



§7. Il Teorema di Bézout

FORMA
DEBOLLE

FORMA
FORTE

Questo corso si può anche vedere diviso in tre parti: 1. Un preambolo al Teorema di Bézout, 2. Il Teorema di Bézout, 3. Le applicazioni del Teorema di Bézout. In altre parole, questo è il risultato più importante del corso.

DEF $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_{r \geq 1}, G \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_{s \geq 1}, \text{GCD}(F, G) = 1$

Allora $z_p(F), z_p(G)$ sono IN POSIZIONE AMMISSIBILE
RISPETTO AD $E_2 := (0:0:1)$ **DEF**

i.e. non hanno
fattori irriducibili
in comune

1) $z_p(F) \not\subseteq E_2 \not\subseteq z_p(G)$ $\leftarrow$ equiv. $\deg_{x_2}(F) = r \wedge \deg_{x_2}(G) = s$

2) $E_2 \not\subseteq \overline{Q_1 Q_2} \quad \forall Q_1, Q_2 \in z_p(F) \cap z_p(G)$ $\leftarrow$ equiv. l'equazione
della retta $\overline{Q_1 Q_2}$
dipende in modo non
banale da x_2 .

OSS Se vale la prima riga delle DEF sopra, allora
 $z_p(F), z_p(G)$ sono SEMPRE in POS. AMM. E_2 A MENO DI PROIETTIVITA' **ESERCIZIO**

TIPICA CONDIZ. NECESSARIA PER BÉZOUT!

(PROP) $K = \overline{K}$, $Z_P(F), Z_P(G)$ in POS. AMMISSIBILE per E_2

Allora c'è una biiezione di insiemi finiti: risultante rispetto a x_2
[spiega ammiss. E_2]

$$Z_P(F) \cap Z_P(G) \longleftrightarrow Z_P(R_{x_2}(F, G))$$

$$(q_0:q_1:q_2) \longleftrightarrow (q_0:q_1)$$

Dim.: $\text{GCD}(F, G) = 1 \Rightarrow R_{x_2}(F, G) = R(x_0, x_1) \in K[x_0, x_1]_{rs \geq 1}$

Nella sezione precedente: $(q_0:q_1:q_2) \in Z_P(F) \cap Z_P(G)$, i.e. x
 $F(q_0, q_1, q_2) = G(q_0, q_1, q_2) = 0 \Rightarrow R(q_0, q_1) = 0 \Rightarrow (q_0, q_1) \in Z(R(x_0, x_1))$

Allora è ben definita la mappa dimenticante

$$\Phi: Z_P(F) \cap Z_P(G) \longrightarrow Z_P(R_{x_2}(F, G))$$

• **Φ INiettiva:** $Q = (q_0, q_1, q_2), Q' = (q_0, q_1, q_2') \Rightarrow Q, Q' \in \{q_1 x_0 - q_0 x_1 = 0\} \cap E_2 \Rightarrow$ contraddice ammiss. 2)

• **Φ Suriettiva:** $R(q_0, q_1) = 0 \Rightarrow$ considero $\tilde{F}(x_2) := F(q_0, q_1, x_2), \tilde{G}(x_2) := G(q_0, q_1, x_2)$ i.e. $(\deg(\text{GCD}(\tilde{F}, \tilde{G}))) \geq 1$
 $\Rightarrow$ per ammiss. 1) $\deg(\tilde{F}) = r \geq 1, \deg(\tilde{G}) = s \geq 1$ & $(x_2 - q_2) | \tilde{F} \wedge (x_2 - q_2) | \tilde{G}$
 $\Rightarrow (q_0:q_1:q_2)$ è preimmagine.

THM [BÉZOUT, FORMA DEBOLE]

- $K = \overline{K}$ (tipica di Bézout)
- $F \in K[x_0, x_1, x_2]_{r \geq 1}$, $G \in K[x_0, x_1, x_2]_{s \geq 1}$

Allora:

$$|z_p(F) \cap z_p(G)| \geq rs + 1 \Rightarrow \deg(\text{GCD}(F, G)) \geq 1$$

ovvero hanno un
fattore irriducibile
in comune

Dim.: Per assurdo $\text{GCD}(F, G) \equiv 1 \Rightarrow$ possiamo assumere a meno di proiettività ammissibilità rispetto a $E_2 \xRightarrow{\text{PROP}} |z_p(F) \cap z_p(G)| = |R_{x_2}(F, G)| \geq rs + 1 \Rightarrow \text{contraddizione}$

$\wedge$
 rs

$\nwarrow$ ipotesi
 $\nwarrow$ #radici $\leq$ grado (in questo caso esattamente uguale, visto che $K = \overline{K}$)
con molteplicità

DEF F, G in POS. AMMISSIBILE per $\mathbb{E}_2$

Allora la MOLTEPLICITA' di INTERSEZIONE $I_Q(F, G)$ di F e G nel punto Q è definita come la molteplicità come zero di $R_{x_2}(F, G)$:

(q_0 : q_1 : q_2)

$$R_{x_2}(F, G) =: (q_1 x_0 - q_0 x_1)^{I_Q(F, G)} \cdot H(x_0, x_1)$$

Se $Q \notin Z_P(F) \cap Z_P(G) \Rightarrow I_Q(F, G) = 0$ comunque ben definita con $H(q_0, q_1) \neq 0$

THM [BÉZOUT, FORMA FORTE]

- $K = \overline{K}$ (tipica di Bézout)
- $F \in K[x_0, x_1, x_2]_{r \geq 1}$, $G \in K[x_0, x_1, x_2]_{s \geq 1}$

Allora:

$$\sum_{Q \in \mathbb{P}_K^2} I_Q(F, G) = r \cdot s$$

← sarebbe come dire $Q \in Z_P(F) \cap Z_P(G)$ perché altrimenti $I_Q(F, G) = 0$

Dim.: Possiamo assumere POS. AMMISS per $\mathbb{E}_2$. Allora

$$\sum_{Q \in \mathbb{P}_K^2} I_Q(F, G) = \sum_{Q \in Z_P(F) \cap Z_P(G)} I_Q(F, G) \stackrel{\text{def } I_Q}{=} \sum_{(q_0 : q_1) \in Z_P(R_{x_2}(F, G))} m_{(q_0 : q_1)}(R_{x_2}(F, G)) = \# \text{ZERI di } R_{x_2}(F, G) \stackrel{K = \overline{K}}{=} \deg(R_{x_2}(F, G))$$

-5- $I_Q(F, G) = 0$ se $Q \notin Z_P(F) \cap Z_P(G)$ vero per ogni polinomio CONTATI CON MOLTEPLICITA' DEF RESULTANTE + AMMISSIB. $\square$

(COR) $K = \overline{K} \Rightarrow$ due curve algebriche piane si intersecano.

Dim.: $r, s \geq 1 \Rightarrow r \cdot s \geq 1 \Rightarrow \sum_{Q \in \mathbb{P}_K^2} I_Q(F, G) \geq 1 \Rightarrow Z_p(F) \cap Z_p(G) \neq \emptyset \quad \square$
 $Q \in \mathbb{P}_K^2 \Rightarrow Z_p(F) \cap Z_p(G)$

Domanda: Se uno stesso punto ha una certa molteplicità per F , e un'altra per G , come si comporta $I_Q(F, G)$ rispetto a queste?

(PROP) $Z_p(F), Z_p(G)$ curve, $\text{GCD}(F, G) = 1$, Q ha molteplicità m per $Z_p(F)$
 " " " " $Z_p(G)$

Allora $I_Q(F, G) \geq m \cdot n$

Dim.: Wlog POS. AMMISS. per $\mathbb{P}_2$, wlog $Q = E_0 = (1:0:0) \in \mathcal{U}_0 \cong \mathbb{A}_K^2$
 perché le proiettività preservano le molteplicità.
Q DIVENTA QUINDI L'ORIGINE NELL'AFFINE!

$\begin{cases} Z_p(aF) = Z_p(F) \cap \mathcal{U}_0 \\ Z_p(aG) = Z_p(G) \cap \mathcal{U}_0 \end{cases}$ Allora consideriamo:

$$aF = f_r(x)y^r + \dots + f_1(x)y + f_0(x)$$

$$aG = g_s(x)y^s + \dots + g_1(x)y + g_0(x)$$

entrambe espresse nella variabile y

Ricordiamoci ora cosa vuol dire avere molteplicità m (oppure n) nell'origine grazie all'espansione di Taylor! Non ci devono essere termini di grado minore o uguale a $m-1$ (risp. $n-1$) ed ALMENO UN TERMINE di grado m (risp. n), dove il grado è in entrambe le variabili.

Allora possiamo imporre wlog:

$$f_i(x) = x^{m-i} \cdot \exists a_i(x), \quad g_j(x) = x^{n-j} \cdot \exists b_j(x)$$

$$i = 0, \dots, m-1 \quad j = 0, \dots, n-1$$

Non resta che dimostrare che $R_{x_2}(F, G)$ è divisibile per $x^{n \cdot m}$, ovvero che

$$x^{n \cdot m} \mid \det \begin{pmatrix} f_r(x) & f_{r-1}(x) & \dots & x^{m-1}a_1(x) & x^m a_0(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_r(x) & f_{r-1}(x) & \dots & x^{m-1}a_1(x) & x^m a_0(x) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_s(x) & g_{s-1}(x) & \dots & x^{n-1}b_1(x) & x^n b_0(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_s(x) & g_{s-1}(x) & \dots & x^{n-1}b_1(x) & x^n b_0(x) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

E questo si fa moltiplicando opportunamente le righe per la corretta potenza di x (per esercizio, poi vedi note) □ -7-

§ 7.1.2. Stima sul numero di punti singolari di curve ridotte

(TEO) $K = \overline{K}$. $Z_P(F)$ curva **RIDOTTA** di grado d .
 e qui già vi si deve accendere la LAMPADINA DI BÉZOUT! 

Allora:

$$\sum_{Q \in \mathbb{P}_K^2} \binom{m_F(Q)}{2} \leq \binom{d}{2}$$

$\binom{m_F(Q)}{2}$ ← molteplicità di Q per F
 $\sum_{Q \in \mathbb{P}_K^2}$ ← c'è la stessa cosa che $\sum_{Q \in \text{Sing}(Z_P(F))} \textcircled{2}$ siccome $\binom{0}{2} = \binom{1}{2} = 0$
 wow! Questo è un grande risultato

Inoltre:

- 1) $|\text{Sing}(Z_P(F))| \leq \binom{d}{2}$
 ← l'insieme dei punti singolari (i.e. punti Q con $m_F(Q) \geq 2$), che è FINITO per curve RIDOTTE sappiamo già
- 2) La stima è sharp, infatti $Z_P(F) :=$ unione di d RETTE DISTINTE realizza l'uguaglianza.

Dim.: Se $d=1 \Rightarrow Z_P(F)$ è una retta $\Rightarrow \text{Sing}(Z_P(F)) = \emptyset \Rightarrow 0 = \sum_{\emptyset} \leq \binom{1}{2} = 0$ ✓
 Se $d \geq 2$ l'idea rispetto ad altre dim. precedenti è:

" $G := \partial_{x_2} F$ ", e poi applica Bézout.

← a meno di proiettività

Innanzitutto se $d \geq 2 \Rightarrow \deg(\partial_{x_2} F) \geq 1$, quindi entrambe F e $\partial_{x_2} F$ hanno grado positivo. $Z_P(F)$ **RIDOTTA** $\Rightarrow F$ **RIDOTTA** $\Rightarrow \text{GCD}(F, \partial_{x_2} F) = 1$ e quindi $Z_P(F), Z_P(\partial_{x_2} F)$ non hanno componenti irriducibili in comune. Infatti se $H|F \wedge H|\partial_{x_2} F, H=H(x_2) \Rightarrow \partial_{x_2} F = \partial_{x_2}(H \cdot G) = (\partial_{x_2} H) \cdot G + H \partial_{x_2} G \Rightarrow H|G \Rightarrow H^2|F \Rightarrow F$ **NON** **RIDOTTA** $\leadsto$ assurdo.

Allora wlog possiamo assumere $Z_P(F), Z_P(\partial_{x_2} F)$ in POS. AMMISS. per E_2

$$\sum_{Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2} m_F(Q)(m_F(Q)-1) \leq \sum_{Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2} I_Q(F, \partial_{x_2} F) \leq d(d-1)$$

$\uparrow$ PROP SCORSA
 $\forall Q \quad I_Q(F, \partial_{x_2} F) \geq m_F(Q) \cdot \underbrace{m_{\partial_{x_2} F}(Q)}_{= m_F(Q)-1}$

$\uparrow$ Bézout forma forte

$\deg(F)$
 $\deg(\partial_{x_2} F)$

Questa dimostra la prima parte dell'enunciato.

Chiaramente sappiamo che $Z_P(F)$ RIDOTTA $\Rightarrow$ ci sono soltanto un numero finito di punti singolari $\Rightarrow \text{Sing}(Z_P(F)) = \{P_1, \dots, P_s\}$
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^s \binom{m(P_i)}{2} \leq \binom{d}{2} \Rightarrow s \leq \binom{d}{2}$ perché s più grande possibile

si ottiene per $m(P_i) = 2, i=1, \dots, s$, allora $\binom{m(P_i)}{2} = 1 \forall i$.

Pero è anche vero che siccome tutti i termini delle somme sono coefficienti binomiali, allora sono **NON NEGATIVI**, quindi avremmo potuto ricavare l'enunciato

$$Z_P(F) \text{ RIDOTTA} \Rightarrow |\text{Sing}(Z_P(F))| < +\infty$$

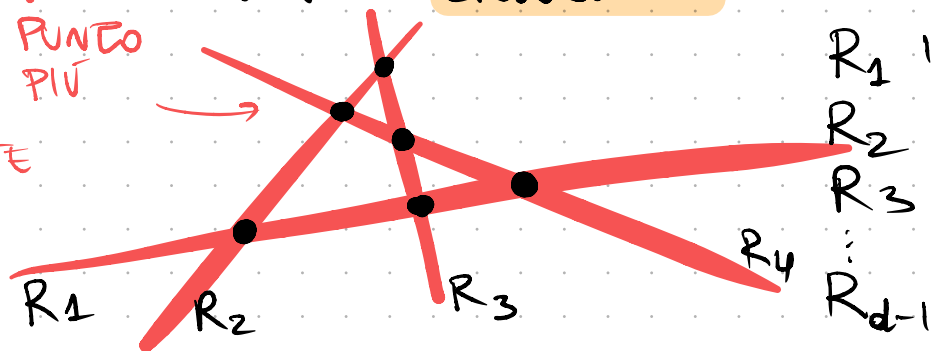
anche come corollario di questo teorema! Dimostriamo

l'ultima parte dell'enunciato. $F = F_1 \cdot \dots \cdot F_d$ fattori distinti

$\Rightarrow Z_P(F) = \bigcup_{i=1}^d R_i$ **RETE GENERALI** [ogni coppia di rette si interseca!]

"GENERALI":
PER OGNI PUNTO
PASSANO AL PIÙ

DUE RETTE



R_1	INTERSECA	$d-1$	ALTRE RETTE IN	$d-1$	PUNTI
R_2	"	IN $d-2$	PUNTI NON ANCORA CONTATI		
R_3	"	IN $d-3$	"	"	"
$\vdots$					
R_{d-1}	"	IN 1	"	"	"

$$\Rightarrow s = (d-1) + (d-2) + \dots + 2 + 1 = \binom{d}{2}$$

□

