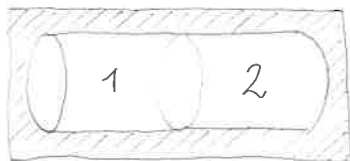




Esercizio n. 1



- a) Il cilindro è adiabatico e quindi è un sistema isolato. $\Rightarrow U$ è costante
I compartimenti 1 e 2 possono variare in volume e temperatura (energia interna) ma con i vincoli:

$$V_1 + V_2 = V \quad V \text{ costante} \quad (\text{I})$$

$$U_1 + U_2 = U \quad U \text{ costante} \quad (\text{II})$$

Da $dU = TdS - pdV$ si ricava immediatamente:

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV$$

Inoltre, poiché l'entropia è una variabile estensiva,

$$dS = dS_1 + dS_2$$

ove dS_1 e dS_2 sono relative ai compartimenti 1 e 2.

Il principio della massima entropia prevede che S sia massima all'equilibrio $\Rightarrow dS = 0 \Rightarrow dS_1 + dS_2 = 0$ (III)

$$dS_1 = \frac{1}{T_1} dU_1 + \frac{p_1}{T_1} dV_1 \quad (\text{IV})$$

$$dS_2 = \frac{1}{T_2} dU_2 + \frac{p_2}{T_2} dV_2 \quad (\text{V})$$

Differenziando (I) e (II) si ha inoltre:

$$dV_1 + dV_2 = 0 \quad (\text{VI})$$

$$dU_1 + dU_2 = 0 \quad (\text{VII})$$

Mettendo insieme le Eq. III, IV, V, VI, e VII si ottiene infine:

(2)

$$0 = dS^{(III)} = dS_1 + dS_2 \stackrel{(IV-V)}{=} \frac{1}{T_1} dU_1 + \frac{p_1}{T_1} dV_1 + \frac{1}{T_2} dU_2 + \frac{p_2}{T_2} dV_2$$

$$\stackrel{(VI-VII)}{=} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dU_1 + \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) dV_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} \Rightarrow T_1 = T_2$$

e

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_1 = p_2 \quad \square$$

b) $n_1 = 1.0 \text{ mol}$ $n_2 = 2.0 \text{ mol}$ 1 e 2 monoatomici:
 $T_1 = 400 \text{ K}$ $T_2 = 300 \text{ K}$ $C_{V1} = C_{V2} = C_V = \frac{3}{2} R$
 $p_1 = 3.0 \text{ atm}$ $p_2 = 1.0 \text{ atm}$

Poiché il sistema è isolato, $\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$

$$n_1 C_V (T_e - T_1) + n_2 C_V (T_e - T_2) = 0$$

$$T_e (n_1 + n_2) = n_1 T_1 + n_2 T_2$$

$$T_e = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2} = \frac{(1.0 + 2.0) \text{ mol} \cdot 300 \text{ K}}{3 \text{ mol}} = 333 \text{ K}$$

c) Dai dati si possono ricavare i volumi iniziali e quindi il volume totale del cilindro:

$$V_1 = \frac{n_1 R T_1}{p_1} = \frac{1.0 \text{ mol} \cdot 0.082 \frac{\text{L} \cdot \text{atm}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 400 \text{ K}}{3.0 \text{ atm}} = 10.93 \text{ L}$$

$$V_2 = \frac{n_2 R T_2}{p_2} = \frac{2.0 \text{ mol} \cdot 0.082 \frac{\text{L} \cdot \text{atm}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 300 \text{ K}}{1.0 \text{ atm}} = 49.2 \text{ L}$$

$$V = V_1 + V_2 = 60.13 \text{ L}$$

Per i volumi finali: V_1^e e V_2^e deve essere $V_1^e + V_2^e = V$, e:

$$V_1^e = \frac{n_1 R T_e}{p_e}$$

$$\frac{V_1^e}{V_2^e} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} V_2^e + V_2^e = V$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} V_2^e = V$$

$$V_2^e = \frac{n_2 R T_e}{p_e}$$

$$\frac{3}{2} V_2^e = V$$

$$V_2^e = \frac{2}{3} V$$



quindi $V_1^e = \frac{1}{3} V = 20,04 \text{ l}$

$$V_2^e = \frac{2}{3} V = 40,08 \text{ l}$$

$$p_e = \frac{n_1 R T_e}{V_1^e} = \frac{1,0 \text{ mol}}{\frac{1}{3} \cdot 60,13 \text{ l}} \cdot \frac{0,082 \text{ l} \cdot \text{atm}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot \frac{1000 \text{ K}}{3} = 1,36 \text{ atm}$$

d) Il sistema è isolato; quindi la variazione di entropia dell'universo coincide con quella del sistema:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

Entrambi i compartimenti hanno subito una trasformazione irreversibile che ne ha cambiato temperatura e volume.

Pertanto conviene applicare la formula generale

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= n_1 C_V \ln \frac{T_e}{T_1} + n_1 R \ln \frac{V_1^e}{V_1} \\ &= R \left(\frac{3}{2} \ln \frac{T_e}{T_1} + \ln \frac{V_1^e}{V_1} \right) = 2,77 \text{ J/K} \end{aligned}$$

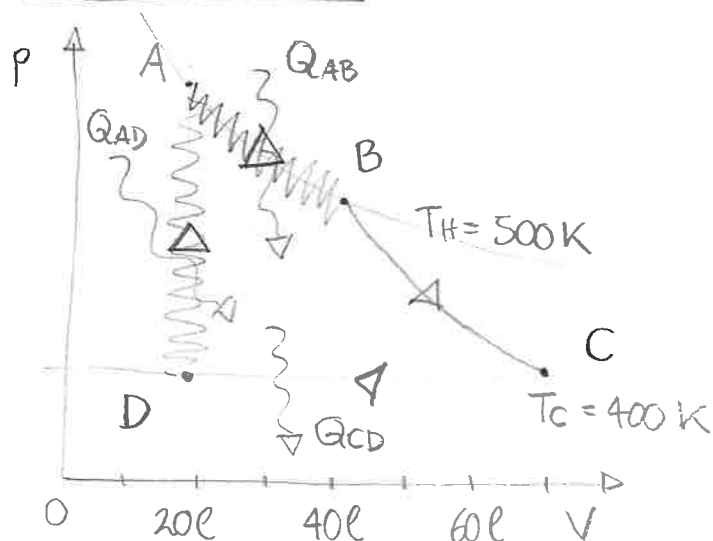
$$\begin{aligned} \Delta S_2 &= n_2 C_V \ln \frac{T_e}{T_2} + n_2 R \ln \frac{V_2^e}{V_2} \\ &= R \left(3 \ln \frac{T_e}{T_2} + 2 \ln \frac{V_2^e}{V_2} \right) = -0,78 \text{ J/K} \end{aligned}$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 1,99 \text{ J/K}$$

Coerentemente con il principio della massima entropia, si noti che $\Delta S > 0$, sebbene $\Delta S_2 < 0$.



Esercizio n. 2



Potrebbe essere utile preparare uno schema

	P	V	T
A	4,1 atm	20 l	500 K
B	2,05 atm	40 l	500 K
C	0,94 atm	69,9 l	400 K
D	0,94 atm	20 l	114,5 K

gas biatomico: $c_v = \frac{5}{2}R$, $c_p = \frac{7}{2}R$, $\gamma = \frac{7}{5}$

Calcoliamo alcuni valori "utili" (tra "-" perché non tutti lo sono dall'40)

$$p_A = \frac{nRT_H}{V_A} = \frac{2,0 \cdot 0,0821 \frac{\text{l atm}}{\text{mol K}} \cdot 500 \text{ K}}{20 \text{ l}} = 4,105 \text{ atm}$$

$$p_B = \frac{nRT_H}{V_B} = \frac{1}{2} p_A = 2,05 \text{ atm}$$

V_C si ricava dal fatto che B e C sono connessi da una adiabatica reversibile:

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

$$\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_B}{T_C}$$

$$\frac{V_C}{V_B} = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$V_C = V_B \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 40 \text{ l} \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = 69,88 \text{ l}$$

$$\text{infine } p_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 0,94 \text{ atm} = p_D$$

$$\text{e } T_D = \frac{p_D V_D}{nR} = \frac{p_C V_A}{nR} = 114,5 \text{ K}$$

a) $Q_{AB} = 0.6 Q_{AB}^{(rev)} = 3458 \text{ J}$ (5)
 con $Q_{AB}^{(rev)} = L_{AB}^{(rev)} = n R T_H \ln \frac{V_B}{V_A} = 2.0 \text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 500 \text{ K} \cdot \ln 2$
 $= 5763 \text{ J}$

È importante notare che, poiché AB è isoterma ed il gas è ideale,

$$\Delta U_{AB} = 0$$

Il che, per il primo principio, implica $L_{AB} = Q_{AB}$

(B → C)

Adiabatica reversibile, per cui:

$$Q_{BC} = 0$$

$$L_{BC} = -\Delta U_{BC} = -n c_v (T_C - T_B) = 2.0 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 100 \text{ K} = 4157 \text{ J}$$

(C → D)

Isobara reversibile, per cui:

$$L_{CD} = p_C (V_D - V_C) = 0,94 \text{ atm} \cdot 101300 \frac{\text{Pa}}{\text{atm}} (-49,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) = -4749 \text{ J}$$

$$Q_{CD} = n c_p (T_D - T_C) = 2.0 \text{ mol} \cdot \frac{7}{2} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} (-285,5 \text{ K}) = -16616 \text{ J}$$

(non "utile" nel calcolo del rendimento, in quanto è ceduto, non assorbito)

(D → A)

Isocora irreversibile, per cui

$$L_{DA} = 0$$

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} = n c_v (T_A - T_D) = 2.0 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} (385,5 \text{ K}) = 16026 \text{ J}$$

Da cui infine: $L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = 2866 \text{ J}$

b) Il rendimento η si calcola immediatamente:

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = \frac{L}{Q_{AB} + Q_{DA}} = 14,7 \%$$

c) La variazione di entropia dell'universo può essere calcolata in due modi:

c.1) poiché per il gas $\Delta S = 0$, calcolo ΔS^{amb} e

$$\Delta S_U = \Delta S^{amb} = \Delta S_{AB}^{amb} + \Delta S_{BC}^{amb} + \Delta S_{CD}^{amb} + \Delta S_{DA}^{amb}$$

c.2) mi concentro sulle sole trasformazioni irreversibili (AB e DA):

$$\Delta S_U = \Delta S_{AB} + \Delta S_{AB}^{amb} + \Delta S_{DA} + \Delta S_{DA}^{amb}$$

In entrambi i casi devo calcolare quattro variazioni di entropia



Scelgo il primo approccio, c.1):

$$\Delta S_{AB}^{\text{amb}} = - \frac{Q_{AB}}{T_H} = - \frac{3458 \text{ J}}{500 \text{ K}} = - 6.92 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

il serbatoio cede $-Q_{AB}$ a T_H

$$\Delta S_{BC}^{\text{amb}} = 0 \quad \text{poiché è adiabatica reversibile}$$

$$\Delta S_{CD}^{\text{amb}} = - \int_C^D \frac{dQ^{\text{rev}}}{T} = - \int_C^D \frac{nc_p dT}{T} = nc_p \ln \frac{T_C}{T_D} = 2.0 \text{ mol} \frac{7}{2} \frac{8.314 \text{ J}}{\text{mol K}} \ln \left(\frac{400}{114.5} \right)$$

$$= 72.81 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$\Delta S_{DA}^{\text{amb}} = - \frac{Q_{DA}}{T_H} = - 32.05 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

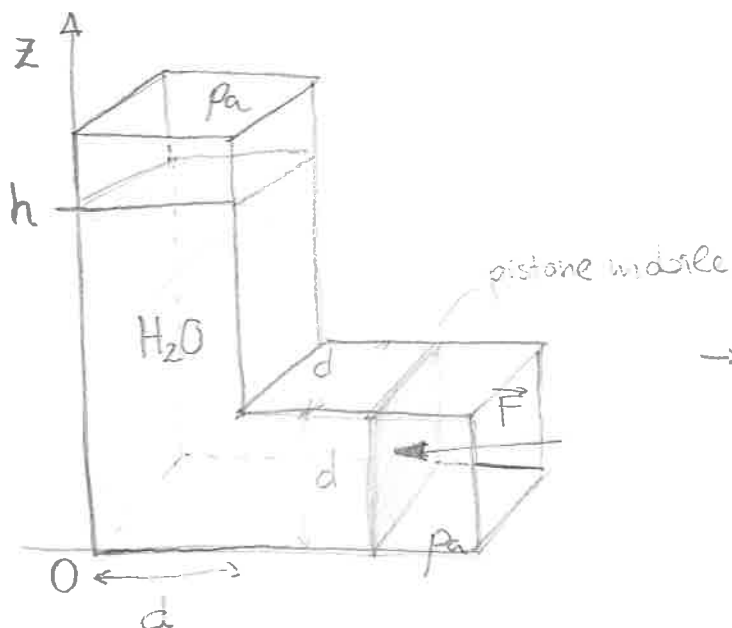
il serbatoio cede $-Q_{DA}$ a T_H

$$\text{Infine } \Delta S_U = \Delta S_{AB}^{\text{amb}} + \Delta S_{BC}^{\text{amb}} + \Delta S_{CD}^{\text{amb}} + \Delta S_{DA}^{\text{amb}} = 33.84 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

che è positivo, come richiesto dal II principio date le due trasformazioni irreversibili.



Esercizio n. 3



$$d = 50 \text{ cm} = \frac{1}{2} \text{ m}$$

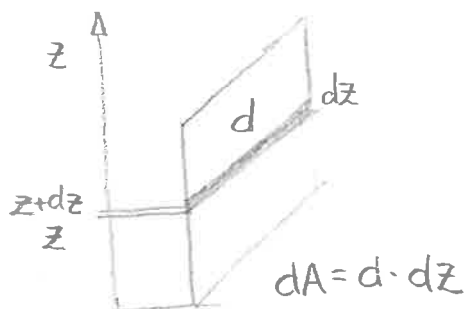
$$h = 125 \text{ cm} = \frac{5}{4} \text{ m}$$

→ introduco asse verticale z
con $z=0$ alla base della L
orientato verso l'alto

- a) $\vec{F}$ deve bilanciare la forza dovuta alla pressione della colonna d'acqua sul ramo verticale della L .
Tale pressione non è costante sul pistone mobile, ma dipende dalla quota z secondo la legge di Stevino:

$$p(z) = p_a + \rho g (h - z)$$

Bisogna pertanto suddividere il pistone mobile in tante strisciole infinitesime di altezza dz . Su ciascuna di esse la pressione eserciterà una forza infinitesima di intensità $dF_p(z)$:



$$dF_p(z) = p(z) dA = p(z) d \cdot dz$$
$$= [p_a + \rho g (h - z)] d \cdot dz$$

La forza dovuta alla pressione F_p si calcola integrando

questi contributi infinitesimi:

(8)

$$F_p = \int_0^d dF_p = \int_0^d [p_a + \rho g(h-z)] d \cdot dz = \int_0^d [p_a + \rho g h] d \cdot dz - \rho g \int_0^d z d \cdot dz$$
$$= [p_a + \rho g h] d^2 - \rho g \frac{1}{2} d^3 = p_a d^2 + \rho g d^2 (h - \frac{1}{2}d)$$

Il primo termine, $p_a d^2$ è dovuto alla pressione atmosferica, ed è compensato da una forza analoga che spinge il pistone da destra a sinistra, "aiutando" $\vec{F}$. Pertanto

$$|\vec{F}| = \rho g d^2 (h - \frac{1}{2}d)$$

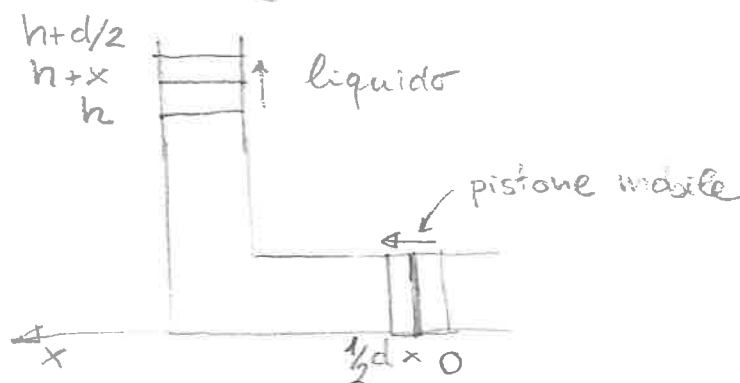
$$= 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \text{m}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \text{m}\right) = \frac{9800}{4} \text{N} = 2450 \text{N}$$

Si noti che $|\vec{F}| = d^2 \cdot p_{\text{med}}$

$$\text{con } p_{\text{med}} = \rho g (h - \frac{1}{2}d)$$

p_{med} è la (sovrappressione)* pressione media esercitata dall'acqua sul pistone mobile. Poiché $p(z)$ varia linearmente da $z=0$ a $z=d$, p_{med} è anche la pressione sul punto medio del pistone mobile, che si trova ad una profondità $(h - \frac{1}{2}d)$ dalla superficie. Questo si poteva intuire fin dall'inizio, evitando così di ricorrere al calcolo integrale.

b) La forza $\vec{F}$ aumenta continuamente mentre il pistone si muove dalla posizione iniziale $x=0$ a $x=\frac{1}{2}d$ (vedi figura) in quanto ad ogni spostamento infinitesimo del pistone corrisponde un analogo aumento di h :



* per sovrappressione si intende la pressione aggiuntiva, oltre alla pressione atmosferica p_a , dovuta al liquido.



Il lavoro infinitesimo dL che corrisponde ad uno spostamento da x a $x+dx$ è quindi:

$$dL = F(x) dx = \rho g d^2 \left(h + x - \frac{1}{2} d \right) dx$$

Da cui:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{d/2} dL = \int_0^{d/2} \rho g d^2 \left(h - \frac{1}{2} d \right) dx + \int_0^{d/2} \rho g d^2 x dx \\ &= \rho g d^2 \left(h - \frac{1}{2} d \right) \cdot \frac{1}{2} d + \rho g d^2 \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho g d^3 \left[\left(h - \frac{1}{2} d \right) + \frac{d}{4} \right] = \frac{1}{2} \rho g d^3 \left(h - \frac{d}{4} \right) \quad (*) \\ &= \frac{1}{2} \frac{10^3 \text{ Kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left(\frac{1 \text{ m}}{2} \right)^3 \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) \text{ m} \\ &= \frac{1}{16} 9800 \frac{9}{8} \text{ J} = 689 \text{ J} \end{aligned}$$

Si noti che anche in questo caso, poiché $F(x)$ aumenta linearmente, si poteva calcolare il lavoro L usando il valore medio di $F(x)$ nell'intervallo considerato, ovvero $F(\frac{d}{4})$, evitando (di nuovo) di ricorrere al calcolo integrale:

$$\begin{aligned} L &= F_{\text{med}} \cdot \frac{d}{2} = F\left(\frac{d}{4}\right) \cdot \frac{d}{2} = \\ &= \rho g d^2 \left(h + \frac{d}{4} - \frac{1}{2} d \right) \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \rho g d^3 \left(h - \frac{d}{4} \right) \end{aligned}$$

che coincide con la (*).

Tuttavia, visto che avete dedicato agli integrali parecchi CFU, perché non usarli?

ULTIMA NOTA PS il punto b) si poteva risolvere molto semplicemente notando che L deve essere pari all'aumento di energia potenziale gravitazionale del sistema.