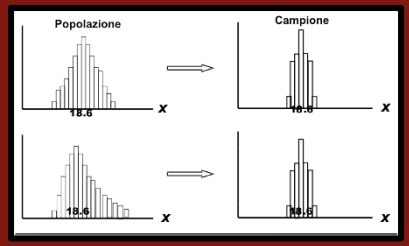
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di misure meccaniche, termiche e collaudi

Prof. Lucia Parussini
Prof. Ronelly De Souza
Prof. Rodolfo Taccani



a.a.2026-2027

Outline

- Disuguaglianza di Markov
- Disuguaglianza di Chebyshev
- Legge dei Grandi Numeri
- Teorema del Limite Centrale

Dal problema di misura alla statistica

Ripetiamo la lettura di una temperatura in regime stabile.

$$\mu = 80\ °\mathrm{C} \quad \sigma = 3\ °\mathrm{C}$$

Domanda pratica	Strumento
Quanto può discostarsi una lettura dalla media?	Markov / Chebyshev
La media si stabilizza aumentando le letture?	Legge dei Grandi Numeri
Come varia la media fra serie ripetute?	Teorema del Limite Centrale

Scopo: collegare ogni risultato statistico a una domanda della prova.

Distinguiamo il modello dai dati

Le formule descrivono un modello; la prova produce dati e stime.

Quantità	Nel modello	Dai dati
Media	μ centro teorico	$\overline{x}$ media osservata
Scarto tipo delle letture	σ dispersione teorica	s dispersione osservata

Una statistica calcolata sul campione è una stima del parametro del modello.

Diseguaglianza di Markov

Ipotesi: $Y \geq 0 \rightarrow P(Y \geq 0) = 1$, valore atteso finito e soglia positiva.

$$\mathrm{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}[Y]}{a} \qquad \forall a > 0$$

Esempio ampiezza vibratoria

$$\mathrm{E}[Y] = 0{,}20 \text{ mm/s} \qquad a = 1{,}00 \text{ mm/s}$$

$$\mathrm{P}(Y \geq 1{,}00) \leq \frac{0{,}20}{1{,}00} = 20\%$$

La diseguaglianza di Markov stabilisce un limite usando la sola media.
È un **limite conservativo**, valido per una variabile non negativa.

Diseguaglianza di Chebyshev

Ipotesi: media μ e varianza finita σ^2.

$$\mathrm{P}(|X-\mu| \geq \Delta) \leq \frac{\sigma^2}{\Delta^2}$$

Dimostrazione $Y = [X-\mu]^2$ soddisfa l'ipotesi della disuguaglianza di Markov, quindi $P(Y \geq \Delta^2) \leq E(Y)/\Delta^2$. Poichè $E(Y) = E\{[X-\mu]^2\} = \sigma^2$ segue che $P([X-\mu]^2 \geq \Delta^2) \leq \sigma^2/\Delta^2$, da cui la diseguaglianza di Chebyshev.

Esempio Temperatura: scarto ammesso di 9 °C dalla media di 80 °C.

$$\mathrm{P}(|X-80| \geq 9) \leq \frac{3^2}{9^2} = \frac{1}{9} \approx 11{,}11\%$$

La disuguaglianza di Chebyshev fornisce un limite superiore alla probabilità che una lettura si discosti dalla media di almeno un valore prefissato. **Vale per qualsiasi forma della distribuzione, purché la varianza sia finita.**

Chebyshev e normale: quanto valgono le code?

Probabilità di una lettura distante dalla media almeno:

Soglia	Chebyshev: al massimo	Normale: circa
1 scarto tipo	100%	31,73%
2 scarti tipo	25,00%	4,55%
3 scarti tipo	11,11%	0,27%

Il modello normale usa informazioni aggiuntive sulla distribuzione.

Tre scarti tipo non contengono sempre il 99,7% dei valori.

Valore atteso e varianza della media di una serie di osservazioni

Tre serie di quattro letture, nello stesso regime.

Serie	Letture (°C)	Media (°C)
A	78; 80; 83; 79	80,0
B	81; 84; 79; 82	81,5
C	77; 80; 79; 82	79,5

X_i: una lettura.

$\overline{X}_n$: una media da una serie.

Ripetendo l'intera serie si ottengono medie diverse, con una loro dispersione.

Valore atteso e varianza della media di una serie di osservazioni

Letture indipendenti e con la stessa distribuzione (i.i.d.).

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\mathrm{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mu \qquad \mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

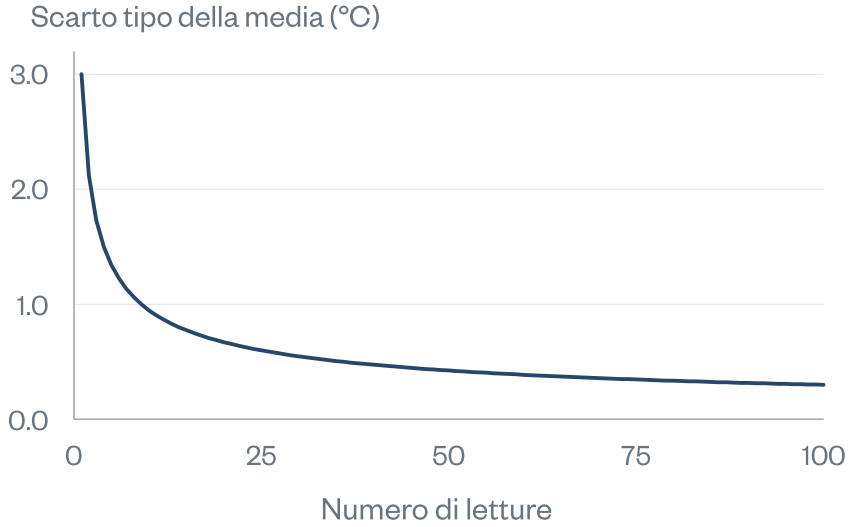
La formula vale anche senza normalità.

Per dimezzare la dispersione della media, quadruplicare le osservazioni.

Il costo di una media meno dispersa

$$\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \sigma = 3\ °C$$

Numero di letture	Scarto tipo della media
1	3,00 °C
4	1,50 °C
25	0,60 °C
100	0,30 °C



Dimezzare la dispersione della media richiede quattro volte le letture.

Quante osservazioni servono? Un confronto

Numero minimo di osservazioni

Per la media: $\sigma = 3\ °C, \Delta = 1\ °C$, rischio di superamento 1%.

Distribuzione non specificata

$$\frac{9}{n} \leq 0{,}01$$

$$n \geq 900$$

Numero sufficiente (conservativo).

Letture normali

$$n \geq \left(\frac{2{,}576 \cdot 3}{1}\right)^2$$

$$n \geq 60$$

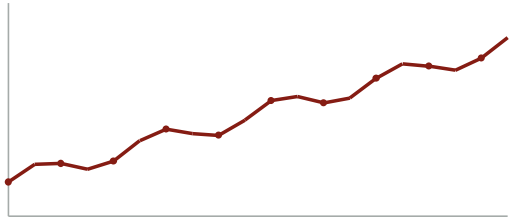
Arrotondamento per eccesso.

Un modello più informativo può ridurre il numero di ripetizioni.

Le ipotesi da controllare sul banco

Regime stabile

Schema: deriva



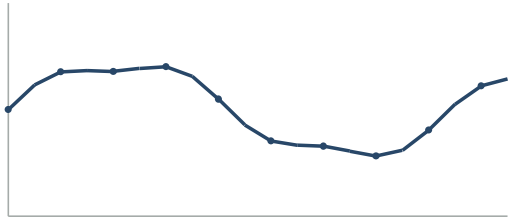
Tempo →

La media non deve cambiare durante la serie.

Controlla la sequenza temporale.

Letture indipendenti

Schema: correlazione



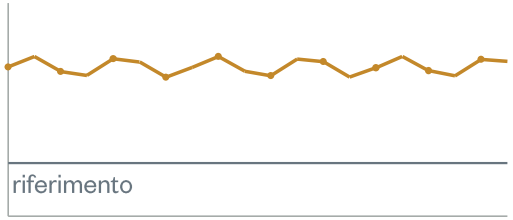
Tempo →

Letture molto ravvicinate possono essere correlate.

Controlla il passo di acquisizione.

Scostamento comune

Schema: scostamento comune



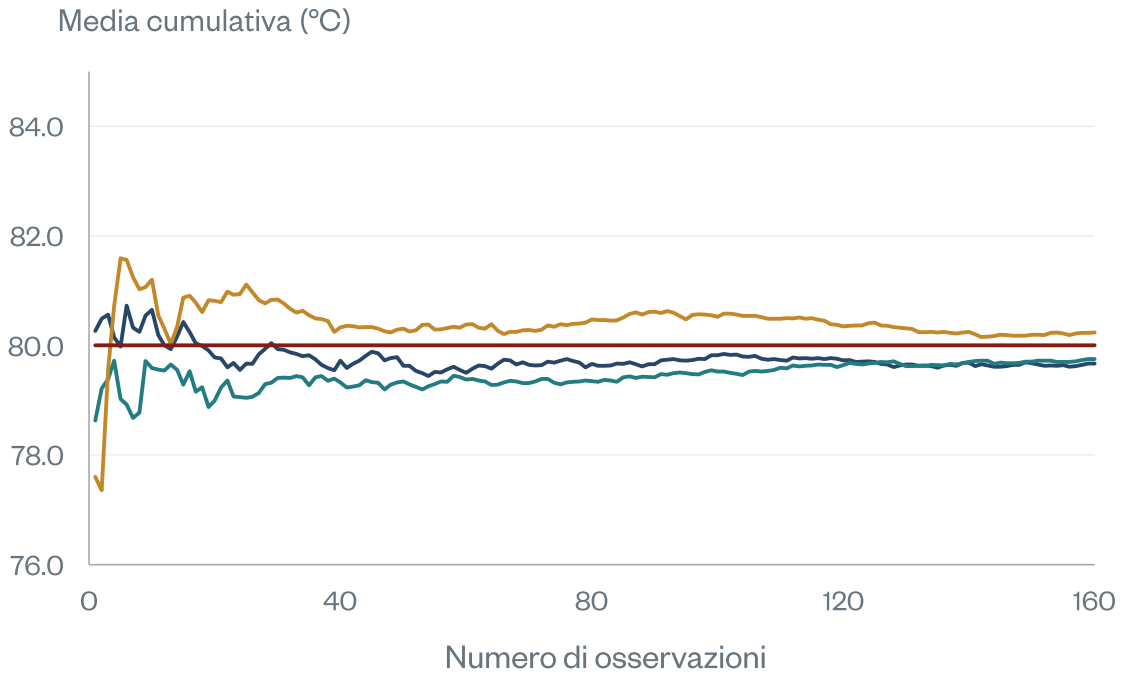
Tempo →

Una media stabile può restare spostata dal riferimento.

Confronta con un riferimento.

Stabilità, dipendenza e scostamenti comuni vanno controllati nella prova.

Legge dei Grandi Numeri: dove tende la media



$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

in probabilità

La media può oscillare mentre si stabilizza.

Linea rossa: media del modello.

La LGN dice dove tende la media, non descrive la forma della distribuzione.

Teorema del Limite Centrale: la forma delle medie

Ipotesi: letture i.i.d., media finita e varianza finita e positiva.

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1)$$

Per un numero di letture adeguato al modello:

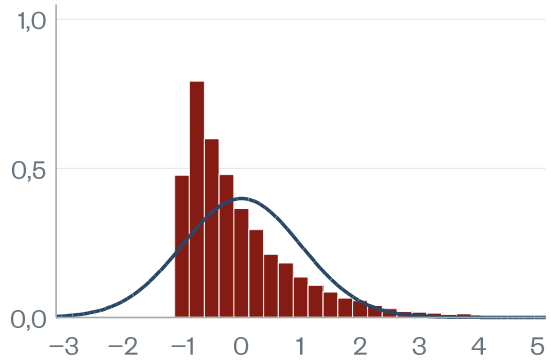
$$\overline{X}_n \approx \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Il TLC descrive le medie, non rende gaussiane le letture originali.

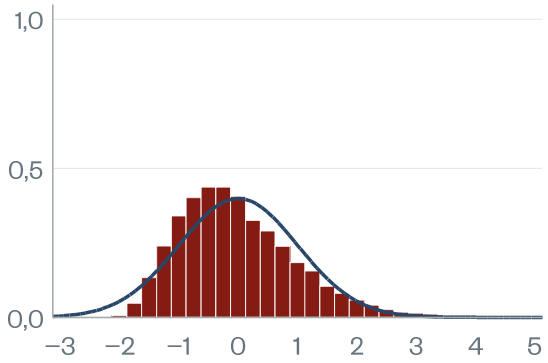
Medie di letture asimmetriche

Stesso modello di partenza; cambia il numero di letture per serie.

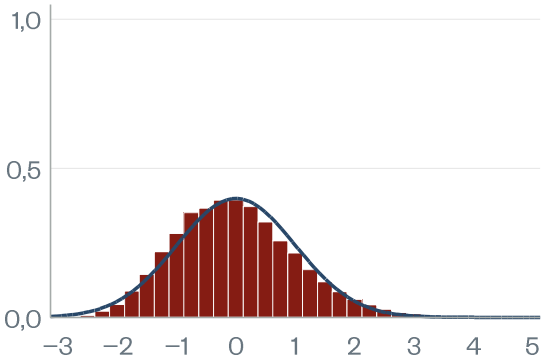
$n = 1$



$n = 5$



$n = 30$



Rosso: medie standardizzate simulate. Blu: normale standard.

30 osservazioni non sono una soglia universale per applicare il TLC.

LGN e TLC: due domande diverse

Domanda	Legge dei Grandi Numeri	Teorema del Limite Centrale
Che cosa descrive?	Dove tende la media	La forma delle medie standardizzate
Uso pratico	Giustificare una stima che si stabilizza	Approssimare probabilità e intervalli per la media
	$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$	$Z_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1)$

La riduzione della varianza della media vale già prima di applicare il TLC.

Intervallo per la media: z oppure t

L'obiettivo è stimare la media della popolazione, con confidenza 95%.

Scarto tipo σ noto

$$\overline{x} \pm z_{0,975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$z_{0,975} \approx 1{,}960$$

σ ignoto: lo stimiamo con s

$$\overline{x} \pm t_{0,975;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$t_{0,975;9} \approx 2{,}262$$

Con letture indipendenti normali: copertura esatta.

Con altri modelli: verificare l'adeguatezza dell'approssimazione.

L'intervallo stima la media della popolazione, non le singole letture.

Esempio: stima della durata media dei cuscinetti

$$n = 100 \qquad \overline{x} = 5.7 \text{ anni} \qquad s = 0.8 \text{ anni}$$

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}8}{\sqrt{100}} = 0{,}08 \text{ anni}$$

Livello	t (99 gradi di libertà)	Intervallo per la media
95%	1.984	[5.54; 5.86] anni
99%	2.626	[5.49; 5.91] anni

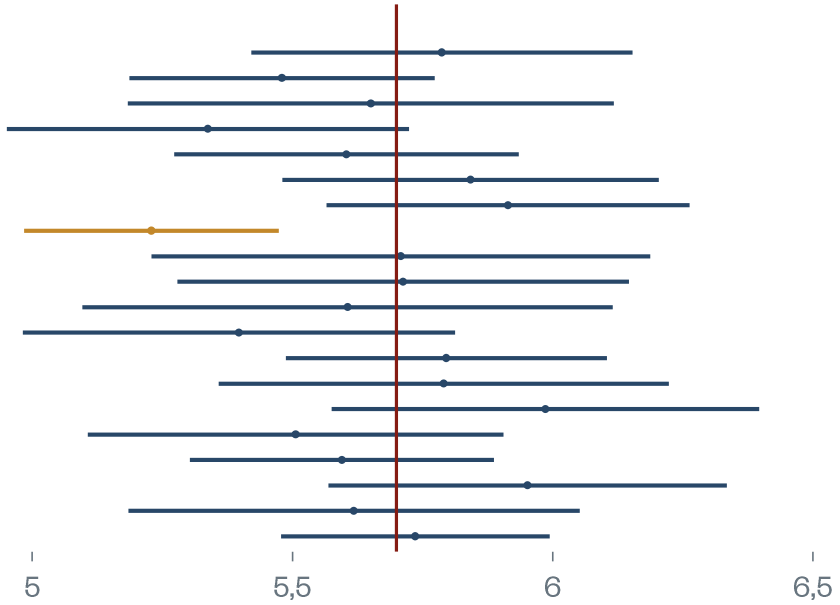
Calcolo illustrativo: unità indipendenti, durate complete, modello da verificare.

Più confidenza richiede un intervallo più ampio, a parità di campione.

Che cosa significa «confidenza 95%»?

Ogni linea: un nuovo campione.

$\mu = 5.7$



La media della popolazione resta fissa.

Gli estremi dell'intervallo cambiano con il campione.

Su molte prove, circa il 95% degli intervalli copre la media.

Il 95% descrive la copertura del metodo; non la quota di singoli valori nell'IC.

Concetti da portare sul banco di prova

Domanda della prova	Risultato utile
Quanto può essere grande uno scarto?	Markov / Chebyshev
Quante letture rendono la media meno dispersa?	Varianza della media e scelta di n
Dove tende la media e che forma assume?	LGN e TLC
Il requisito riguarda la media o ogni pezzo?	Interpretare l'IC e il requisito

Una media precisa non garantisce che tutti i pezzi rispettino una specifica.

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

Dipartimento di
Ingegneria
e Architettura

A1 · Dimostrazione della diseguaglianza di Markov

Se X è discreta: indichiamo con k l'indice per cui $x_{k-1} < z$ e $x_k \geq z$, allora

$$E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = \sum_{i<k} x_i f(x_i) + \sum_{i \geq k} x_i f(x_i)$$

$$E(X) \geq \sum_{i \geq k} x_i f(x_i) \geq \sum_{i \geq k} z f(x_i) = z \sum_{i \geq k} f(x_i) = zP(X \geq z)$$

Se X è continua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{z} x f(x) dx + \int_{z}^{+\infty} x f(x) dx =$$

$$= \int_{0}^{z} x f(x) dx + \int_{z}^{+\infty} x f(x) dx \geq \int_{z}^{+\infty} x f(x) dx \geq \int_{z}^{+\infty} z f(x) dx = z \int_{z}^{+\infty} f(x) dx = zP(X \geq z)$$

A2 · Valore atteso e varianza della media di una serie di osservazioni

Ricordiamo che

$$E(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + \cdots + a_nE(X_n)$$
$$Var(aX) = a^2Var(X)$$

quindi

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}[E(X_1) + \cdots + E(X_n)] = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

$$Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

La variabile casuale $\bar{X}_n$ è caratterizzata da una densità di probabilità diversa da quella di cui le singole variabili casuali $X_1, \ldots, X_n$ costituiscono un campione casuale.

A3 · Dimostrazione della Legge dei Grandi Numeri

Per ogni n finito,

$$E(\bar{X}_n) = \mu \quad \text{e} \quad Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Applicando la disuguaglianza di Chebyshev:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) = 1 \quad \text{equivalente a} \quad \bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu \quad \text{per } n \to \infty.$$

A4 · Da t all'intervallo di confidenza

Letture i.i.d. normali, σ ignoto e $n \geq 2$.

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Quantile al 97,5%

$$t^* = t_{0,975;n-1}$$

$$\mathrm{P}(-t^* \leq T \leq t^*) = 0{,}95$$

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}_n - t^* \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + t^* \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$$

La copertura riguarda gli intervalli che cambiano da campione a campione.