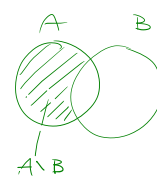


Insicemi

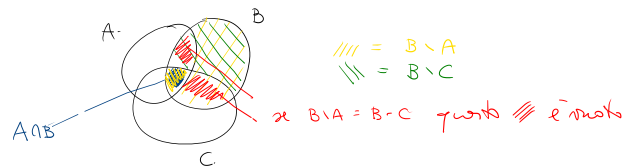
$$A \setminus B = A \cap B^c$$

$$= \{x \in A : x \notin B\}$$



insiemi A, B, C

$$\text{Sia } B \setminus A = B \setminus C \Leftrightarrow A \cap B = B \cap C$$

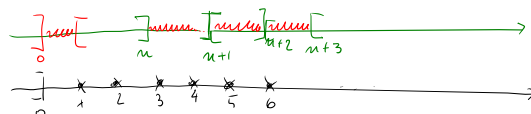


Es. sia $\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n = \{x \in \mathbb{R} : n < x < n+1\}$

si determinano $\bigcup_n A_n, \bigcap_n A_n$

$$\bigcup_n A_n = \{x : \exists n : x \in A_n\} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

$$\bigcap_n A_n = \{x : \forall n, x \in A_n\}$$



$$\bigcup_n A_n = [0, +\infty[\cap \mathbb{N}^+ \quad \bigcap_n A_n = \emptyset$$

$$\mathbb{N}^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Prodotto cartesiano di insiemi - Richiami

dati 2 elementi introduciamo la coppia ordinata

$$(a, b)$$

attenzione $(a, b) \neq \{a, b\}$

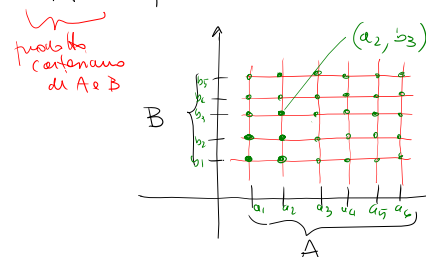
$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

si distinguono
un primo elemento
 a
un secondo elemento
 b

es. $\{a, b\} = \{b, a\}$

def. A, B insiemi diversi

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$



es. nulla vieta che $A = B$ in questo caso

$$A \times A = A^2$$

(in generalità $A \times B \times C = \{\text{terne}\}$)

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{n\text{-uple}\}$

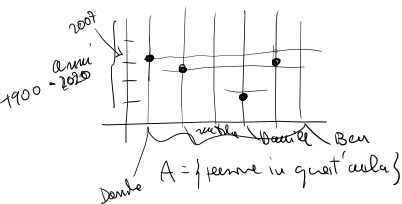
Relazioni tra A e B

A, B insiemi

$A \times B$ prodotto cartesiano

$R(a,b)$ predicato in cui la prima variabile è in A
e la seconda in B Relazione su $A \times B$

$G_R = \{(a,b) : R(a,b) \text{ è verificata}\}$ grafico della relazione



$R(a,b) : a \text{ è nato nell'anno } b$

osservare
ogni relazione ha un grafico
(è un sottoinsieme di $A \times B$)

ogni sottoinsieme di $A \times B$
è grafico di una relazione
tra A e B

Relazioni in A

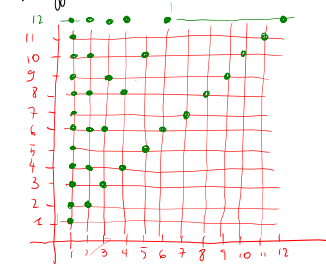
relazioni relenze in A
una relazione tra A e A
(cioè $B=A$)

Es. $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\} = A$

consideriamo la relazione " $|$ " (lo diciamo "divide")

$m | n$ se $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : n = k \cdot m$

si legge "m divide n"



Es. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = A$

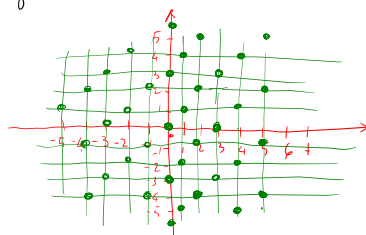
fissiamo $m=3$

$k \equiv_l n \iff \exists z \in \mathbb{Z} : k - n = 3 \cdot z$

k è congruente ad n modulo 3

relazione di congruenza modulo 3

(congruenza modulo m $k - n$ è un multiplo di m)



Proprietà delle relazioni in A

Proprietà delle relazioni su A

su A un insieme, ρ una relazione

i) la relazione ρ si dice riflessiva
 $\forall a \in A, a \rho a$

ii) la relazione ρ si dice simmetrica
 $\forall a, b \in A, a \rho b \Rightarrow b \rho a$

iii) ρ si dice antisimmetrica
 $\forall a, b \in A, a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b$

es. proviamo che $|$ è antisimmetrica

sufficiente $k|l_1$ e $l_1|k$

$k|l_1$ significa $\exists z_1 \in \mathbb{C}, k \cdot z_1 = l_1$

$l_1|k$ " $\exists z_2 \in \mathbb{C}, l_1 \cdot z_2 = k$

mettiamo insieme $k \cdot z_1 \cdot z_2 = k$

quindi $k \cdot z_1 \cdot z_2 - k = 0$ quindi $k(z_1 \cdot z_2 - 1) = 0$
 $k \neq 0 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 - 1 = 0$

$z_1 \cdot z_2 = 1$
 per $z_1, z_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
 necessariamente $z_1 = z_2 = 1$
 $\Rightarrow k = l_1$ QED

iv) ρ si dice transitiva se

$\forall a, b, c \in A, a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c$

Es. la relazione $|$ è transitiva? $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}(x, y) \\ x \rho y \equiv f(x, y) \end{array} \right.$

$k|l_1 \wedge l_1|m \stackrel{?}{\Rightarrow} k|m$

$k|l_1$ cioè $\exists z_1 \in \mathbb{C}, l_1 = z_1 \cdot k$

$l_1|m$ cioè $\exists z_2 \in \mathbb{C}, m = z_2 \cdot l_1 \Rightarrow m = (z_2 \cdot z_1) \cdot k$

$\Downarrow$
 $k|m$ QED

la relazione $\equiv_3$ è transitiva?

$k \equiv_3 l_1 \wedge l_1 \equiv_3 m \stackrel{?}{\Rightarrow} k \equiv_3 m$

$k \equiv_3 l_1 \Rightarrow k - l_1 = 3 \cdot z_1$

$l_1 \equiv_3 m \Rightarrow l_1 - m = 3 \cdot z_2$

sommo le due equazioni

$k - m = 3z_1 + 3z_2 = 3(z_1 + z_2)$

$k - m = 3(z_1 + z_2) \Rightarrow k \equiv_3 m$

QED

Abbiamo $|$ (divide) è $\left\{ \begin{array}{l} \text{riflessiva} \\ \text{antisimmetrica} \\ \text{transitiva} \end{array} \right.$

$\equiv_3$ (congruenza modulo 3) è $\left\{ \begin{array}{l} \text{riflessiva} \\ \text{simmetrica} \\ \text{transitiva} \end{array} \right.$

def. se ρ relazione su A è $\left\{ \begin{array}{l} \text{rifl.} \\ \text{antisim.} \\ \text{trans.} \end{array} \right.$

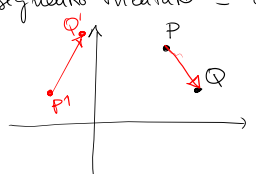
Relazione
d'ordine
(ORDINAMENTO)

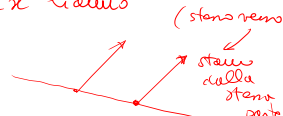
se ρ relazione su A è $\left\{ \begin{array}{l} \text{rifl.} \\ \text{sim.} \\ \text{trans.} \end{array} \right.$

Relazione di
equivalenza

Relazioni di equivalenza

Es. $A = \{ \text{segmenti orientati del piano} \}$
(o della sfera)

segmento orientato = coppia di punti (P, Q)


due segmenti sono in relazione $\sim$ se e solo se:
 - stessa lunghezza
 - stessa direzione
 - stesso verso


è una relazione di equivalenza

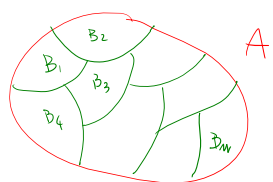
Es. consideriamo $A = \mathbb{R}$

$$x \leq y \begin{cases} \text{riflessiva} & x \leq x \\ \text{antisimmetrica} & x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y \\ \text{transitiva} & x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \end{cases}$$
 è l'ordine

def. sia A un insieme, $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$
 sottoinsiemi di A

se
 i) $\forall i, B_i \neq \emptyset$
 ii) $\forall i, j, B_i \cap B_j \neq \emptyset \Rightarrow B_i = B_j$
 iii) $\bigcup_i B_i = A$

la famiglia $\{B_i\}$ si dice partizione di A



def. sia A un insieme, sia $\sim$ una relazione di equivalenza
 sia $a \in A$

l'insieme $[a]_{\sim} = \{ b \in A, \text{ t.c. } b \sim a \}$

è la classe di equivalenza di a
 (sono tutti gli elementi in relazione con a)

Ten $\{ [a]_{\sim}, a \in A \}$ sono una partizione di A

Es. $\mathbb{Z}_{12}, \equiv_3$

$[0]_{\equiv_3} = \{ \dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots \}$

$[1]_{\equiv_3} = \{ \dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots \}$

Es. $\mathbb{Z}_3 \equiv_3$

$$[0]_{\equiv_3} = \{ \dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots \}$$

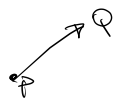
$$[1]_{\equiv_3} = \{ \dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots \}$$

$$[2]_{\equiv_3} = \{ \dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots \}$$

$[3]_{\equiv_3} = [0]_{\equiv_3}$

$[4]_{\equiv_3} = [1]_{\equiv_3}$

Es. $A = \text{'segmenti orientati'}$, $\sim$ stessa lunghezza, dir. verso.

 $[\vec{PQ}]_{\sim} =$

def. l'unione dei due per identificare domini di equivalenza lo stesso unione quoziente (di A rispetto a $\sim$) lo indico con $A/\sim$

$$\mathbb{Z}_3/\equiv_3 = \{ [0], [1], [2] \}$$

$\frac{\{\text{seg. orient.}\}}{\sim} : \nabla \text{ vettori}$

consideriamo $\equiv_{12}$

$$x \equiv_{12} y \iff x - y = 12 \cdot m$$

$\exists m \in \mathbb{Z}$

è relazione di equivalenza

$[0]$
 $[1]$
 $[2]$
 $[3]$
:

$m_1 \equiv_{12} m_2$
 $l_1 \equiv_{12} l_2$

$[3] + [1] = [2]$

$\Rightarrow$

$$m_1 + l_1 \equiv_{12} m_2 + l_2$$

$$m_1, l_1 \equiv_{12} m_2, l_2$$

$[11]$