UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di misure meccaniche, termiche e collaudi

Prof. Lucia Parussini
Prof. Ronelly De Souza
Prof. Rodolfo Taccani



a.a.2026-2027

Outline

- Introduzione alla probabilità

Introduzione alla probabilità

La **teoria della probabilità** si interessa dello studio di **fenomeni casuali o aleatori** (osservabili ma non prevedibili).

E *spazio degli eventi* o *spazio campionario:* insieme dei risultati
A *evento casuale*: sottoinsieme di E, costituito da una o più *modalità* soddisfacenti a determinate condizioni prefissate.

Un evento A si dice:

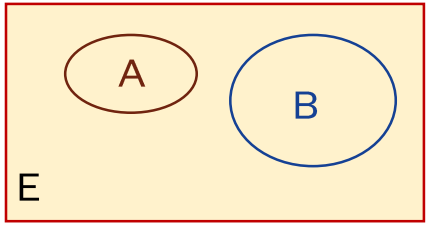
- ELEMENTARE se è costituito da un solo elemento
- CERTO se coincide con E
- IMPOSSIBILE se è l'insieme vuoto Ø

Esempio: Termometro da 0°C a 20°C con risoluzione pari a 2°C E={0°C, 2°C, 4°C, 6°C, 8°C, 10°C, 12°C, 14°C, 16°C, 18°C, 20°C}
«il risultato della misura è <5°C» A={0°C, 2°C, 4°C}
«il risultato della misura è tra 0° e 20°C» A=E (evento certo)
«il risultato della misura è 8°C» A={8°C} (evento elementare)
«il risultato della misura è 5°C» A=Ø (evento impossibile)

Introduzione alla probabilità

Eventi ***incompatibili (o disgiunti):*** se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro.

$$A \cap B = \emptyset$$

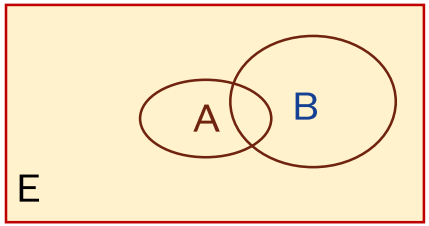


Esempio: l'apparizione simultanea di testa e di croce nel lancio di una moneta.

Osservazione: due eventi elementari sono sempre incompatibili!

Eventi ***compatibili:*** se il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro.

$$A \cap B \neq \emptyset.$$

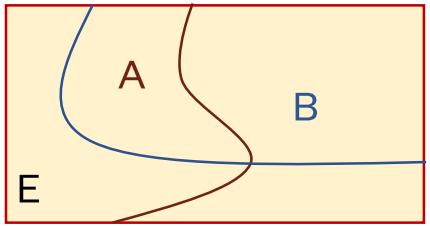


Esempio: Nel lancio del dado l'evento "esce faccia 3" è compatibile con l'evento "esce faccia dispari ".

Introduzione alla probabilità

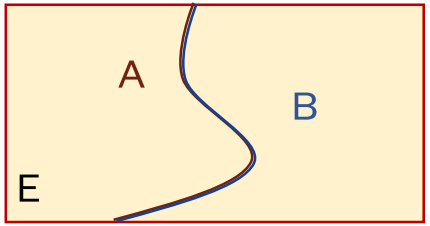
Due eventi A e B si dicono ***esaustivi*** se la loro unione genera l'intero spazio campionario.

$$A \cup B = E$$



Due eventi A e B si dicono ***complementari (o contrari)*** se sono disgiunti e la loro unione genera l'intero spazio campionario.

$$A \cup B = E \text{ e } A \cap B = \emptyset$$



Esempio: Consideriamo l'esperimento casuale lancio di un dado non truccato con spazio campionario E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

A = {1, 3, 5} e B = {2, 3, 4, 5, 6}, corrispondenti rispettivamente al caso in cui al lancio del dado escano i numeri dispari ed al caso in cui al lancio del dado escano i numeri maggiori di 1, sono esaustivi.

A = {1,3,5} e B = {2, 4, 6}, corrispondenti rispettivamente al caso in cui al lancio del dado escano i numeri dispari ed al caso in cui al lancio del dado escano i numeri dispari, sono complementari.

Introduzione alla probabilità

Gli n insiemi $A_1, A_{2,\dots}, A_n$ contenuti in E costituiscono una ***partizione*** di E se sono disgiunti e se la loro unione coincide con E.

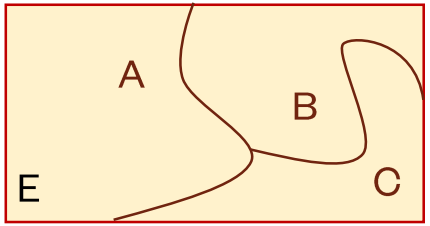
$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$$

e

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad \text{e} \quad A_1 \cap A_3 = \emptyset \quad \text{e} \ \dots \quad A_2 \cap A_3 = \emptyset \quad \text{e} \quad \dots A_{n-1} \cap A_n = \emptyset$$

Esempio: Consideriamo l'esperimento casuale lancio di un dado non truccato con spazio campionario E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

A = {1} , B = {3, 6} , C = {2, 4, 5} sono una partizione di E.



Introduzione alla probabilità

Due eventi si dicono ***indipendenti*** se il verificarsi dell'uno non influisce sul verificarsi dell'altro.

Due eventi si dicono ***dipendenti*** se il verificarsi dell'uno influisce sul verificarsi dell'altro.

Degli eventi casuali si dicono ***eventi equiprobabili*** in una data prova se la simmetria dell'esperimento permette di supporre che nessuno di essi sia più probabile di un altro.

Esempio: l'apparizione di una delle sei facce di un dado nel caso in cui questo sia regolare (non truccato).

Ci sono vari approcci al *concetto di probabilità*:

- Definizione classica - probabilità classica (o a priori, o matematica, o di Laplace)
- Definizione frequentista - probabilità frequentista (o a posteriori, o statistica, o legge empirica del caso)
- Definizione soggettivista
- Definizione assiomatica

Introduzione alla probabilità

Definizione classica

Se con a indichiamo il numero di elementi dell'insieme A e con n l'insieme degli elementi dell'insieme E, la probabilità dell'evento A si scrive:

$$p = \frac{a}{n}$$

con

$$0 \leq p \leq 1$$

dove 0 evento impossibile e 1 evento certo.

Esempi:

- Lancio della moneta E={testa, croce} : "nel lancio della moneta esce o testa o croce" A =E ={testa, croce} $p = \frac{2}{2} = 1$
- Termometro da 0°C a 20°C con risoluzione pari a 2°C E={0°C, 2°C, 4°C, 6°C, 8°C, 10°C, 12°C, 14°C, 16°C, 18°C, 20°C}
  «il risultato della misura è <5°C» A={0°C, 2°C, 4°C} $p = 3/11 = 0.27$

Introduzione alla probabilità

Definizione frequentista

Se indichiamo con m la frequenza assoluta dell'evento A e con N il numero totale di prove effettuate, definiamo frequenza relativa, o semplicemente frequenza:

$$f = \frac{m}{N}$$

con

$$0 \leq f \leq 1$$

$$\lim_{N \to \infty} f(N) = \lim_{N \to \infty} \frac{m}{N} \approx \frac{a}{n} = p$$

Introduzione alla probabilità

Definizione soggettivista

Per gli eventi casuali per i quali non è possibile determinare la probabilità che si verifichino a priori, perché non si conosce il valore di a, e nemmeno la frequenza, perché non sono noti m e N, la valutazione relativa al loro verificarsi è affidata alla stima soggettiva, spesso suggerita dall'esperienza personale o dall'intuizione, non necessariamente supportata da considerazioni oggettive, ma espressa tuttavia in modo coerente.

Il modello soggettivo esprime il grado di fiducia che si ha nella realizzazione di un evento.

Evento	Probabilità
E' impossibile che, non è vero che	0
E' quasi impossibile che, non credo che	0 ÷ 0.1
E' molto difficile che, è improbabile che	0,1 ÷ 0,2
E' difficile che, dubito	0,2 ÷ 0,3
E' alquanto difficile che	0,3 ÷ 0,4
E' un po' improbabile che	0,4 ÷ 0,5
Non saprei decidere tra il si e il no, forse	0,5
Ho una certa speranza che	0,5 ÷ 0,6
Ho buone speranze che	0,6 ÷ 0,7
E' probabile che	0,7 ÷ 0,8
E' molto probabile che	0,8 ÷ 0,9
Sono quasi certo che, quasi certamente	0,9 ÷ 1
E' certo che, è vero che	1

Introduzione alla probabilità

Definizione assiomatica

Sia E l'insieme dei risultati di un fenomeno casuale e A un evento, sottoinsieme di E.

La **probabilità dell'evento** A è la funzione $P(A)$ $(0 \leq P(A) \leq 1)$ che associa univocamente ad ogni sottoinsieme di E un numero reale $P(A)$.

Proprietà 1 $P(A) \geq 0 \quad \forall A$

Proprietà 2 $P(E) = 1$

Proprietà 3 Siano $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eventi casuali, sottoinsiemi di E, a due a due disgiunti.
La probabilità corrispondente alla loro unione è uguale alla somma delle singole probabilità, cioè

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

Si verifica facilmente che $P(\emptyset) = 0$.

Introduzione alla probabilità

Teorema della probabilità dell'evento complementare o contrario

Sia $\bar{A}$ evento complementare di A, allora si ha:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(E) = 1$$

Esempio: se la probabilità che esca la faccia 1 nel lancio di un dado è pari a 1/6, la probabilità che esca una qualsiasi delle altre facce è: 1-1/6=5/6.

Introduzione alla probabilità

Teorema della probabilità totale o di eventi incompatibili

Siano A_1 e A_2 due eventi incompatibili, allora si ha

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Esempio: consideriamo, nel caso del lancio del dado, il verificarsi degli eventi seguenti: esce la faccia 1, esce un numero pari. La probabilità dell'evento: "esce la faccia 1 oppure esce un numero pari", che corrisponde a quella dell'unione dei due insiemi, è data dalla somma delle due probabilità: 1/6+1/2=4/6=2/3.

Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ n eventi a due a due incompatibili, allora si ha

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Esempio: consideriamo, nel caso del lancio del dado, il verificarsi dell'evento: "esce la faccia 1 oppure la faccia 3 oppure esce un numero pari", la probabilità dell'evento è data dalla somma: 1/6 +1/6+1/2=5/6.

Introduzione alla probabilità

Teorema della probabilità di eventi compatibili

Siano A_1 e A_2 due eventi compatibili, allora

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

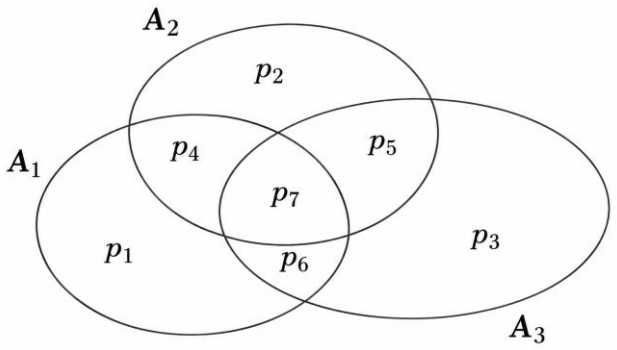
Esempio: consideriamo, nel caso del lancio del dado, il verificarsi degli eventi seguenti: esce la faccia 2, esce un numero pari. La probabilità dell'evento: "esce la faccia 2 oppure esce un numero pari", che corrisponde a quella dell'unione dei due insiemi, è data da: 1/6+1/2-1/6=1/2.

Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ n eventi compatibili, allora si ha

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

Teorema della probabilità di eventi compatibili

Esempio:



$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_{i=1}^{7} p_i$$

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + 2p_5 + 2p_6 + 3p_7$$

$$P(A_1 \cap A_2) + P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_3) = p_4 + p_5 + p_6 + 3p_7$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p_7$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Introduzione alla probabilità

Teorema della probabilità di eventi compatibili indipendenti

Siano A_1 e A_2 due eventi compatibili e indipendenti, la probabilità dell'evento composto è uguale a

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

Esempio: un banco di prova seleziona casualmente uno tra sei livelli di carico, tutti equiprobabili. La scelta del livello in ciascuna prova è indipendente da quella precedente. La probabilità che venga applicato il carico massimo in due prove consecutive è: (1/6) (1/6) = 1/36

Generalizzando: siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ n eventi compatibili e indipendenti, la probabilità dell'evento composto è uguale a:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

Osservazione: La probabilità dell'unione di due eventi indipendenti è data da:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2)$$

Introduzione alla probabilità

Teorema della probabilità di eventi compatibili dipendenti o della probabilità composta

Siano A_1 e A_2 due eventi compatibili e dipendenti, la probabilità dell'evento composto è uguale a

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$$

Esempio:
In un lotto sono presenti 10 componenti meccanici, 4 difettosi e 6 conformi alle specifiche. Si prelevano due componenti in successione, senza reintrodurre nel lotto il primo componente prelevato. Qual è la probabilità $P(A)$ che entrambi i componenti siano conformi?
L'evento A_1, «il primo componente prelevato è conforme», ha probabilità: $P(A_1) = 6/10$.
L'evento $A_2|A_1$ è «il secondo componente prelevato è conforme». Se si è verificato A_1, nel lotto rimangono 9 componenti, dei quali 5 conformi. Pertanto: $P(A_2|A_1) = 5/9$
L'evento A, «entrambi i componenti prelevati sono conformi», ha probabilità: $P(A) = (6/10)\ (5/9) = 1/3$.

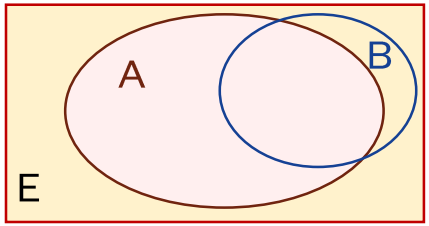
Introduzione alla probabilità

Probabilità condizionale

La probabilità condizionale di B dato A è il valore assunto dalla probabilità dell'evento B qualora si sappia che si è verificato l'evento A.

Sapendo che l'evento A si è verificato, concludiamo che il risultato del nostro esperimento deve essere un elemento del sottoinsieme A di E. Quindi la valutazione della nuova probabilità di B deve tenere conto dei soli risultati che sono presenti sia nel sottoinsieme A che nel sottoinsieme B, vale a dire nel sottoinsieme di E ottenuto intersecando i due sottoinsiemi A e B.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Teorema di Bayes

Consideriamo una partizione $A_1, A_{2,\dots}, A_n$ di E. Sia inoltre B un evento di E. La formula di Bayes è:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

essendo la probabilità composta

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i) \quad \forall i = 1,2,\dots,n$$

e $P(B)$, probabilità totale

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)$$

con gli eventi $A_1 \cap B$,$A_2 \cap B$, … , $A_n \cap B$ una partizione di B

Introduzione alla probabilità

Esempio:
In un lotto di componenti meccanici, 1 componente su 100 presenta una cricca interna. Un test a ultrasuoni dà esito positivo nel 98% dei casi sui componenti che presentano effettivamente una cricca e nello 0,5% dei casi sui componenti privi di cricche.
Un componente viene scelto casualmente dal lotto e sottoposto al test, che dà esito positivo. Qual è la probabilità che il componente presenti davvero una cricca interna?

A_1 indica che il componente presenta una cricca, A_2 che è privo di cricche e B che il test è positivo
$P(A_1|B)$ probabilità che componente sia criccato posto che il test sia positivo
$P(A_1) = 1/100$ probabilità che il componente presenti una cricca
$P(B|A_1) = 98/100$ probabilità di esito positivo su un componente criccato
$P(A_2) = 99/100$ probabilità che il componente sia privo di cricche
$P(B|A_2) = 5/1000$ probabilità di esito positivo su un componente privo di cricche: **falso positivo**
$P(B)$ probabilità totale che il test dia esito positivo

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{\frac{1}{100}\frac{98}{100}}{\frac{1}{100}\frac{98}{100} + \frac{99}{100}\frac{5}{1000}} = 66.4\%$$

Introduzione alla probabilità

Esempio: Una macchina presenta un malfunzionamento dovuto al guasto di uno di due cuscinetti, A oppure B. Si assume che uno solo dei due sia guasto e che, prima delle misurazioni, le due ipotesi siano ugualmente probabili.
Per individuare il cuscinetto guasto, si misura l'ampiezza delle vibrazioni in una determinata banda di frequenza. Da precedenti prove sperimentali è noto che l'ampiezza supera una soglia prefissata nell'80% dei casi in cui è guasto il cuscinetto A e nel 50% dei casi in cui è guasto il cuscinetto B. La misurazione effettuata sulla macchina mostra un'ampiezza superiore alla soglia.
Alla luce di questo risultato, qual è la probabilità che sia guasto il cuscinetto A? E che sia guasto il cuscinetto B?

Sappiamo:
$P(A) = P(B) = 0.50$ (probabilità che A sia guasto uguale alla probabilità che B sia guasto: 1/2)
$P(test|A) = 0.80$ (probabilità che il test sia positivo posto che A sia guasto)
$P(test|B) = 0.50$ (probabilità che il test sia positivo posto che B sia guasto)

Allora:
$P(test|A)P(A) + P(test|B)P(B) = 0.8\ 0.5 + 0.5\ 0.5 = 0.65$

probabilità che A sia guasto posto che il test sia positivo
$P(A|test) = P(test|A)P(A) / [\ P(test|A)P(A) + P(test|B)P(B)\ ] = 0.8\ 0.5 / 0.65 = 0.6 = 60\%$
probabilità che B sia guasto posto che il test sia positivo
$P(B|test) = P(test|B)P(B) / [\ P(test|A)P(A) + P(test|B)P(B)\ ] = 0.5\ 0.5 / 0.65 = 0.4 = 40\%$

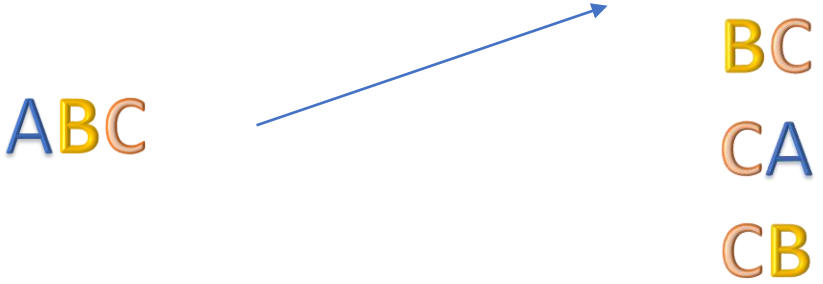
Richiami di calcolo combinatorio

Disposizioni semplici

Il numero di disposizioni semplici di n oggetti presi a k a k, con $0 < k \leq n$, è dato da

$$D_{n,k} = D_{n,k-1}(n-k+1) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Esempio: n=3, k=2



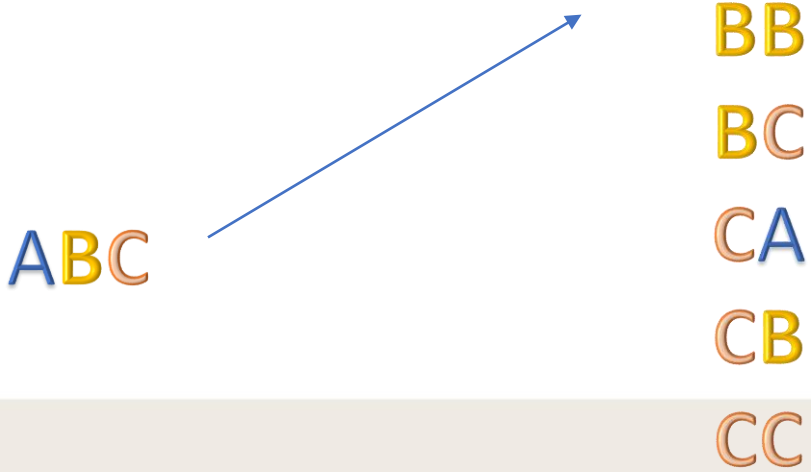
Richiami di calcolo combinatorio

Disposizioni con ripetizione

Nel caso in cui sia consentito ad un oggetto di figurare nei gruppi più di una volta, si parla di disposizioni con ripetizione. Sono disposizioni con ripetizione di classe k i raggruppamenti ottenibili da n oggetti distinti presi a k a k, in cui ogni oggetto può essere ripetuto fino a k volte:

$$D'_{n,k} = n^k$$

Esempio: n=3, k=2



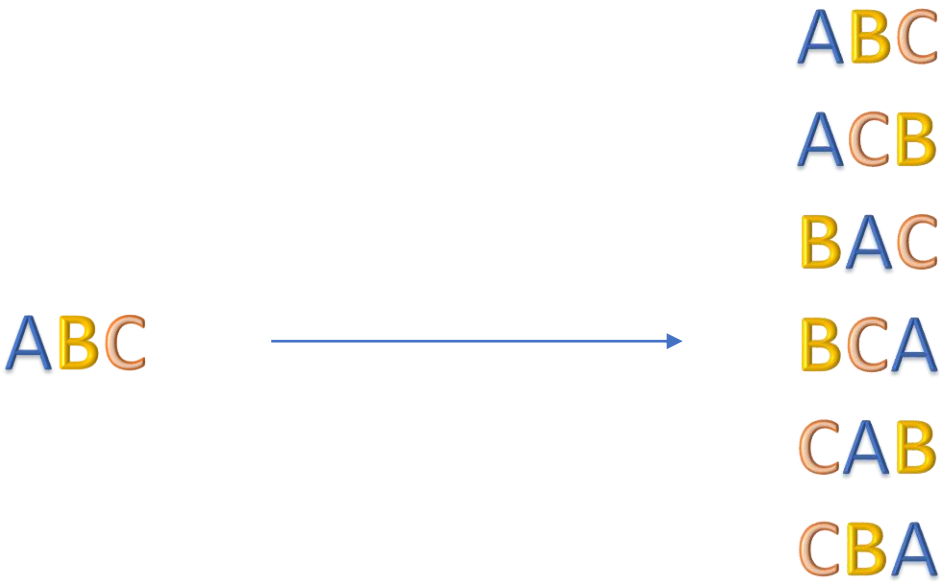
Richiami di calcolo combinatorio

Permutazione semplice

Definiamo le *permutazioni semplici* di n oggetti come le disposizioni semplici degli n oggetti, presi a n a n

$$P_n = D_{n,n} = n!$$

Esempio: n=3



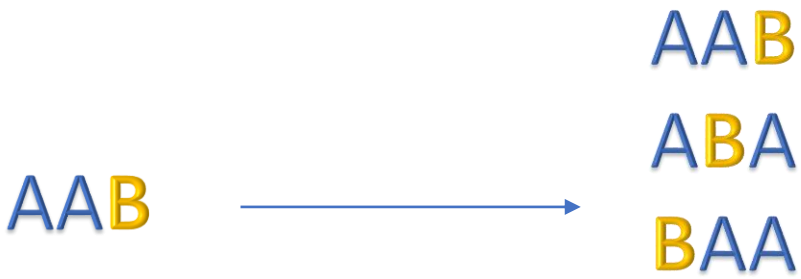
Richiami di calcolo combinatorio

Permutazione con ripetizioni

Il numero di permutazioni di n oggetti in cui uno o più elementi sono ripetuti più volte ($r, s, t, \ldots$ volte) è dato dal rapporto tra il numero di permutazioni semplici degli n oggetti e quello delle permutazioni semplici degli $r, s, t, \ldots$ oggetti:

$$P_n^{(r,s,t,\ldots)} = \frac{P_n}{P_r \cdot P_s \cdot P_t \cdot \cdots} = \frac{n!}{r!\, s!\, t! \ldots}$$

Esempio: n=3, r=2



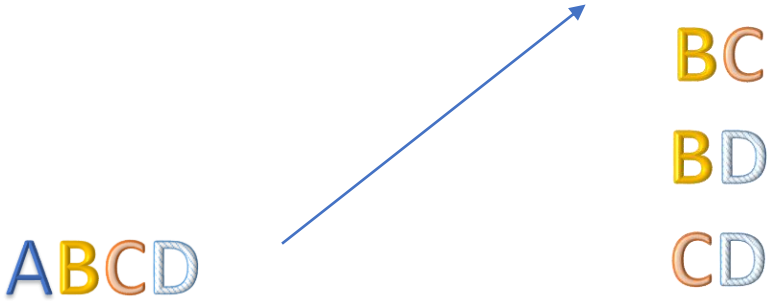
Richiami di calcolo combinatorio

Combinazione semplice

Chiamiamo *combinazioni semplici* di n oggetti distinti presi a k a k (con $k \leq n$) tutti i gruppi contenenti k oggetti realizzabili con gli n oggetti dati, in modo tale che due gruppi qualsiasi differiscano tra loro per almeno un oggetto

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{P_n}{P_{n-k}P_k}$$

Esempio: n=4, k=2



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

Dipartimento di
Ingegneria
e Architettura