

- tautologia: proposizione (composta) che ha la tabella di verità con tutte V
(prop. comp. sempre vera a prescindere dal valore V o F delle componenti).

Es. $P \vee \neg P$

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
V	F	V
F	V	V

 Tautologia non data

- $\neg(P \wedge \neg P)$ non contraddittorio
- $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ modus ponens tautologia
- $(\neg Q \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow \neg P$ modus tollens
- $(P \wedge ((\neg P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q))) \Rightarrow Q$ reductio ad absurdum

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge (P \Rightarrow Q)$	$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

- Predicati
- es. $P(x)$ proprietà (di x in un certo ambiente)
 - es. $Q(x, y)$ relazione (tra x un certo ambiente e y in un certo ambiente)
 - es. $R(x, y, z)$

- quantificatori
- $\forall$ universale
 - $\exists$ esistenziale

il quantificatore "fa sparire" una variabile

- es. $P(x)$ x è più alto di 180 cm
- $\forall x, P(x)$: tutti sono più alti di 180 cm
non ci sono più variabili (proposizioni)

- es. $Q(x, y)$ l'astronomo x studia la stella y
- $\exists x: Q(x, y)$ almeno un astronomo studia la stella y
l'unica variabile è la stella y

- $\exists x: \forall y, Q(x, y)$ esiste un astronomo che studia tutte le stelle.

- $\forall y, \exists x: Q(x, y)$
per ogni stella c'è un astronomo che la studia

Importante come si fanno le negazioni di predicati o proposizioni con quantificatori

$$\neg(\forall x, P(x)) = \exists x: \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x: P(x)) = \forall x: \neg P(x)$$

- Es. sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $\mu \in \mathbb{R}$
insieme di numeri numero

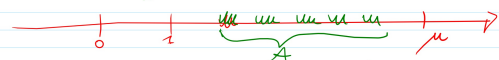
μ dice maggiore di A se $\forall a \in A, a \leq \mu$



se A non ha maggioranti, A non dice superiore distribuito.

Es. sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $\mu \in \mathbb{R}$
insieme di numeri numero

μ è un numero maggiore di A se $\forall a \in A, a \leq \mu$



se A non ha maggioranti, A si dice superiore illimitato.

qual è una frase equivalente per dire che A è sup. illimitato?

sup. illimitato $\exists \mu \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \leq \mu$

$\neg(\text{sup. limit.}) \quad \neg(\exists \mu \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \leq \mu)$

$\neg(\exists x : \forall y, Q(x,y))$

$\Updownarrow$

$\forall x, \neg(\forall y, Q(x,y))$

$\Updownarrow$

$\forall x, \exists y : \neg Q(x,y)$

$\downarrow$
 $\forall \mu \in \mathbb{R}, \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > \mu$

Es. non è vero che c'è un astronomo che studia tutte le stelle
 che non è vero?

$Q(x,y)$ ast x studia la stella y

$(\exists x : \forall y, Q(x,y))$

$\neg(\exists x : \forall y, Q(x,y)) = \forall x, \exists y : \neg Q(x,y)$

per ogni astronomo $\exists$ una stella che non è studiata da quell'astronomo.

Es. falso che c'è un ospedale in cui almeno un medico ha sbagliato tutte le diagnosi
 vero?

$Q(x,y,z)$ nell'ospedale x , il medico y ha sbagliato la diagnosi z

$\neg(\exists x : \exists y : \forall z, Q(x,y,z))$

$\forall x, \forall y, \exists z : \neg Q(x,y,z)$

in ogni ospedale ogni medico ha fatto almeno una diagnosi.

Insieme

- oggetti o elementi // due individui con lettere numerate a, b, c
- gruppi o insiemi // da loro "una famiglia" di elementi pensati come un nuovo oggetto lettere numerate A, B, C

concetto fondamentale: gli insiemi sono individui dai loro elementi

relazione di appartenenza

$a \in A$
elemento insieme

appartiene

concetto fondamentale: gli insiemi sono identificati dai loro elementi

relazione di appartenenza

$a \in A$

elemento

insieme

appartiene

quindi due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi (estesa)

$$A=B \Leftrightarrow \forall a, a \in A \Rightarrow a \in B$$

$$\forall b, b \in B \Rightarrow b \in A$$

es. $A = \{a, b, c\}$

$B = \{b, a, c\}$

$A=B$?

$a \in A$

$B \subseteq B$

Sottoinsieme $\forall$ dico che A è sottoinsieme di B

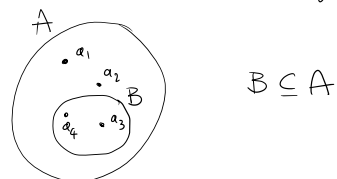
se $\forall a, a \in A \Rightarrow a \in B$

si scrive $A \subseteq B$

quindi

$$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

si rappresentano bene con i diagrammi di Eulero (o Eulero-Venn)



come si rappresentano gli insiemi?

i) elencando tutti gli elementi

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

ii) considerando un insieme "ambiente" e individuando in un predicato

$$B = \{x \in A : P(x)\}$$

es. sia $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ numeri naturali (grato insieme)

numeri pari $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

$$= \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k)\}$$

$$Q(n, k) : n = 2k$$

$$(\exists k : Q(n, k)) = P(n)$$

- ante un insieme senza elementi, lo denotiamo con l'insieme vuoto, lo indico con $\emptyset$

- è unico

- è sottoinsieme di tutti gli insiemi

- dato un insieme posso considerare un nuovo insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi dell'insieme

si dice insieme delle parti di A , $\mathcal{P}(A)$

Es $A = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

ES. $x \in A$ ha n elementi
 quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(A)$?

$$A = \emptyset \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \quad 1$$

$$A = \{a\} \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\} \quad 2$$

$$A = \{a, b\} \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \quad 4$$

$$A = \{a, b, c\} \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \quad 8$$

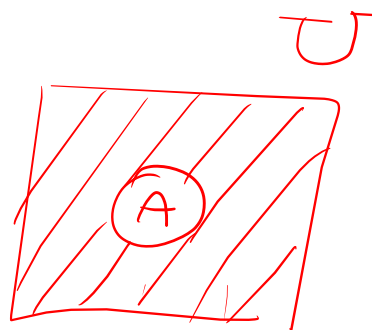
$$|A| = n$$

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

Operazioni con gli insiemi (sono legate ai connettivi)

- insieme complementare

sia U ^{universo} universo, $A \subseteq U$
 $\mathcal{C}_U A = \{x \in U : \neg(x \in A)\}$
^{complementare}



siano A, B insiemi

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

