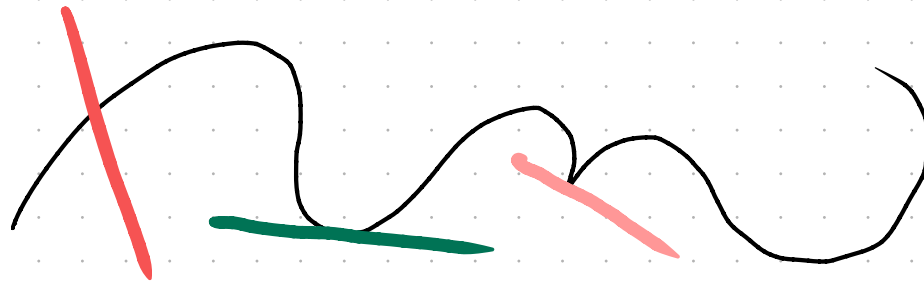




§4. Intersezione tra rette e curve



§4.1 Il caso affine

Setting:

- $(z(f), f)$ curva algebrica piano affine
- ℓ retta affine di eq. parametriche: $\begin{cases} x = lt + q_1 \\ y = mt + q_2 \end{cases}$
- $T \in \ell \Rightarrow$ corrisponde ad un $t = t_0$

Allora $T \in z(f) \Leftrightarrow$

$$\left(g(t) := f(lt + q_1, mt + q_2) \right) \Big|_{t=t_0} = 0$$

← equivalentemente per Ruffini:
 $g(t) = (t - t_0) \cdot g_1(t)$

Oss: $\deg(g) \leq \deg(f)$ ← il grado potrebbe calare!

Vediamo alcuni esempi.

Esempi:

1) $f(x, y) := y - 1$, $\ell: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \end{cases}$ (due rette parallele)

$\Rightarrow g(t) := f(t, 2) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \deg(g) = 0 \neq \deg(f)$
in particolare g non ha radici, e quindi le due rette non si intersecano (lo sapevamo già, sono parallele nell'**AFFINE**...)

2) $f(x, y) := xy - 1$, $\ell: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$ (un'iperbole ed il suo asintoto)

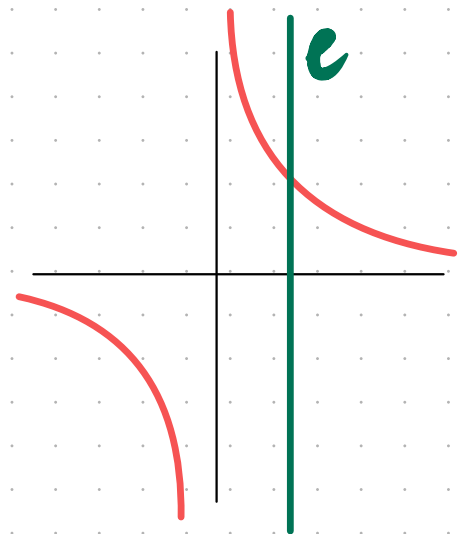
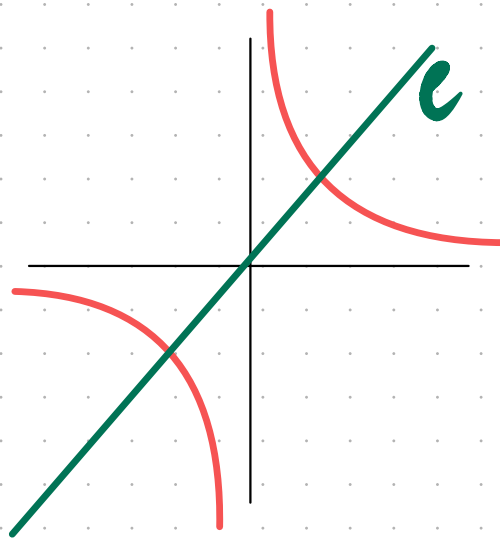
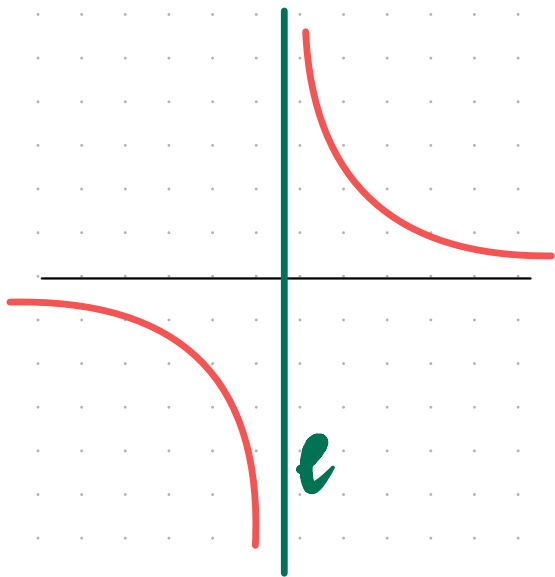
$\Rightarrow g(t) := f(0, t) = 0 \cdot t - 1 = -1 \Rightarrow \deg(g) = 0 \neq \deg(f)$
di nuovo non ci sono intersezioni.

3) $f(x, y) := xy - 1$, $l: \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$ (un'iperbole e la sua bisettrice)

$\Rightarrow g(t) := f(t, t) = t^2 - 1 = (t+1)(t-1) \Rightarrow t_0 = \pm 1$ danno due punti di intersezione. $\deg(g) = \deg(f) = 2$

4) $f(x, y) := xy - 1$, $l: \begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases}$ (un'iperbole ed una generica retta verticale)

$\Rightarrow g(t) := f(1, t) = t - 1 \Rightarrow \deg(g) = 1 \neq 2 = \deg(f)$
e vi è un unico punto di intersezione



DEF $(Z(f), f)$ curva plane affine, l retta affine, $l \neq Z(f)$.

La **MOLTEPLICITA' di INTERSEZIONE** $I_T(f, l)$ in $T \in l$: $\begin{cases} x = lt + q_1 \\ y = mt + q_2 \end{cases}$ corrispondente a $t = t_0$ è definita come la molteplicità di t_0 come radice di

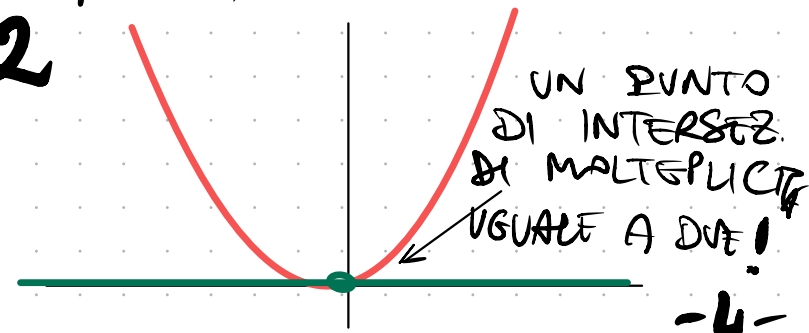
$$g(t) := f(lt + q_1, mt + q_2) = (t - t_0)^{I_T(f, l)} \cdot \tilde{g}_1(t)$$

$\uparrow \tilde{g}_1(t_0) \neq 0$

Se $I_T(f, l) = 1 \Rightarrow Z(f)$ ed l si **INTERSECANO TRASVERSALMENTE**, mentre se $l \subset Z(f) \Rightarrow I_T(f, l) := \infty \quad \forall t \in l$

OSS Con questa def se $T \notin Z(f) \Rightarrow$ non si intersecano e $g(t_0) \neq 0 \Rightarrow I_T(f, l) = 0$ che riflette la non intersezione ✓

Esempio: $f(x, y) = y - x^2$, $l: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow g(t) = f(t, 0) = -t^2 \Rightarrow t_0 = 0$
 è radice doppia $\Rightarrow I_{(0,0)}(f, \{y=0\}) = 2$



PROP $(z(f), f)$ curva proiettiva affine, l retta affine:

$$\sum_{T \in l} I_T(f, l) = \sum_{T \in z(f) \cap l} I_T(f, l) = \begin{cases} \leq d & l \not\subset z(f) \\ \infty & l \subset z(f) \end{cases}$$

Dim.: $l \subset z(f)$ per def. Se $l \not\subset z(f) \Rightarrow \deg(g) \leq d \Rightarrow \# \text{radici}(g)$
 con molteplicità $\leq \deg(g) \leq d$
uguale per $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ *$\leq$ nell'affine, sarà invece uguale nel proiettivo*

§ 4.2 Il caso proiettivo

Setting:

- $(\mathbb{A}_p(F), F)$ curva algebrica affine proiettiva
- L retta proiettiva di eq. parametriche:
- $T \in L \Rightarrow$ corrisponde ad una coppia
 $(\lambda : \mu) = (\bar{\lambda} : \bar{\mu})$

$$(p_0 : p_1 : p_2) = P \in L \quad Q = (q_0 : q_1 : q_2)$$

$$L : \begin{cases} x_0 = p_0 \lambda + q_0 \mu \\ x_1 = p_1 \lambda + q_1 \mu \\ x_2 = p_2 \lambda + q_2 \mu \end{cases}$$

$$(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_K^1$$

$$\leadsto T = (p_0 \bar{\lambda} + q_0 \bar{\mu} : p_1 \bar{\lambda} + q_1 \bar{\mu} : p_2 \bar{\lambda} + q_2 \bar{\mu}) \in \mathbb{P}_K^2$$

Allora $T \in \mathbb{A}_p(F) \Leftrightarrow$

$$\left(G(\lambda, \mu) := F(p_0 \lambda + q_0 \mu, p_1 \lambda + q_1 \mu, p_2 \lambda + q_2 \mu) \right) \Big|_{\substack{\lambda = \bar{\lambda} \\ \mu = \bar{\mu}}} = 0$$

Per Ruffini proiettivo questo equivale a:

$$G(\lambda, \mu) = (\bar{\mu} \lambda + \bar{\lambda} \mu) \cdot G_1(\lambda, \mu)$$

polinomio di
un grado inferiore

Esercizio: $\deg(G) = \deg(F)$ ^{non può scendere!} $\vee G \equiv 0$ ^{caso in cui $L \subset Z_p(F)$}

DEF $(Z_p(F), F)$ curva piane proiettiva, L retta proiettiva, $L \not\subset Z_p(F)$.

La **MOLTEPLICITÀ di INTERSEZIONE** $I_T(F, L)$ in $T \in L$ corrispondente a $(\bar{\lambda} : \bar{\mu})$ è definita come la molteplicità di $(\bar{\lambda} : \bar{\mu})$ come radice di

$$G(\lambda, \mu) := F(p_0\lambda + q_0\mu, p_1\lambda + q_1\mu, p_2\lambda + q_2\mu)$$

$$\downarrow$$

$$= (\bar{\mu}\lambda - \bar{\lambda}\mu)^{I_T(F, L)} \cdot G_1(\lambda, \mu) \leftarrow \text{con } G_1(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \neq 0$$

Se $I_T(F, L) = 1 \Rightarrow Z_p(F)$ ed L si **INTERSECANO TRASVERSALMENTE**, mentre se $L \subset Z_p(F) \Rightarrow I_T(F, L) := \infty \quad \forall T \in L$

PROP $K = \overline{K}$. $(Z_p(F), F)$ curva piana proiettiva, L retta proiettiva:

$$\sum_{T \in L} I_T(F, L) = \sum_{T \in L \cap Z_p(F)} I_T(F, L) = \begin{cases} d & L \not\subset Z_p(F) \\ \infty & L \subset Z_p(F) \end{cases}$$

Dim.: $L \subset Z_p(F)$ per def. Se $L \not\subset Z_p(F) \Rightarrow \deg(g) = d \Rightarrow \# \text{radici}(g)$
 con molteplicità $= \deg(g) = d$
 uguale per $K = \overline{K}$ uguale perché siamo nel proiettivo

