



§ 3. Ipersuperfici algebriche: affini & proiettive

Un'idea della
geometria algebrica:



§ 3.1. Il caso affine

(DEF) Una CURVA ALGEBRICA PIANA AFFINE è una coppia

definita da "n-1 funzioni
indipendenti in $\dim=n$ "

definita da POLINOMI

su $A_{\mathbb{K}}^n$

in uno spazio di $\dim=2$

→ IPERSUPERFICI:

un polinomio e n variabili
vedi NOTE per VOCABOLARIO

$$\mathcal{C} = (Z(f), f)$$

Il LUOGO DEGLI ZERI di f :

$$Z(f) := \{P \in A_{\mathbb{K}}^2 \mid f(P) = 0\}$$

detto anche SUPPORTO della curva $\mathcal{C}$.

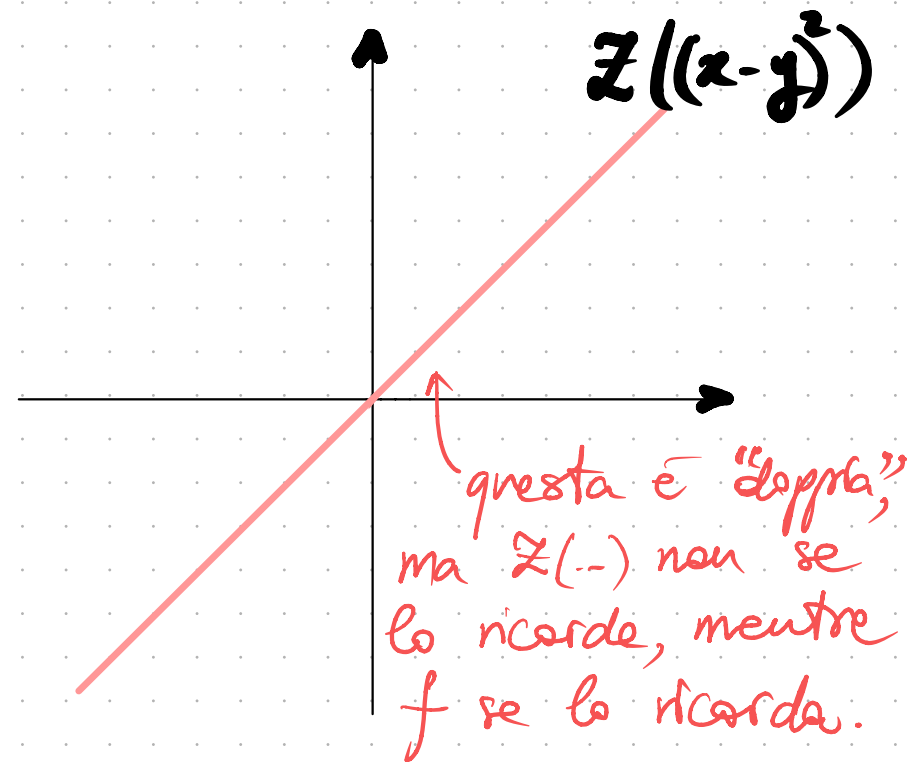
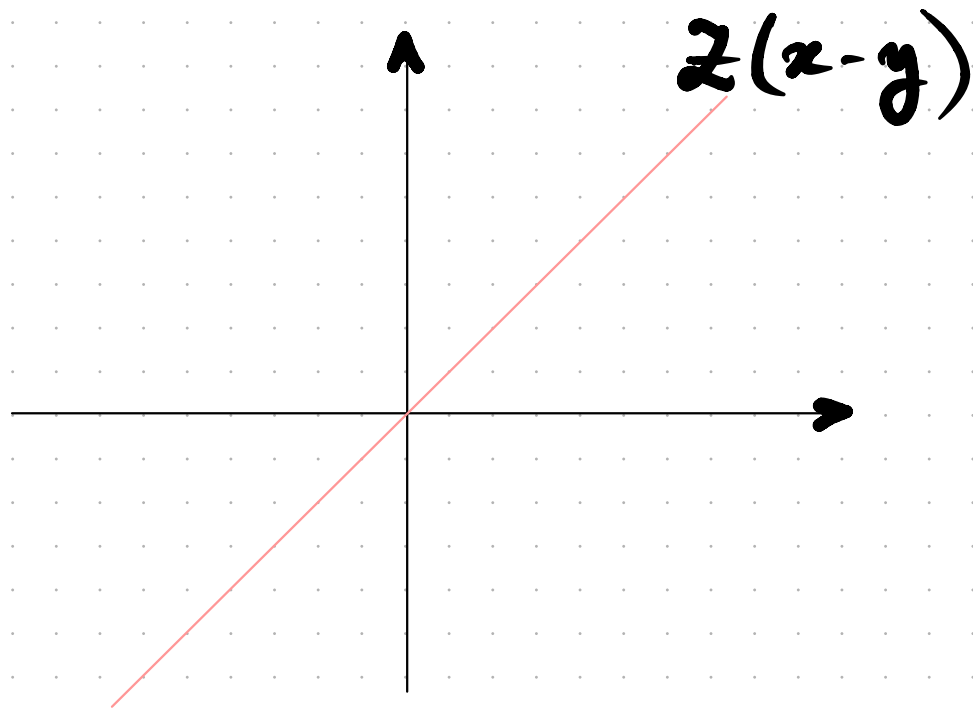
$f \in \mathbb{K}[x, y]$, $\deg(f) \geq 1$
il polinomio che definisce
la curva

$$\deg(\mathcal{C}) := \deg(f)$$

Q.: Perché non possiamo semplicemente dire: $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{Z}(f)$?

Controesempio: $\mathbb{Z}(x-y) = \mathbb{Z}((x-y)^2) = \mathbb{Z}((x-y)^5)$

ma sono polinomi diversi, di gradi diversi! Quindi ci vogliamo ricordare non solo il supporto, ma anche il polinomo. Cambra la "multiplicità".



DEF $f \in \mathbb{K}[x, y] \Rightarrow$ decompongo in irriducibili $f = f_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot f_r^{\mu_r} \Rightarrow$

$\mathcal{C}_i := (\mathcal{Z}(f_i), f_i)$ sono dette **COMPONENTI IRRIDUCIBILI** di $\mathcal{C} = (\mathcal{Z}(f), f)$, di molteplicità μ_i .

• **$\mathcal{C}$ IRRIDUCIBILE** $\Leftrightarrow r = 1$

• **$\mathcal{C}$ RIDOTTA** $\Leftrightarrow \mu_i = 1 \ \forall i \Leftrightarrow f$ **RIDOTTO**

• **$\mathcal{C}$ INTEGRALE** $\Leftrightarrow r = 1 \wedge \mu_1 = 1 \Leftrightarrow f$ **IRRIDUCIBILE**



OSS: **$\mathcal{C}$ INTEGRALE $\Leftrightarrow \mathcal{C}$ RIDOTTA $\wedge$ IRRIDUCIBILE**

$\mathcal{C}$ RIDOTTA $\not\Rightarrow \mathcal{C}$ IRRIDUCIBILE $\leftarrow$ dove i due controesempi

$\mathcal{Z}(f) = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{Z}(f_i)$ $\leftarrow$ le molteplicità μ_i vengono dimenticate

Esempi: [tutti PIANI e AFFINI]

o	$f(x, y) = y^2 - x(x-1)(x-2)$	CUBICA	IRRIDUCIBILE	(LISCIA)
<	$f(x, y) = y^2 - x^3$	//	//	(CUSPIDATA)
	$f(x, y) = x(x-1)(x-2)$	CUBICA DEGENERE	//	RIDUCIBILE RIDOTTA
+	$f(x, y) = x \cdot y^2$	//	//	NON RIDOTTA
U	$f(x, y) = y - x^2$	CONICA	IRRIDUCIBILE	(LISCIA)
	$f(x, y) = x^2$	RETTA DOPPIA, CONICA DEGENERE	//	// NON RIDOTTA
/	$f(x, y) = y - 2x$	RETTA	IRRIDUCIBILE	RIDOTTA

§. Comportamento sotto affinità

$$\alpha: A_{\mathbb{K}}^2 \longrightarrow A_{\mathbb{K}}^2 \quad \text{AFFINITÀ DEL PIANO}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \quad (x, y) \longmapsto (\underbrace{ax + by + c}_{=: x_1}, \underbrace{dx + ey + h}_{=: y_1})$$

Descriviamo l'immagine del supporto di una curva algebrica $\mathcal{C}$:

$$P_1 \in \alpha(\mathbb{Z}(f)) \Leftrightarrow \alpha^{-1}(P_1) \in \mathbb{Z}(f) \Leftrightarrow f(\alpha^{-1}(P_1)) = 0$$

Descriviamo l'immagine inversa di α come:

$$\alpha^{-1}: (x_1, y_1) \longmapsto (\underbrace{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1}_{=: x}, \underbrace{d_1 x_1 + e_1 y_1 + h_1}_{=: y})$$

Allora definiamo $f_2(x_1, y_1) := f(a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1, d_1 x_1 + e_1 y_1 + h_1)$
così da avere:

$$\alpha(\mathbb{Z}(f)) = \mathbb{Z}(f_2)$$

DEF Le curve f e f_1 sono **AFFINEMENTE EQUIVALENTI**

L'equivalenza affine è una relazione di equivalenza perché le affinità sono invertibili e chiuse per composizione.

PROP Il grado è invariante per equivalenza affine i.e. $f \sim f_1 \Rightarrow \deg(f) = \deg(f_1)$

Dim.: Se $f(x, y) = \dots + q \cdot x^k y^h + \dots$ allora

$$f_1(x, y) = \dots + q \cdot (a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1)^k (d_1 x_1 + e_1 y_1 + h_1)^h + \dots$$

Ovvero termine a termine il grado non può aumentare (potrebbe diminuire espandendo con Newton). Allora si ha che $\deg(f) \geq \deg(f_1)$, ma per la simmetria delle relazioni di equivalenza si deve avere che $\deg(f_1) \geq \deg(f)$.
Quindi

$$\deg(f) = \deg(f_1)$$

□

§ 3.2. Il caso proiettivo

(DEF) Una CURVA ALGEBRICA PIANA PROIETTIVA $\xrightarrow{\text{su } \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2}$ è una coppia

$$\mathcal{C} = (\underbrace{\mathbb{Z}_{\mathbb{P}}(f)}_{\text{c'è una } \mathbb{P}!}, f)$$

Il LUOGO DEGLI ZERI PROIETTIVO di f

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{P}}(f) := \{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2 \mid f(P) = 0\}$$

detto anche **SUPPORTO** della curva $\mathcal{C}$.

Ora sono zeri proiettivi, cioè punti nel piano proiettivo.

$f \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_{d \geq 1}$
il polinomio

OMOGENEO

che definisce la curva

$$\deg(\mathcal{C}) := \deg(f)$$

Domanda: come mai abbiamo bisogno di polinomi omogenei nel proiettivo?

$Z_P(\bullet)$ DEV' ESSERE BEN DEFINITO!

In particolare, non può dipendere dal rappresentante del punto proiettivo scelto. Siccome:

$$(a_0 : a_1 : \dots : a_n) = (ta_0 : ta_1 : \dots : ta_n) \in \mathbb{P}_*^n \quad \forall t \in \mathbb{K}^\times$$

Allora dobbiamo avere che

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0 \iff f(ta_0, ta_1, \dots, ta_n) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{K}^\times$$

Per polinomi omogenei abbiamo:

$$f(ta_0, ta_1, \dots, ta_n) = t^{\deg(f)} \underbrace{f(a_0, \dots, a_n)}_{=0} = 0 \quad \text{OTTIMO!}$$

Controesempio: $f(x_0, x_1, x_2) := x_0 - x_1 x_2$
 $f(1, 1, 1) = 0$ MA $f(2, 2, 2) = -2 \neq 0$.

§ 3.2.3. $A_K^2 \subset P_K^2$

$$j_0: A_K^2 \hookrightarrow P_K^2$$

INIETTIVA MA NON SURIETTIVA

$$(q_1, q_2) \mapsto (1: q_1: q_2)$$

Infatti: $Im(j_0) = P_K^2 \setminus \underbrace{Z_P(x_0)}_{\text{RETTA ALL' INFINITO}} =: U_0$

RETTA ALL' INFINITO

Allora possiamo restringere all'immagine e invertire:

$$\varphi_0: P_K^2 \setminus Z_P(x_0) = U_0 \longrightarrow A_K^2$$

INVERSA di j_0
RISTRETTA
ALL'IMMAGINE

$$(q_0: q_1: q_2) \mapsto \left(\frac{q_1}{q_0}, \frac{q_2}{q_0} \right)$$

$q_0 \neq 0!$ PER QUESTO È BEN DEFINITA

SIMILMENTE SI
DEFINISCONO

$$j_i, \varphi_i = j_i^{-1} \text{ su } U_i$$

PER $i=1,2$
CIOÈ SULLE ALTRE
CARTE AFFINI
CANONICHE

[Vedi note per esempio con $K=\mathbb{R}$]

§ 3.2.4. Omogeneizzazione e deomogeneizzazione

(DEF) (OMOGENIZ. wrt u_0)

$$h: K[x, y] \longrightarrow K[x_0, x_1, x_2]$$
$$f(x, y) \longmapsto x_0^{\deg(f)} \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) =: (hf)(x_0, x_1, x_2)$$

(DEF) (DEOMOGENIZ. wrt u_0)

$$a: K[x_0, x_1, x_2] \longrightarrow K[x, y]$$
$$F(x_0, x_1, x_2) \longmapsto F(1, x, y) =: (aF)(x, y)$$

Esempi:

1) $f(x, y) = xy - 1 \Rightarrow (hf)(x_0, x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_0^2$

2) $F = x_1 x_2 - x_0 \Rightarrow aF = xy - 1$. $G = x_0 x_1 x_2 - x_0 x_1^2 + x_0^3 \Rightarrow aG = xy - y^2 + 1$

GRADO COSTANTE

IL GRADO È
CALATO!

LEMMA

- 1) $(a \cdot h)(f) = f$ $\leftarrow$ a è inverso sinistro di h , ma non destro.
- 2) $\exists k \cdot (h \cdot a)(F) = F$ $\leftarrow$ a è inverso destro di h
A MENO DI POTENZE di X_0
 $k \in \mathbb{N}$
- 3) $j_0(\mathbb{Z}(f)) = \mathbb{Z}_P(hf) \cap \mathcal{U}_0$
- 4) $\varphi_0(\mathbb{Z}_P(F) \cap \mathcal{U}_0) = \mathbb{Z}(aF)$

Dim: per esercizio $\square$

DEF La CHIUSURA PROIETTIVA di $\mathcal{C} = (\mathbb{Z}(f), f)$ è definita da

$$\overline{\mathcal{C}} := (\mathbb{Z}_P(hf), hf)$$

§ 3.2.5. Radici di polinomi omogenei & molteplicità

Ricordiamo $(b:c) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ RADICE OMOGENEA di $G \in \mathbb{K}[x,y]_d \Leftrightarrow G(b,c)=0$
 Inoltre ha MOLTEPLICITA' $m \Leftrightarrow G = (cx - by)^m \cdot G_1$, $G_1(b,c) \neq 0$
 $\in \mathbb{K}[x,y]_{d-m}$

TEO (RUFFINI PROIETTIVO) $G \in \mathbb{K}[x, y]_d$

$$G(b, c) = 0 \iff G = (cx - by)^2 \cdot G_1, \quad G_1 \in \mathbb{K}[x, y]_{d-1}$$

Dim.: per esercizio. [in altre parole ogni radice ha molteplicità ≥ 1]

TEO (FONDAM. dell' ALGEBRA PROIETTIVO). $K = \overline{K}$. $G \in K[x, y]_d$.

$$G(x, y) = \prod_{i=1}^r (c_i x - b_i y)^{m_i} \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^r m_i = d$$

Dim: per esercizio utilizzando il teorema fondam. algebra classico

