



§5. Singolarità di curve piane

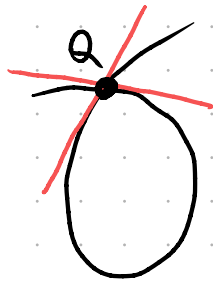
DEF $(Z(f), f)$ curva affine. La **MOLTEPLICITÀ** $m_f(Q)$ di un punto $Q \in Z(f)$ è definita come

$$m_f(Q) := \min_{L \ni Q} I_Q(f, L)$$

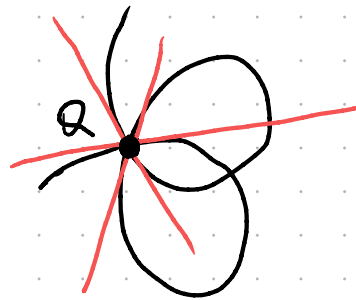
- $m_f(Q) = 0$ se $Q \notin Z(f)$ [estensione della def.]
 - $m_f(Q) = 1$ Q è un punto **LISCU** o **NON SINGOLARE**
 - $m_f(Q) = 2$ Q è punto **DOPPIO**
 - $m_f(Q) = 3$ Q è punto **TRIPLO**
 - $m_f(Q) = 4$ Q è punto **QUADRIPLIO**
 - $\dots$ $\dots$
- PUNTO SINGOLARE**

Nel seguito useremo le stesse definizioni.

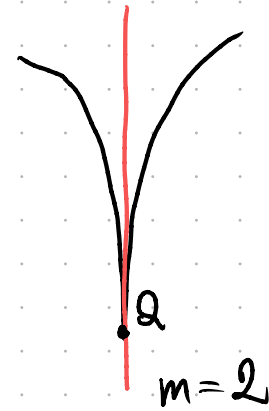
Exmpl:



$m=2$



$m=3$

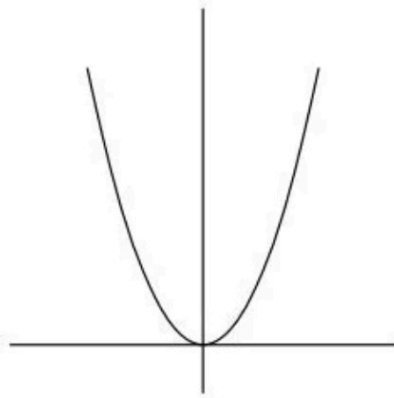


$m=2$

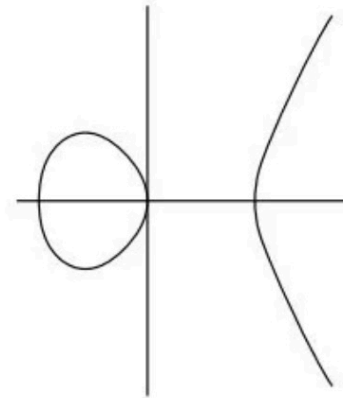
CUSPIDE

$$y^2 - x^3 = 0$$

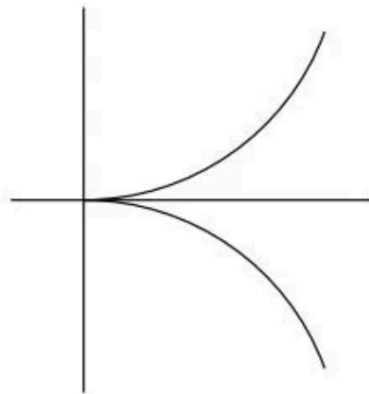
$$L: y=0 \quad x^3=0$$



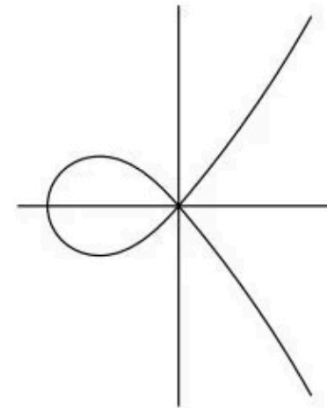
$$A = Y - X^2$$



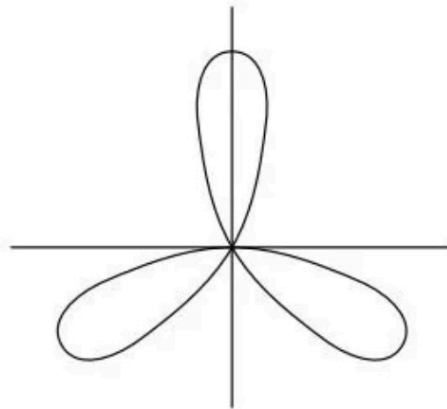
$$B = Y^2 - X^3 + X$$



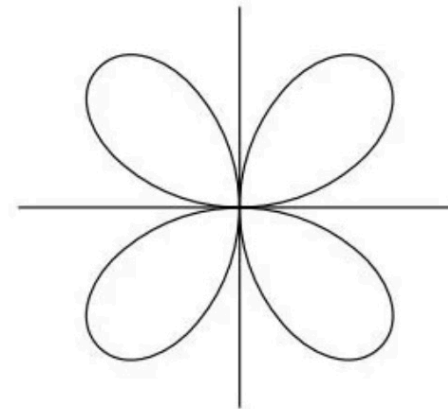
$$C = Y^2 - X^3$$



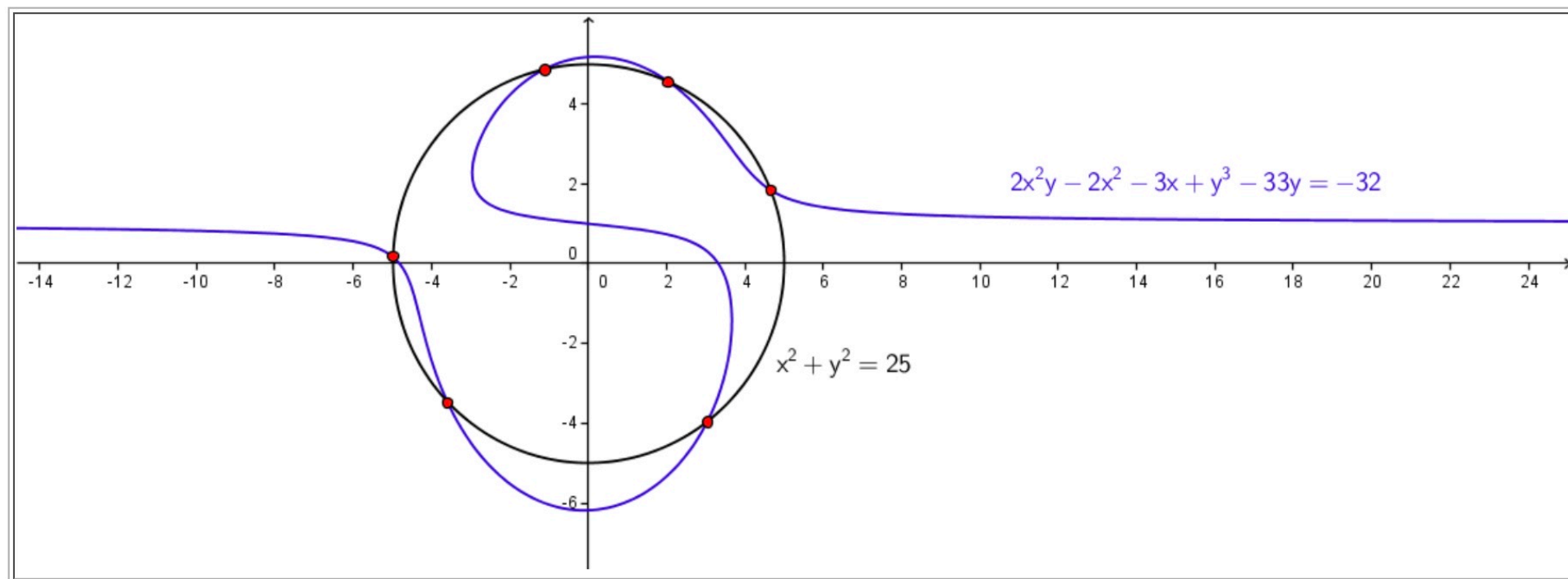
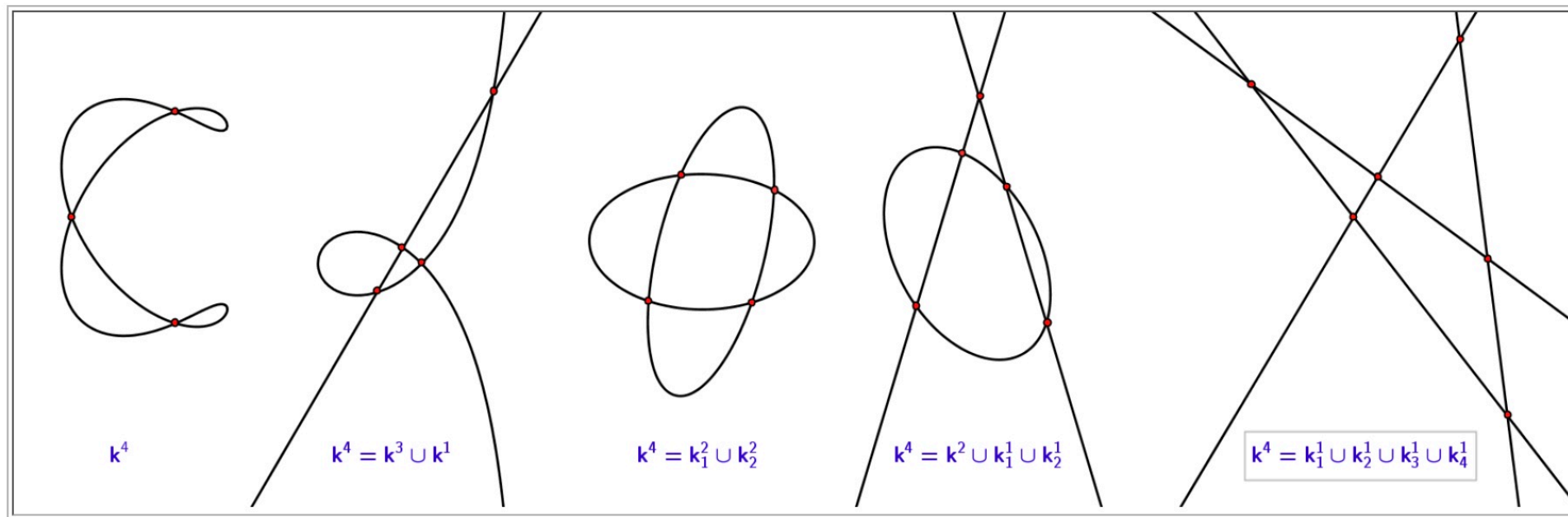
$$D = Y^2 - X^3 - X^2$$



$$E = (X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$$



$$F = (X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2$$



§5.2. Polinomi derivati e di Taylor

per qualsiasi $b \in K$

Ricordiamo che $\dim_K K[t]_{\leq d} = d+1$ con base $B = \{(t-b)^i\}_{0 \leq i \leq d}$ e che

come spazio vettoriale su K

$$f(t) = \sum_{i=0}^d \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (t-b)^i$$

$K[t]_{\leq d}$ ψ i -esima derivata $b \in K$

FORMULA di TAYLOR
espansione vicino al punto $b \in K$

Mentre nel caso omogeneo vale che se $G(\lambda, \mu) \in K[\lambda, \mu]_d$, allora:

$$G(\lambda, \mu) = \sum_{i=0}^d \frac{\partial_{\mu}^i G(\lambda, 0)}{i!} \mu^i$$

$K[t]$ FORMULA di TAYLOR OMOGENEA espansione vicino al punto $(\lambda, 0)$

Ricordiamoci anche la regola della catena:

$$f(x_1(t), \dots, x_n(t))' = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \cdot (x_1'(t)) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot (x_n'(t)) = (x_1'(t) \dots x_n'(t)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$K[x_1, \dots, x_n, t]$ primo vuol dire DERIVATA PARZIALE nelle t ∇f GRADIENTE di f

vetture delle derivate delle componenti

In più variabili: sia $g \in K[x_1, \dots, x_n]$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, allora

$$g(x_1, \dots, x_n) = \left[\sum_{k=0}^{\deg(g)} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \partial_{x_i} \right)^k \cdot g(x_1, \dots, x_n) \right] \Big|_{(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n)}$$

SOLO PER LE DERIVATE DELLA FUNZIONE g

Cosa succede espandendo? Bisogna acquisire un po' di manualità con Newton generalizzato:

RICORDIAMO
NEWTON
GENERALIZZATO:

$$(y_1 + \dots + y_n)^k = \sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 0 \\ \sum d_i = k}} \binom{k}{d_1, \dots, d_n} y_1^{d_1} \dots y_n^{d_n} = \sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 0 \\ \sum d_i = k}} k! \frac{y_1^{d_1}}{d_1!} \dots \frac{y_n^{d_n}}{d_n!}$$

COEFF. MULTINOMIALE

VIENE DA

$$e^{\sum y_i x_i} = \prod e^{y_i x_i}$$

CON TAYLOR!

[POI PRENDO IL COEFF. DI x^k DA AMBOS I LATI]

Allora:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^d \frac{k!}{k!} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 0 \\ \sum d_i = k}} \left(\frac{(x_1 - a_1)^{d_1} \partial_{x_1}^{d_1}}{d_1!} \circ \dots \circ \frac{(x_n - a_n)^{d_n} \partial_{x_n}^{d_n}}{d_n!} \right) \cdot g \Big|_{\vec{x} = \vec{a}}$$

Applicando il teorema di Schwarz [derivate parziali commutano]:

$$g(\vec{x}) = \sum_{\substack{k, d_1, \dots, d_n \geq 0 \\ \sum d_i = k}} \prod_{i=1}^n \frac{(x_i - a_i)^{d_i}}{d_i!} \cdot g(d_1, \dots, d_n)(a_1, \dots, a_n)$$

DERIVATA d_1 VOLTE IN x_1 ,
 d_2 VOLTE IN x_2 ,
....

E POI VALUTATA IN $(a_1, \dots, a_n)$

Exemplo: $n=2$.

Expando com Newton

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left((x-a)\partial_x + (y-b)\partial_y \right)^n g(x, y) \Big|_{(x,y)=(a,b)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\partial_x^i \partial_y^{n-i} g)(a, b) (x-a)^i (y-b)^{n-i} \\
 &\stackrel{\frac{1}{0!}}{=} g(a, b) + \stackrel{\frac{1}{1!}}{(\partial_x g)(a, b)}(x-a) + \stackrel{\frac{1}{1!}}{(\partial_y g)(a, b)}(y-b) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left[(\partial_{xx} g)(a, b)(x-a)^2 + 2(\partial_{xy} g)(a, b)(x-a)(y-b) \right. \\
 &\quad \left. + (\partial_{yy} g)(a, b)(y-b)^2 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{3!} \left[(\partial_{xxx} g)(a, b)(x-a)^3 + 3(\partial_{xxy} g)(a, b)(x-a)^2(y-b) \right. \\
 &\quad \left. + 3(\partial_{xyy} g)(a, b)(x-a)(y-b)^2 + (\partial_{yyy} g)(a, b)(y-b)^3 \right] + \dots
 \end{aligned}$$

(*) FAÇA MO LA VERIFICA:

$$\frac{3}{3!} \partial_{xxy} g = \frac{\partial_{xxy} g}{2!} = \frac{g^{(d_1, d_2)}}{d_1! d_2!} \text{ com } d_1=2, d_2=1 \quad \checkmark$$

TEO [FORMULA di EULERO]

$F \in K[x_0, \dots, x_n]_d$, allora:

$$d \cdot F = \sum_{i=0}^n x_i \cdot \partial_{x_i} F = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_n) \cdot \nabla F$$

Dim.: F omogeneo $\Rightarrow t^d F(\vec{x}) = F(t\vec{x})$

DERIVO RISPETTO ALLA VARIABILE t
AMBO I LATI

$$\frac{d}{dt} \cdot \left(d t^{d-1} \cdot F(\vec{x}) \right) \Big|_{t=1}$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \left((t x_0) \dots (t x_n) \nabla F \right)$$

// $\leftarrow$ CALCOLO DERIVATA IN t

$$(x_0 \ \dots \ x_n) \nabla F \Big|_{t=1} \text{ (NON HA EFFETTO)}$$

$$d \cdot F(\vec{x}) = (x_0 \ \dots \ x_n) \nabla F$$

ENUNCIATO

□

SETTO IL VALORE DI
 t UGUALE AD UNO
IN AMBO I LATI

§5.2.1 Caratterizzazione differenziale dei punti singolari

Setting:

- $(\mathbb{Z}_p(F), F)$ curva piana alg. proiettiva
- $Q \in \mathbb{Z}_p(F)$, $A \neq Q \Rightarrow \overline{QA} : \{(\lambda q_0 + \mu a_0 : \lambda q_1 + \mu a_1 : \lambda q_2 + \mu a_2) \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$
- $G(\lambda, \mu) := F(\lambda q_0 + \mu a_0, \lambda q_1 + \mu a_1, \lambda q_2 + \mu a_2)$

Ricordiamo $m_Q(F) :=$ molteplicità di $(1:0)$ in G
 $=$ molteplicità di $\mu=0$ in G $\left. \vphantom{\begin{matrix} m_Q(F) \\ \mu=0 \end{matrix}} \right\} \Rightarrow$ Taylor per G in μ

$$\begin{aligned} G(\lambda, \mu) &= \sum_{i=0}^d \frac{\partial_{\mu}^i G(\lambda, 0)}{i!} \mu^i \\ &= F(\lambda Q) + (\partial_{x_0} F(\lambda Q) a_0 + \partial_{x_1} F(\lambda Q) a_1 + \partial_{x_2} F(\lambda Q) a_2) \mu \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=0}^2 \partial_{x_i x_j} F(\lambda Q) a_i a_j \right) \mu^2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{1}{m!} \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=0}^2 \partial_{x_{i_1} \dots x_{i_m}} F(\lambda Q) a_{i_1} \dots a_{i_m} \right) \mu^m \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\lambda, \mu) &= F(Q) \lambda^d + (\partial_{x_0} F(Q) a_0 + \partial_{x_1} F(Q) a_1 + \partial_{x_2} F(Q) a_2) \lambda^{d-1} \mu \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=0}^2 \partial_{x_i x_j} F(Q) a_i a_j \right) \lambda^{d-2} \mu^2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{1}{m!} \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=0}^2 \partial_{x_{i_1} \dots x_{i_m}} F(Q) a_{i_1} \dots a_{i_m} \right) \lambda^{d-m} \mu^m \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

USANDO F OMogeneo
 di grado $d \in$
 DERIVATE PARZIALI
 OMogenee di GRADO
 $d - \# \text{DERIVATE}$

Allora $m_Q(F) = m \Leftrightarrow \mu^m | G \wedge \mu^{m+1} \nmid G$

SONO POLINOMI NELLE $(a_0 : a_1 : a_2)$ DI GRADO k CON COEFF $(\partial_{x_1} \dots \partial_{x_k} F)(Q)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^2 (\partial_{x_{i_1} \dots x_{i_k}} F)(Q) a_{i_1} \dots a_{i_k} \equiv 0 & \forall k \leq m-1 \\ \sum_{i_1, \dots, i_m=0}^2 (\partial_{x_{i_1} \dots x_{i_m}} F)(Q) a_{i_1} \dots a_{i_m} \equiv 0 & (k=m) \end{cases}$$

$P \equiv 0 \Leftrightarrow$ TUTTI I SUOI COEFFICIENTI SONO $= 0$



$$\begin{cases} F(d_0, d_1, d_2)(Q) = 0 \\ \quad = (\partial_{x_0}^{d_0} \partial_{x_1}^{d_1} \partial_{x_2}^{d_2} F)(Q) \\ F(d_0, d_1, d_2)(Q) \neq 0 \end{cases}$$

$$\forall (d_0, d_1, d_2) : \sum_{i=0}^2 d_i \leq m-1$$

↑ POSSIAMO RAFFINARE QUESTO

$$\exists (d_0, d_1, d_2) : \sum_{i=0}^2 d_i = m$$

PER LA FORMULA DI EULERO UNA DERIVATA k -ESIMA È COMBINAZ. LINEARE DI TUTTE LE $(k+1)$ -ESIME



$$\begin{cases} F(d_0, d_1, d_2)(Q) = 0 \\ \quad = (\partial_{x_0}^{d_0} \partial_{x_1}^{d_1} \partial_{x_2}^{d_2} F)(Q) \\ F(d_0, d_1, d_2)(Q) \neq 0 \end{cases}$$

$$\forall (d_0, d_1, d_2) : \sum_{i=0}^2 d_i = m-1$$

$$\exists (d_0, d_1, d_2) : \sum_{i=0}^2 d_i = m$$

Abbiamo appena dimostrato:

(PROP) $Z_P(F) \subset \mathbb{P}^2$, $Q \in \mathbb{P}^2$, allora:

$$m_Q(F) = \min \{ d_0 + d_1 + d_2 \}$$

$$(d_0, d_1, d_2) \in \mathbb{N}^3:$$

$$F^{(d_0, d_1, d_2)}(Q) \neq 0$$

ovvero Q ha $\text{mult} = m$
 $\Leftrightarrow$ tutte deriv. parziali
di ordine fino a $m-1$ in Q
sono nulle e ce n'è una m -esima
che non si annulla in Q .

in altre parole la
moltiplicità è il minimo degli
ordini delle derivate
parziali che non si annullano.

(OSS) $q \in \mathbb{Z}(f)$ SINGOLARE $\Leftrightarrow (\partial_x f)(q) = (\partial_y f)(q) = 0$

Dim.: Le molteplicità vengono preservate da $\mathcal{U}_0 \hookrightarrow \mathbb{A}^2$, allora

$$m_q(f) = m_{j_0(q)}(\mathbb{Z}_P(hf)) \quad Q := j_0(q) = (1:q_1:q_2)$$

Ora settiamo $F(x_0, x_1, x_2) := hf(x_0, x_1, x_2) = x_0^{\deg(f)} f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$ e osserviamo

$$\partial_{x_1} F(1, x_1, x_2) = \partial_x f(x, y) \quad [\text{similmente per } \partial_{x_2} \leftrightarrow \partial_y]$$

Quindi valutando in $q = q_1, q_2$ si trova

$$\begin{cases} (\partial_x f)(q) = (\partial_{x_1} F)(1, q_1, q_2) \\ (\partial_y f)(q) = (\partial_{x_2} F)(1, q_1, q_2) \end{cases}$$

Allora $q \in \mathbb{Z}(f)$ SINGOLARE $\Leftrightarrow Q \in \mathbb{Z}_P(F)$ SINGOLARE

PROP PREC $\Leftrightarrow (\partial_{x_i} F)(Q) = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3$

Per Eulero $(d \cdot F)(Q) = (\partial_{x_0} F)(Q) + q_1 (\partial_{x_1} F)(Q) + q_2 (\partial_{x_2} F)(Q)$

PERCHÉ $Q \in \mathbb{Z}_P(F)$

ALLORA SE QUESTI DUE SONO ZERO ANCHE $(\partial_{x_0} F)(Q)$ DEVE ESSERE ZERO

□
-||-

§5.2.2. Retta tangente e cono tangente

DEF $Q, Z_P(F)$, considero la curva definita da

$$\sum_{i_1, \dots, i_{m_Q(F)}=0}^2 F^{(i_1, \dots, i_{m_Q(F)})}(Q) x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_{m_Q(F)}} = 0$$

Se $m_Q(F) = 0 \Rightarrow Q \notin Z_P(F)$ e questa curva è $0=0$ banale

Se $m_Q(F) = 1 \Rightarrow Q \in Z_P(F)$ **LISCIO** e la curva si chiama
RETTA TANGENTE a $Z_P(F)$ in Q

Se $m_Q(F) \geq 2 \Rightarrow Q \in Z_P(F)$ **SINGOLARE** e la curva si chiama
CONO TANGENTE a $Z_P(F)$ in Q
di ordine $m_Q(F)$

Nell'affine le definizioni sono identiche. ($f \leftrightarrow F, z \leftrightarrow Z_P, (x, y) \leftrightarrow (x_0, x_1, x_2)$)

OSS $m = 1 \Rightarrow (x, y) \nabla f(q) = x(\partial_x f)(q) + y(\partial_y f)(q) = 0$ **RETTA TANGENTE AFFINE**

§ 5.2.3 Molteplicità dell'origine per curve affini

Nell'origine le cose sono più semplici. Taylor affine:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\deg(f)} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} f^{(i, n-i)}(0, 0)$$

si può cominciare da $n=1$ assumendo $(0,0) \in Z(f)$

$f(x, y)$ non necessariamente omogeneo ma possiamo comunque decomporlo nelle componenti omogenee

$$f(tx, ty) = \sum_{n=1}^d t^n \left(\sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} f^{(i, n-i)}(0, 0) \right) =: f_n(x, y)$$

Se vogliamo studiare la molteplicità dell'origine, consideriamo la retta $\overline{(0,0)(a,b)}$:

$$L(a, b): \begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}$$

Abbiamo imparato che

$$I_{(0,0)}(f, L(a,b)) := \text{molteplicità algebrica di } (0,0) \\ \text{in } g(t) := f(a,b) = \sum_{n=1}^d t^n f_n(a,b)$$

$$\text{Quindi } I_{(0,0)}(f, L(a,b)) = m \Leftrightarrow$$

$$f_j(a,b) = 0 \quad \forall j = 0, \dots, m-1 \quad \& \quad f_m(a,b) \neq 0$$

Siccome la molteplicità per l'origine è

$$m_{(0,0)}(f) := \min_{(a,b) \neq (0,0)} I_{(0,0)}(f, L(a,b))$$

Allora dobbiamo avere che

$$f_j(a,b) = 0 \quad \forall j = 0, \dots, m-1 \quad \& \quad f_{m_{(0,0)}(f)}(a,b) \neq 0 \quad \exists \underset{(0,0)}{\neq} (a,b)$$

VARREBBE $\forall (a,b) \neq (0,0)$
MA POI f_j OMOGENEO E
TUTTI I POLI OMOGENEI SI ANNULLANO
NELL'ORIGINE

In altre parole abbiamo dimostrato:

(PROP) $f \in \mathbb{K}[x, y]$ allora

$$m_{(0,0)}(f) = \min_{f_n \neq 0} \{n \in \mathbb{N}\}$$

o equivalentemente i polinomi

$$f_n(x, y) = \sum_{i=0}^n x^i y^{n-i} a_i^{(n)} = \begin{cases} \equiv 0 & \forall n=0, \dots, m_{(0,0)}(f)-1 \\ \neq 0 & \text{per } n=m_{(0,0)}(f) \end{cases}$$

per i coefficienti $a_i^{(n)} := \frac{f^{(i, n-i)}(0,0)}{i!(n-i)!}$

Esempio: $f(x, y) = x^7 + 5xy^6 + \frac{17}{3}x^2y^2 + \sqrt{2}\pi x^3y + xy^2$

$$\Rightarrow f_1 \equiv f_2 \equiv 0 \text{ \& } f_3 \neq 0 \Rightarrow m_{(0,0)}(f) = 3$$

LEMMA L'equazione della retta / caso tangente è data da

$$f_{m(0,0)}(f) = 0$$

OVERO DALLA COMPONENTE
OMOGENEA PIÙ BASSA

Dim.: Segue dalla definizione [ordinando i termini si producono i fattoriali]

§5.3 Luogo singolare di curve ridotte

(TEO) $K = \overline{K}$, $F \in K[x_0, x_1, x_2]_{d>0}$. Allora:

$$|\text{Sing}(Z_P(F))| < +\infty \iff Z_P(F) \text{ RIDOTTA}$$

Dimostrazione. Dimostriamo separatamente entrambe le implicazioni.

$\Leftarrow$). Supponiamo che $Z_P(F)$ sia una curva non ridotta. Sia $F = F_1^{m_1} \cdots F_r^{m_r}$ la sua scomposizione in componenti irriducibili. Per ipotesi esiste almeno un $m_i \geq 2$. Allora $Z(F_i^{m_i}) \subset Z(F)$ e $\text{Sing}(Z(F_i^{m_i})) \subset \text{Sing}(Z(F))$, quindi $|\text{Sing}(Z(F_i^{m_i}))| < |\text{Sing}(Z(F))|$. Per ipotesi ogni punto di $Z(F_i^{m_i})$ è singolare, $\deg(F_i) \geq 1$, e il campo K è algebricamente chiuso e quindi infinito, perciò $\text{Sing}(Z(F_i^{m_i})) = Z(F_i^{m_i})$ è un insieme infinito. Ne segue che $|\text{Sing}(Z(F_i^{m_i}))| = \infty$.

$\Rightarrow$). Supponiamo che $Z_P(F)$ sia una curva ridotta. Sia $F = F_1 \cdots F_r$ la sua scomposizione in componenti irriducibili. Allora per la regola di Leibnitz si ha che

$$\partial_{x_k} F = \sum_{i=1}^r F_1 \cdots F_{i-1} (\partial_{x_k} F_i) F_{i+1} \cdots F_r, \quad k = 0, 1, 2. \quad (5.9)$$

Questo implica la seguente scomposizione

$$\text{Sing}(Z_P(F)) = \bigcup_{i=1}^r Z_P(F_i) \cup \bigcup_{1 \leq i < j \leq r} (Z_P(F_i) \cap Z_P(F_j)). \quad (5.10)$$

PICCOLA
ANTICIPAZIONE $\rightarrow$

Si ha che $|\text{Sing}(Z_P(F_i) \cap Z_P(F_j))| < \infty$ per la proposizione 6.17 che vedremo nella prossima unità grazie ai risultanti di Sylvester. Ne segue che $|\text{Sing}(Z_P(F))| < \infty$ se e solo se $|Z_P(F_i)| < \infty$ per ogni $i = 1, \dots, r$. In altre parole, per dimostrare l'enunciato è sufficiente dimostrarlo per curve irriducibili ridotte, i.e. per curve $Z_P(F)$ integrali, e quindi per polinomi F irriducibili.

Sia F irriducibile. Il luogo singolare $\text{Sing}(Z_P(F))$ è determinato dall'intersezione del luogo degli zeri di F e delle sue derivate parziali. Si noti che le tre derivate possono essere nulle. Se F ha grado zero è una costante e non ci sono punti singolari. Assumendo F di grado positivo, si distinguono tre casi distinti:

1. Due derivate parziali si annullano. Senza perdita di generalità possiamo assumere che $\partial_0 F \not\equiv 0$, mentre $\partial_1 F \equiv \partial_2 F \equiv 0$. Dunque $F(x_0, x_1, x_2) = F(x_0) = c \cdot x_0^d$ per qualche costante $c \in \mathbb{K}^\times$. Per ipotesi F irriducibile quindi $d = 1$, ovvero $Z_P(F)$ è una retta per cui $|\text{Sing}(Z_P(F))| = |\emptyset| = 0 < \infty$.
2. Una derivata parziale si annulla. Senza perdita di generalità possiamo assumere che $\partial_0 F, \partial_1 F \not\equiv 0$, mentre $\partial_2 F \equiv 0$. Dunque $F(x_0, x_1, x_2) = F(x_0, x_1)$, e per ipotesi il campo è algebricamente chiuso dunque il polinomio spezza in fattori lineari di molteplicità uno $F(x_0, x_1) = \prod_{i=1}^d (\lambda_i x_0 - \mu_i x_1)$ per costanti $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$ non entrambe nulle, $i = 1, \dots, d$, e fattori distinti. Per ipotesi F irriducibile quindi $d = 1$, ovvero $Z_P(F)$ è di nuovo una retta per cui $|\text{Sing}(Z_P(F))| = |\emptyset| = 0 < \infty$.

3. Nessuna derivata parziale si annulla. Si noti che le derivate parziali potrebbero condividere componenti irriducibili comuni. Si distinguono quindi tre sottocasi:

a) Tutte e tre le derivate parziali hanno un fattore irriducibile in comune.

Allora

$$\partial_k F = H \cdot H_k, \quad k = 0, 1, 2, \quad \exists H \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_{d \geq e > 0}$$

E' sufficiente utilizzare la relazione di Eulero per raggiungere una contraddizione. Infatti:

$$d \cdot F = \sum_{k=0}^2 x_k \partial_k F = H \cdot \left(\sum_{k=0}^2 x_k H_k \right),$$

contraddicendo l'ipotesi di irriducibilità.

- b) Due derivate parziali hanno un fattore irriducibile in comune. Allora senza perdita di generalità possiamo assumere

$$\partial_k F = H \cdot H_k, \quad k = 0, 1, \quad \exists H \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_{d \geq e > 0}$$

Allora

$$\text{Sing}(Z_P(F)) = (Z_P(H) \cap Z_P(\partial_2 F)) \cup (Z_P(H_0) \cap Z_P(H_1) \cap Z_P(\partial_2 F)) =: T_1 \cup T_2$$

Ancora una volta per la proposizione 6.17, sia T_1 che T_2 sono insiemi finiti, da cui la tesi.

- c) Rimane il caso in cui le derivate parziali a due a due non hanno componenti irriducibili in comune, dunque

$$\text{Sing}(Z_P(F)) := Z_P(F) \cap Z_P(\partial_0 F) \cap Z_P(\partial_1 F) \cap Z_P(\partial_2 F) \subseteq Z_P(\partial_0 F) \cap Z_P(\partial_1 F).$$

Sempre per la proposizione 6.17 il termine di destra ha cardinalità finita. Questo conclude la dimostrazione.

