UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dipartimento di Ingegneria e Architettura







Corso di MACCHINE [065IN]
Corso di MACCHINE MARINE [100IN]

Prof. Rodolfo Taccani
Prof. Lucia Parussini
Prof. Ronelly De Souza

A.A. 2026-2027

PERCORSO DELLA LEZIONE

1 Curve caratteristiche e obiettivo della similitudine

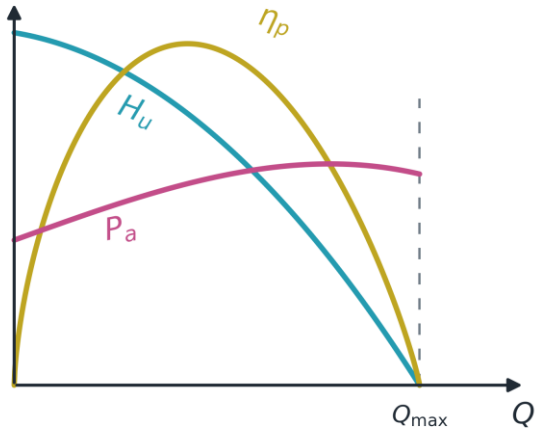
2 Analisi dimensionale e coefficienti adimensionali

3 Teorema Π di Buckingham e gruppi di similitudine

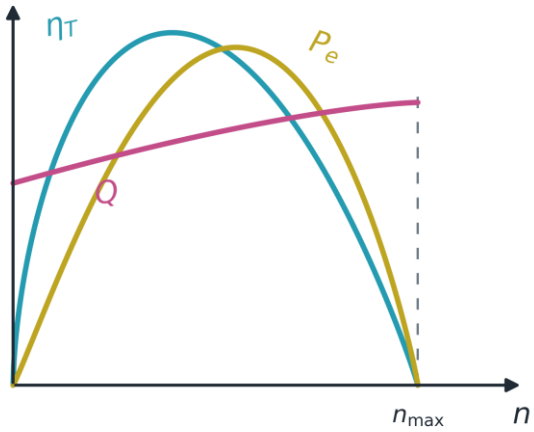
4 Regole di scala e punti di funzionamento corrispondenti

5 Velocità specifica, diagramma di Baljé e forma della girante

Curve caratteristiche di pompe e turbine



Curve caratteristiche di una pompa.



Curve caratteristiche di una turbina.

Adimensionalizzazione e analisi dimensionale

Adimensionalizzare trasformare le variabili del problema in grandezze prive di dimensioni dividendole per opportuni fattori di scala.

L'**analisi dimensionale**:

- individua le dipendenze tra grandezze fisiche e geometriche;
- richiede l'omogeneità dimensionale delle equazioni;
- permette di confrontare macchine di dimensioni e regimi diversi.

Vantaggi dell’analisi dimensionale

- Riduce il numero di variabili indipendenti del problema.
- Rende confrontabili ordini di grandezza molto diversi.
- Evidenzia i termini dominanti nelle equazioni.
- Nelle sperimentazione: riduce il numero di parametri da variare, riduce del numero di esperimenti da fare, possibilità di fare esperimenti significativi in scala ridotta

Similitudine geometrica, cinematica e dinamica

Due turbomacchine appartengono alla stessa famiglia quando sono:

- Geometricamente simili: stessi angoli palari e stessi rapporti tra le dimensioni.
- Cinematicamente simili: triangoli di velocità simili nei punti corrispondenti.
- Dinamicamente simili: stesso regime di moto, descritto dai parametri adimensionali rilevanti.

In queste condizioni le curve caratteristiche e i rendimenti risultano corrispondenti, entro le ipotesi del modello.

Coefficienti adimensionali delle turbomacchine

Coefficiente di portata

$$\varphi = \frac{Q}{nD^3}$$

Coefficiente di pressione o di lavoro

$$\psi = \frac{l}{n^2 D^2}$$

Coefficiente di potenza

$$\Pi = \frac{P}{\rho n^3 D^5}$$

Coefficiente di coppia

$$K_M = \frac{M}{\rho n^2 D^5}$$

Rapporto di velocità periferica

$$k_p = \frac{u}{\sqrt{2gH}}$$

Coefficiente propulsivo

$$K_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4}$$

Coefficiente di avanzamento

$$J = \frac{V}{nD}$$

Condizioni di similitudine e regole di scala

Due turbomacchine della stessa famiglia soddisfano contemporaneamente

$$\varphi_A = \varphi_B$$
$$\psi_A = \psi_B$$
$$\Pi_A = \Pi_B$$

Regole di similitudine

$$\frac{Q_A}{n_A D_A^3} = \frac{Q_B}{n_B D_B^3} \qquad \frac{Q_A}{Q_B} = \frac{n_A}{n_B}\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^3$$

$$\frac{l_A}{n_A^2 D_A^2} = \frac{l_B}{n_B^2 D_B^2} \qquad \frac{l_A}{l_B} = \left(\frac{n_A}{n_B}\right)^2\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^2$$

$$\frac{P_A}{\rho_A n_A^3 D_A^5} = \frac{P_B}{\rho_B n_B^3 D_B^5} \qquad \frac{P_A}{P_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B}\left(\frac{n_A}{n_B}\right)^3\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^5$$

Applicazione: dati delle due pompe

ESEMPIO

Pompa centrifugaA

$D_A = 600\ \text{mm}$

$n_A = 12.5 \frac{\text{giri}}{\text{s}} = 750 \frac{\text{giri}}{\text{min}}$

Q_A	H_A	η_A
0.0	40.0	0.00
0.1	40.4	0.40
0.2	40.6	0.57
0.3	40.0	0.69
0.4	38.7	0.78
0.5	36.0	0.83
0.6	32.0	0.83
0.7	25.6	0.75
0.8	16.0	0.53
0.9	4.0	0.15
0.93	0.0	0.00

Pompa centrifuga B

$D_B = 450\ \text{mm}$

$n_B = 20 \frac{\text{giri}}{\text{s}} = 1200 \frac{\text{giri}}{\text{min}}$

Le turbomacchine A e B sono della stessa famiglia.

- Ricavare le caratteristiche della pompa B.
- Calcolare i coefficienti adimensionali di portata e di pressione delle due pompe.

Trasferimento delle curve tra pompe simili

Utilizzando le relazioni per turbomacchine della stessa famiglia:

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{n_A}{n_B}\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^3$$

$$\frac{l_A}{l_B} = \frac{gH_A}{gH_B} = \frac{H_A}{H_B} = \left(\frac{n_A}{n_B}\right)^2\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^2$$

Pompa centrifuga A

$D_A = 600\ \text{mm}$

$n_A = 12.5\,\frac{\text{giri}}{\text{s}} = 750\,\frac{\text{giri}}{\text{min}}$

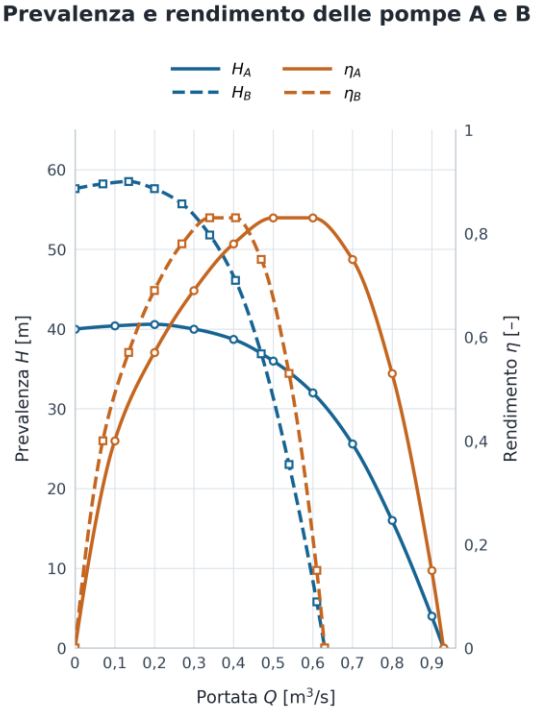
Q_A	H_A	η_A
0.0	40.0	0.00
0.1	40.4	0.40
0.2	40.6	0.57
0.3	40.0	0.69
0.4	38.7	0.78
0.5	36.0	0.83
0.6	32.0	0.83
0.7	25.6	0.75
0.8	16.0	0.53
0.9	4.0	0.15
0.93	0.0	0.00

Pompa centrifuga B

$D_B = 450\ \text{mm}$

$n_B = 20\,\frac{\text{giri}}{\text{s}} = 1200\,\frac{\text{giri}}{\text{min}}$

Q_B	H_B	η_B
0.0	57.6	0.00
0.07	58.2	0.40
0.135	58.5	0.57
0.20	57.6	0.69
0.27	55.7	0.78
0.34	51.8	0.83
0.405	46.1	0.83
0.47	36.9	0.75
0.54	23.0	0.53
0.61	5.8	0.15
0.63	0.0	0.00



Curve caratteristiche in forma adimensionale

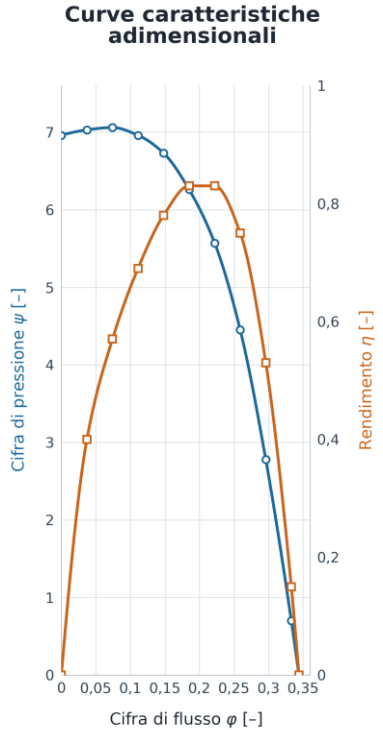
$$\varphi = \frac{Q}{nD^3}$$

$$\psi = \frac{l}{n^2D^2} = \frac{gH}{n^2D^2}$$

$$\varphi_A = \varphi_B \qquad \varphi_A = \frac{Q_A}{n_A {D_A}^3} \qquad \varphi_B = \frac{Q_B}{n_B {D_B}^3}$$

$$\psi_A = \psi_B \qquad \psi_A = \frac{gH_A}{{n_A}^2 {D_A}^2} \qquad \psi_B = \frac{gH_B}{{n_B}^2 {D_B}^2}$$

φ	ψ	η
0.0	6.96	0.00
0.037	7.03	0.40
0.074	7.06	0.57
0.111	6.96	0.69
0.148	6.73	0.78
0.185	6.26	0.83
0.222	5.57	0.83
0.259	4.45	0.75
0.296	2.78	0.53
0.333	0.70	0.15
0.344	0.0	0.00



Variabili che governano le prestazioni

$$f\left(D_i, L_j, \dot{m}, \omega, l, \mu, a_{01}, \rho_{01}\right) = 0$$

Categoria	Grandezze
Geometria	Diametri D_i e lunghezze L_j
Funzionamento	Portata massica $\dot{m}$,velocità angolare ω, lavoro l
Fluido	Viscosità μ, velocità del suono a_{01}, densità ρ_{01}

Teorema Π di Buckingham

Se una relazione fisica coinvolge n variabili dimensionali costruite con m dimensioni fondamentali, la relazione può essere riscritta mediante $(n-m)$ gruppi adimensionali π indipendenti.

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$$

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \dots \pi_{n-m}) = 0$$

Il teorema riduce il numero di variabili e identifica i parametri che devono coincidere tra modello e prototipo.

Applicazione del teorema Π alle turbomacchine

- Le prestazioni dipendono dalle grandezze geometriche, di funzionamento e del fluido.
- Le dimensioni fondamentali sono massa M, lunghezza L e tempo T.
- Come grandezze ripetute si scelgono diametro massimo della girante D, velocità angolare ω e densità del fluido nelle condizioni prefissate ρ_{01}.
- I gruppi risultanti descrivono geometria, portata, lavoro, viscosità e comprimibilità.

Rapporti geometrici: diametri

$$\pi_{D_i} = (D^x \omega^y \rho_{01}^z) D_i$$

$$L^0 T^0 M^0 = (L^x T^{-y} (M L^{-3})^z) L$$
$$L^0 T^0 M^0 = L^{x-3z+1} T^{-y} M^z$$

$$\begin{cases} L: x - 3z + 1 = 0 \\ T: -y = 0 \\ M: z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\pi_{D_i} = \frac{D_i}{D}$$

Rapporti geometrici: lunghezze

$$\pi_{l_j} = (D^x \omega^y \rho_{01}^z) L_j$$

$$L^0 T^0 M^0 = (L^x T^{-y} (M L^{-3})^z) L$$
$$L^0 T^0 M^0 = L^{x-3z+1} T^{-y} M^z$$

$$\begin{cases} L: x - 3z + 1 = 0 \\ T: -y = 0 \\ M: z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\pi_{l_j} = \frac{L_j}{D}$$

Cifra di flusso

Adimensionalizzazione della portata di massa

$$\varphi = (D^x \omega^y \rho_{01}^z)\dot{m}$$

$$L^0T^0M^0 = (L^xT^{-y}(ML^{-3})^z)MT^{-1}$$
$$L^0T^0M^0 = L^{x-3z}T^{-y-1}M^{z+1}$$

$$\begin{cases} L: x - 3z = 0 \\ T: -y - 1 = 0 \\ M: z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\dot{m}}{\rho_{01}\omega D^3}$$

CIFRA DI FLUSSO

Cifra di pressione o di lavoro

Adimensionalizzazione del lavoro unitario

$$\psi = (D^x \omega^y \rho_{01}^z) l$$

$$L^0 T^0 M^0 = (L^x T^{-y} (M L^{-3})^z) L^2 T^{-2}$$
$$L^0 T^0 M^0 = L^{x-3z+2} T^{-y-2} M^z$$

$$\begin{cases} L: x - 3z + 2 = 0 \\ T: -y - 2 = 0 \\ M: z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\psi = \frac{l}{\omega^2 D^2}$$

CIFRA DI PRESSIONE o DI LAVORO

Numero di Reynolds

Adimensionalizzazione della viscosità

$$\frac{1}{Re} = (D^x \omega^y \rho_{01}^z)\mu$$

$$L^0 T^0 M^0 = (L^x T^{-y} (M L^{-3})^z) M L^{-1} T^{-1}$$
$$L^0 T^0 M^0 = L^{x-3z-1} T^{-y-1} M^{z+1}$$

$$\begin{cases} L: x - 3z - 1 = 0 \\ T: -y - 1 = 0 \\ M: z + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$Re = \frac{\rho_{01} \omega D^2}{\mu}$$

NUMERO DI REYNOLDS

Numero di Mach palare

Adimensionalizzazione della velocità del suono

$$\frac{1}{Ma} = (D^x \omega^y \rho_{01}^z) a_{01}$$

$$L^0 T^0 M^0 = (L^x T^{-y} (M L^{-3})^z) L T^{-1}$$
$$L^0 T^0 M^0 = L^{x-3z+1} T^{-y-1} M^z$$

$$\begin{cases} L: x - 3z + 1 = 0 \\ T: -y - 1 = 0 \\ M: z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$Ma = \frac{\omega D}{a_{01}}$$

NUMERO DI MACH PALARE

Parametri adimensionali e condizioni di similitudine

Il legame funzionale può essere scritto in forma adimensionale:

$$\Phi\left(\pi_{D_i}, \pi_{l_j}, \varphi, \psi, Re, Ma\right) = 0$$

condizioni di similitudine due turbomacchine sono simili se hanno lo stesso valore di tutti i parametri adimensionali

Se le macchine sono geometricamente simili hanno lo stesso valore di π_{D_i}, π_{l_j}

A numeri di Reynolds sufficientemente elevati, variazioni moderate di Re possono avere effetti trascurabili sulle prestazioni

$$\psi = \Phi(\varphi, Ma)$$

Regole di scala per macchine idrauliche

$$\psi = \Phi(\varphi)$$

Per due macchine idrauliche geometricamente simili, lo stesso valore di φ e ψ individua punti di funzionamento corrispondenti.

$$\varphi = \frac{Q}{nD^3} \propto \frac{c_m}{u}$$

$$\psi = \frac{l_i}{n^2 D^2} \propto \frac{c_u}{u}$$

Nei punti corrispondenti restano simili i triangoli di velocità e, entro le ipotesi adottate, anche i rendimenti.

Portata: $Q \propto nD^3$

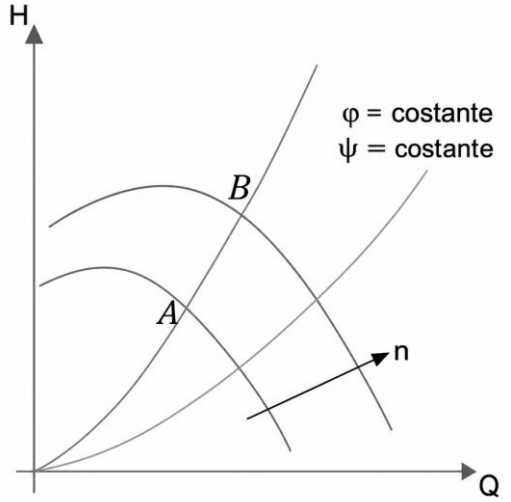
Prevalenza teorica o lavoro interno: $l_i \propto n^2 D^2$

Potenza interna: $P \propto \rho n^3 D^5$

Condizioni ai punti corrispondenti

$$\varphi_A = \varphi_B \qquad \varphi_A = \frac{Q_A}{n_A {D_A}^3} \qquad \varphi_B = \frac{Q_B}{n_B {D_B}^3}$$

$$\psi_A = \psi_B \qquad \psi_A = \frac{gH_A}{{n_A}^2 {D_A}^2} \qquad \psi_B = \frac{gH_B}{{n_B}^2 {D_B}^2}$$



Luoghi dei punti di funzionamento omologhi a φ e ψ costanti, per una stessa pompa al variare della velocità di rotazione

Punti di funzionamento corrispondenti

$$D_A = D_B \rightarrow \frac{Q_A}{Q_B} = \frac{n_A}{n_B}\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^3, \ \frac{H_A}{H_B} = \left(\frac{n_A}{n_B}\right)^2 \left(\frac{D_A}{D_B}\right)^2 \rightarrow \frac{H_A}{H_B} = \left(\frac{Q_A}{Q_B}\right)^2$$

$$D_A \neq D_B \rightarrow S_B = S_A \left(\frac{D_B}{D_A}\right)^2, u_B = u_A \left(\frac{n_B}{n_A}\right)\left(\frac{D_B}{D_A}\right)$$

$$Q = c_m S \rightarrow \frac{c_{m_A} S_A}{n_A {D_A}^3} = \frac{c_{m_B} S_B}{n_B {D_B}^3} \rightarrow c_{m_B} = c_{m_A} \frac{n_B {D_B}^3}{n_A {D_A}^3} \frac{S_A}{S_B}$$

$$\rightarrow c_{m_B} = c_{m_A} \frac{n_B {D_B}^3}{n_A {D_A}^3} \left(\frac{D_A}{D_B}\right)^2 = c_{m_A} \left(\frac{n_B}{n_A}\right)\left(\frac{D_B}{D_A}\right)$$

$$\rightarrow c_{m_B} = c_{m_A} \left(\frac{u_B}{u_A}\right)$$

Velocità specifica e diametro specifico

Velocità specifica o numero caratteristico

$$\omega_s = \omega \frac{\sqrt{Q}}{L^{3/4}} = \omega \frac{\sqrt{Q}}{(gH)^{3/4}}$$

Confronta macchine che forniscono la stessa prestazione adimensionale e sintetizza il rapporto tra velocità di rotazione, portata e salto.

Diametro specifico

$$D_s = D \frac{L^{1/4}}{\sqrt{Q}} = D \frac{(gH)^{1/4}}{\sqrt{Q}}$$

La coppia (ω_s, D_s) colloca il punto di progetto nel diagramma di Baljé. Per alcune turbine idrauliche si usa una definizione basata sulla potenza utile.

Applicazione al punto di progetto di una pompa

ESEMPIO

Consideriamo una pompa centrifuga con $n = 12.5\ giri/s$ e $D = 0.6\ m$ avente il punto di progetto, per cui il rendimento raggiunge il suo valore massimo, in corrispondenza di una portata $Q = 0.55\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ e di una prevalenza manometrica $H = 34\ \mathrm{m}$.

Calcoliamo la velocità specifica e il diametro specifico e rendimento in corrispondenza del punto di progetto:

$$\omega_s = 2\pi n \frac{\sqrt{Q}}{(gH)^{0.75}} = 0.75$$

$$D_s = D \frac{(gH)^{0.25}}{\sqrt{Q}} = 3.5$$

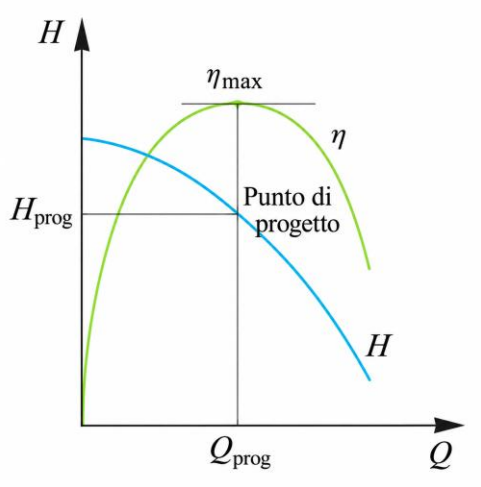
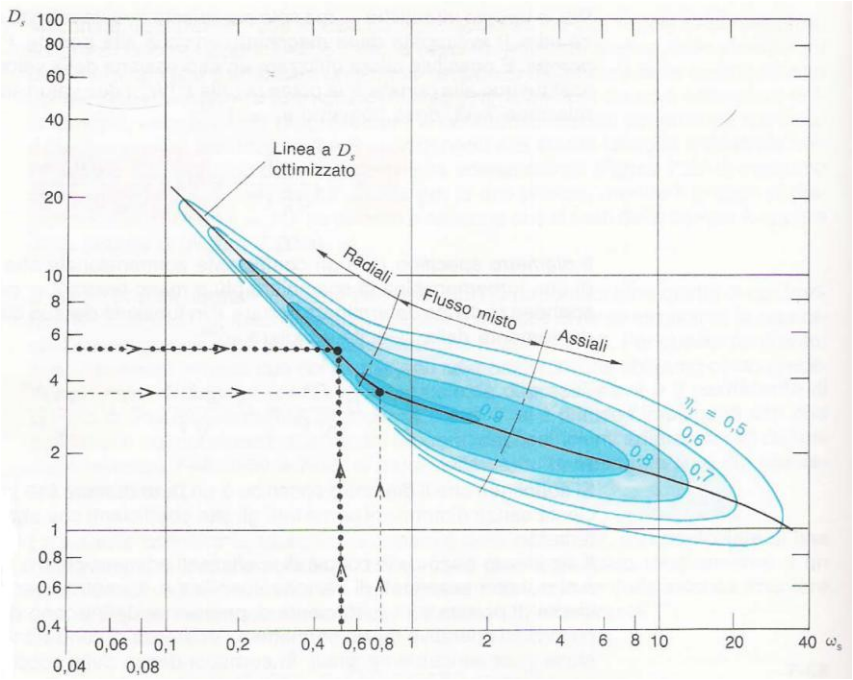


Diagramma di Baljé: rendimento e campo di impiego



$$\omega_s = 0.75$$
$$D_s = 3.5$$

Il rendimento idraulico nel punto di progetto sarà:
$$\eta_{y,max} > 0.9$$

Diagramma di Balje per pompe a un solo stadio con linee di uguale rendimento idraulico.

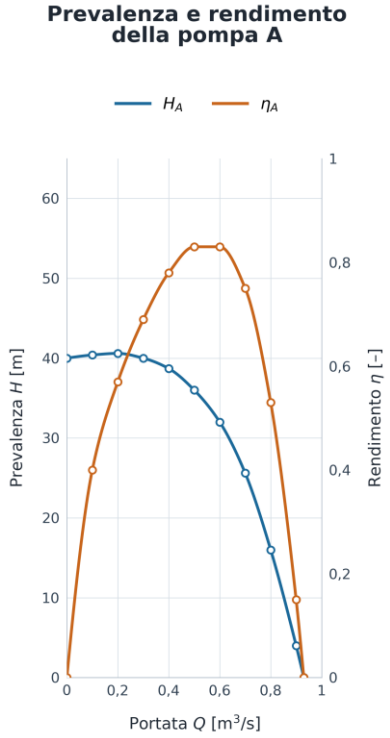
Da Applicazione: dati delle due pompe

Pompa centrifuga A

$$D_A = 600 \text{ mm}$$

$$n_A = 12.5 \frac{\text{giri}}{\text{s}} = 750 \frac{\text{giri}}{\text{min}}$$

Q_A	H_A	η_A
0.0	40.0	0.00
0.1	40.4	0.40
0.2	40.6	0.57
0.3	40.0	0.69
0.4	38.7	0.78
0.5	36.0	0.83
0.6	32.0	0.83
0.7	25.6	0.75
0.8	16.0	0.53
0.9	4.0	0.15
0.93	0.0	0.00



Prestazioni fuori progetto nel diagramma di Baljé

Per un nuovo punto di funzionamento fuori progetto con portata $Q = 0.3\ \mathrm{m}^3/s$ e prevalenza manometrica $H = 40\ \mathrm{m}$, si ha $\eta_y = 0.69$.

Calcoliamo la velocità specifica e il diametro specifico e rendimento in corrispondenza del punto di progetto di una nuova macchina:

$$\omega_s = 2\pi n \frac{\sqrt{Q}}{(gH)^{0.75}} = 0.5$$

$$D_s = D \frac{(gH)^{0.25}}{\sqrt{Q}} = 4.9 \approx 5$$

Dal diagramma di Balje :

$$\eta_y \approx 0.85$$

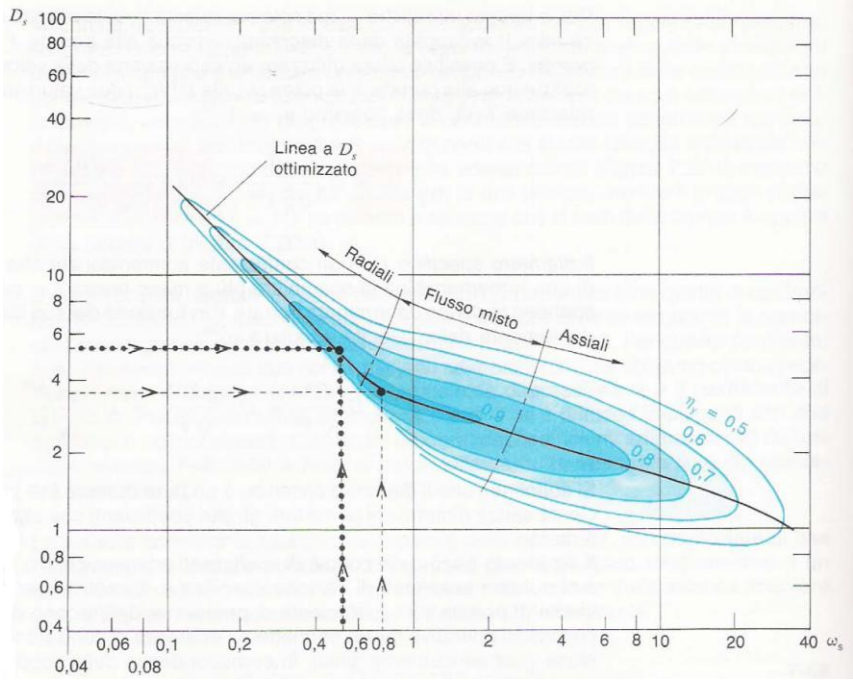


Diagramma di Balje per pompe a un solo stadio con linee di uguale rendimento idraulico.

Velocità specifica e tipologia di girante

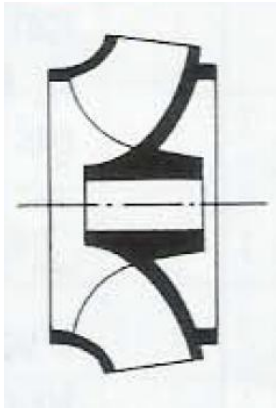
lenta (flusso radiale)



basse velocità di rotazione e/o basse portate e/o lavoro massico elevato

$\omega_s = 0.2 \div 0.6$

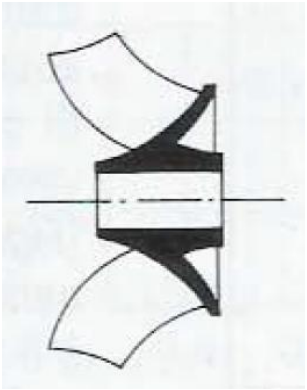
media (flusso radiale)



medie velocità di rotazione e/o medie portate e/o lavoro massico elevato

$\omega_s = 0.6 \div 1.2$

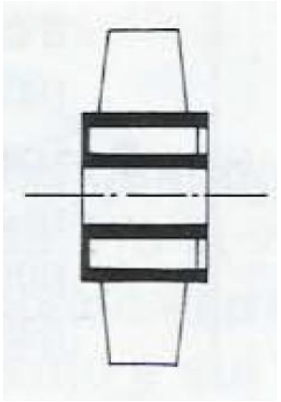
veloce (flusso misto)



alte velocità di rotazione e/o portate elevate e/o piccolo lavoro massico

$\omega_s = 1.0 \div 3.0$

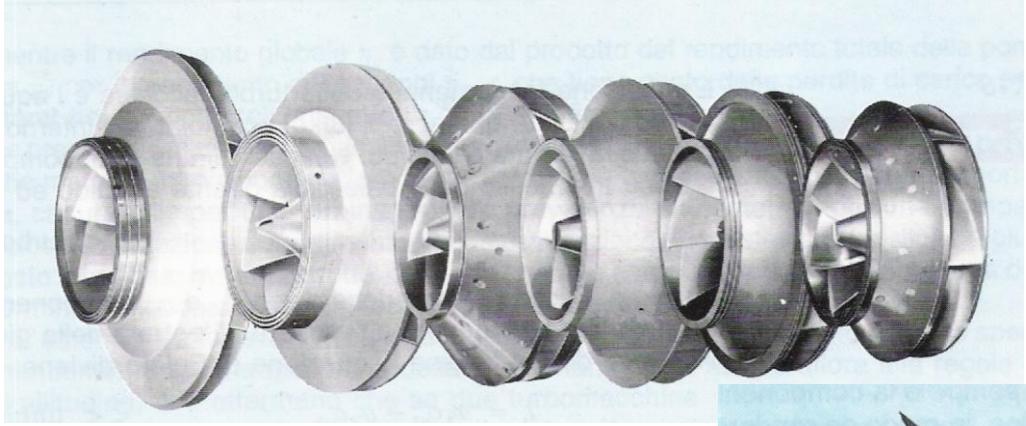
ultraveloce (flusso assiale)

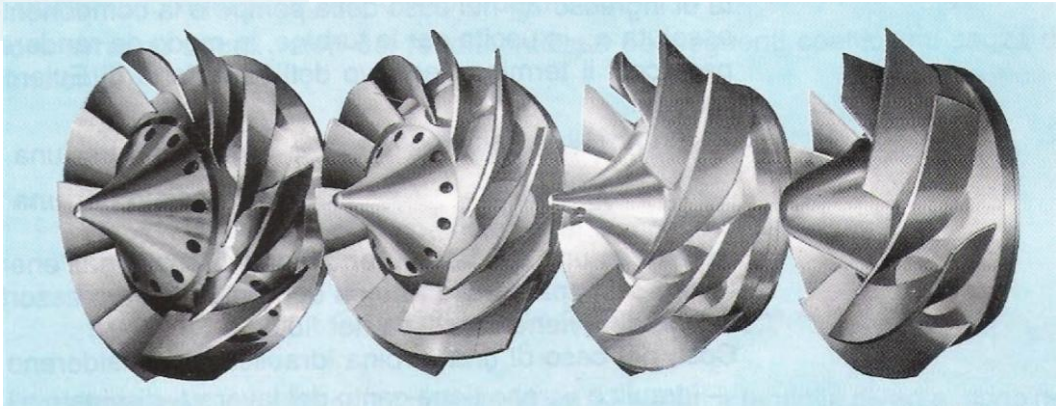


altissime velocità di rotazione e/o altissime portate e/o piccolo lavoro massico

$\omega_s = 2.0 \div 10$

Evoluzione della geometria con la velocità specifica





Sequenza di giranti a velocità specifica crescente.

Basse velocità specifiche: parzializzazione e multistadio

- A velocità specifica molto bassa, al di sotto di $\omega_s = 0.2$, il rendimento diminuisce sensibilmente.
- Nelle turbine idrauliche si può ricorrere alla parzializzazione della girante.
- Nelle turbine termiche la soluzione multistadio limita ventilazione e attrito nelle zone non alimentate.
- Nelle macchine operatrici più giranti in serie ripartiscono il lavoro e aumentano la velocità specifica del singolo stadio.

CONCETTI DA RICORDARE

Parametro	Significato fisico	Uso principale
φ	Cifra di flusso	Confronto delle portate nei punti corrispondenti
ψ	Cifra di pressione o di lavoro	Scala di prevalenza e lavoro massico
Re	Rapporto tra inerzia e viscosità	Verifica della similitudine viscosa
Ma	Rapporto tra velocità palare e suono	Valutazione degli effetti di comprimibilità
ω_s, D_s	Velocità e diametro specifici	Scelta della famiglia e della geometria della girante

La similitudine consente di trasferire le prestazioni tra macchine della stessa famiglia e di orientare la scelta della girante.

Bibliografia

Micheli D. Dispense del Corso di Macchine e di Macchine Marine.
Cornetti G. Macchine idrauliche. Ed. Il capitello (2015)
Seppo A. Korpela. Principles of Turbomachinery. Ed. Wiley (2019)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

SIMILITUDINE DELLE TURBOMACCHINE

Dai coefficienti adimensionali alla scelta della girante

Dipartimento di
Ingegneria e Architettura