and} \quad q = \tilde{q}e^t. \quad (*)$$

Si dimostri che è una trasformazione canonica per ogni valore di t . [1pt]

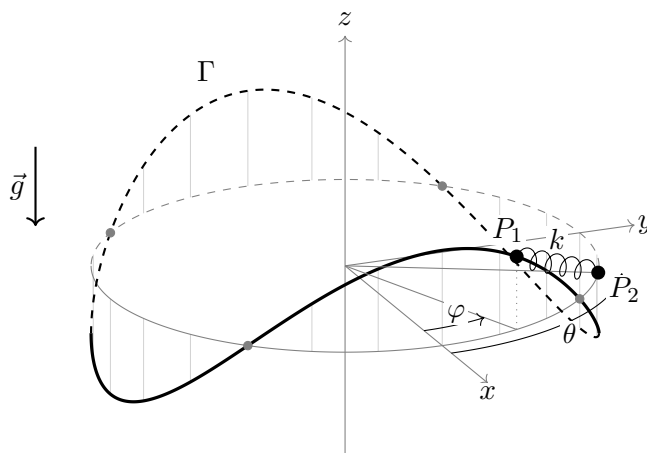
7. Si scriva la trasformazione infinitesima corrispondente a $t = \epsilon \ll 1$ e la si usi per identificare quale Hamiltoniana genera questo flusso. [2pt]
8. Si scriva una costante del moto del sistema associato ad $H(p, q) = pq$, giustificando la risposta. Si usi tale costante del moto per tracciare le traiettorie nello spazio delle fasi. [2pt]
9. Si trovi l'Hamiltoniana coniugata all'Hamiltoniana $H(p, q) = pq$, applicando la trasformazione canonica $(*)$, dove t è il tempo. [1pt]
10. *Facoltativa: Si consideri la teoria di campo con densità Lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(x)$, dove $x \in \mathbb{R}^2$, $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ ed è sottintesa la somma sugli indici ripetuti $\mu, \nu = 0, 1$. Si mostri che l'azione è invariante per i boost*

$$x^0 \mapsto x^0 \cosh \lambda + x^1 \sinh \lambda, \quad x^1 \mapsto x^0 \sinh \lambda + x^1 \cosh \lambda.$$

Si trovi la carica conservata. [1,5pt]

[Suggerimento: per una trasformazione infinitesima delle coordinate $\delta x^\mu = \epsilon \xi^\mu$ la corrente di Nöther è $j^\mu = -T^\mu{}_\nu \xi^\nu$, dove $T^\mu{}_\nu = \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}$.]

Esercizio 2



Nel sistema in figura un punto materiale P_1 di massa m è vincolato a giacere su una guida avvolta sul cilindro di raggio R e asse z . La guida è parametrizzata da

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = a \cos(2\varphi). \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

Un punto materiale P_2 di massa M è vincolato a giacere sulla circonferenza di raggio R del piano xy . I due punti sono collegati da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la gravità.

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere gli angoli φ e θ in figura. In particolare si scriva la matrice cinetica [2pt].
2. Si trovino le equazioni di Lagrange del sistema [2pt].
3. Si dica quale parametro va posto uguale a zero affinché il sistema acquisti una nuova costante del moto, spiegando il motivo e trovando tale nuova costante del moto [2pt].
4. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità [6pt].
[Suggerimento: se una entrata sulla diagonale di $\partial^2 V|_{\text{eq}}$ è negativa, il punto di equilibrio è instabile.]
5. Si ponga $M = m$, $a = R$ e $mg = \frac{11}{8} kR$. Si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile con $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e si scriva la Lagrangiana linearizzata [2pt].
6. *Facoltativo:* Si mantengano i valori dei parametri del punto 5 e si applichi al punto P_1 una forza costante $\vec{F} = F \vec{i}_z$. Qual è la nuova Lagrangiana? Qual è il valore di F per cui $(\varphi, \theta) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ è una configurazione di equilibrio? [1pt]