



gas biatomico
 $C_v = \frac{5}{2} R$ $C_p = \frac{7}{2} R$ $\gamma = \frac{7}{5}$

Esercizio n.1

$$m_a = 0,50 \text{ kg}$$

$$T_i = 20^\circ \text{C} = 293,15 \text{ K}$$

$$p_a = 1 \text{ atm}$$

$$m_g = 20 \text{ g} = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

$$T_g = -10^\circ \text{C} = 263,15 \text{ K}; \text{ definisco } T_o = 273,15 \text{ K} = 0^\circ \text{C}$$

- Il nuovo equilibrio termodinamico si ottiene quando il ghiaccio si è sciolto, raffreddando acqua e gas.

Mi aspetto quindi uno stato finale con

$$\left. \begin{array}{l} m = m_a + m_g \text{ di acqua liquida e} \\ n = 1 \text{ mol di gas} \end{array} \right\} \text{ a } T_e < T_i$$

Poiché la variazione di volume da:

m_a liquido + m_g solido a:

$$m = (m_a + m_g) \text{ liquido}$$

è molto piccola, tutta la variazione di volume del sistema è ascrivibile al gas, il quale raffreddandosi a p_a costante diminuirà di volume, per cui mi aspetto un lavoro negativo, effettuato dall'ambiente sul gas

- Passando ad una descrizione quantitativa:

$$\text{recipiente adiabatico} \Rightarrow Q = 0 \Rightarrow \Delta U = -L$$

$$\text{con } \Delta U = \Delta U_a + \Delta U_g + \Delta U_{\text{gas}}$$

$$\Delta U_a = m_a c_a (T_e - T_i)$$

$$\Delta U_{\text{gas}} = n C_v (T_e - T_i) \text{ ed inoltre}$$

già assegnato il
4/09/2025
e disponibile su Moodle
errore mio



$$\Delta U_{\text{gas}} + L = Q_{\text{gas}} = n c_p (T_e - T_i)$$

Per quanto riguarda invece il ghiaccio, ΔU_g è dato da:

$$\Delta U_{g, \text{risc-s}} = m_g c_g (T_o - T_g) \quad \text{riscaldamento ghiaccio solido}$$

$$\Delta U_{g, f} = m_g L_f \quad \text{fusione ghiaccio}$$

$$\Delta U_{g, \text{risc-l}} = m_g c_a (T_e - T_o) \quad \text{riscaldamento ghiaccio liquido}$$

$$\text{Quindi } \Delta U_g = \Delta U_{g, \text{risc-s}} + \Delta U_{g, f} + \Delta U_{g, \text{risc-l}}$$

$$= 2 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot 2.09 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 10 \text{ K} +$$

$$+ 2 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot 3.34 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1} + m_g c_a (T_e - T_o)$$

$$= 4.18 \cdot 10^2 \text{ J} + 6.68 \cdot 10^3 \text{ J} + m_g c_a (T_e - T_o)$$

$$= 7.098 \text{ kJ} + m_g c_a (T_e - T_o)$$

• Rimettendo quindi tutto assieme:

$$\Delta U = \Delta U_a + \Delta U_g + \Delta U_{\text{gas}} = -L$$

$$\Delta U_a + \Delta U_g + \Delta U_{\text{gas}} + L = 0$$

$$m_a c_a (T_e - T_i) + 7.098 \text{ kJ} + m_g c_a (T_e - T_o) + n c_p (T_e - T_i) = 0$$

$$T_e (m_a c_a + m_g c_a + n c_p) = m_a c_a T_i + m_g c_a T_o + n c_p T_i - 7.098 \text{ kJ}$$

$$a) T_e = \frac{(m_a c_a + n c_p) T_i + m_g c_a T_o - 7.098 \text{ kJ}}{(m_a + m_g) c_a + n c_p} = 289.2 \text{ K}$$

$$T_e \approx 16 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$b) \text{ Poiché la pressione resta costante, } L = p_a (V_e - V_i)$$

$$= n R (T_e - T_i) = -33 \text{ J}$$

il segno negativo indica un lavoro fatto sul gas, come atteso.

c) La variazione di entropia dell'universo in questo caso coincide con la variazione di entropia del sistema, in quanto il sistema non scambia calore con l'esterno.



Quindi $\Delta S_u = \Delta S = \Delta S_a + \Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_g$

$$\Delta S_a = \int_i^e \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = m_a c_a \int_i^e \frac{dT}{T} = m_a c_a \ln \frac{T_e}{T_i}$$
$$= -28,59 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad \text{negativa perché si raffredda}$$

$$\Delta S_{\text{gas}} = \int_i^e \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = n c_p \int_i^e \frac{dT}{T} = n c_p \ln \frac{T_e}{T_i}$$
$$= -0,397 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad \text{negativa perché si raffredda}$$

Più delicato è il calcolo della variazione di entropia del ghiaccio, che si riscalda da solido, si scioglie ed infine si riscalda da liquido; a ciascun processo corrisponde una variazione di entropia:

$$\Delta S_g = \Delta S_{g, \text{risc.s}} + \Delta S_{g, f} + \Delta S_{g, \text{risc.l}}$$

$$\Delta S_{g, \text{risc.s}} = m_g c_g \ln \frac{T_0}{T_g} = 1,56 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$
$$\Delta S_{g, \text{risc.l}} = m_g c_a \ln \frac{T_e}{T_0} = 4,77 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

} positive perché si riscalda

$$\Delta S_{g, f} = \frac{Q_{g, f}}{T_0} = \frac{\Delta U_{g, f}}{T_0} = \frac{6,68 \cdot 10^3 \text{ J}}{273,15 \text{ K}} = 24,45 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

anche questa positiva, come deve essere nella fusione. Sommando tutti i contributi, si ha:

$$\Delta S_u = \Delta S = \Delta S_a + \Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_g = 1,8 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

positivo, come ci si aspetta per un processo irreversibile.

NOTA: sebbene i contributi principali a ΔS siano ΔS_a e $\Delta S_{g, f}$, anche gli altri non sono trascurabili: infatti $\Delta S_a + \Delta S_{g, f} < 0$!

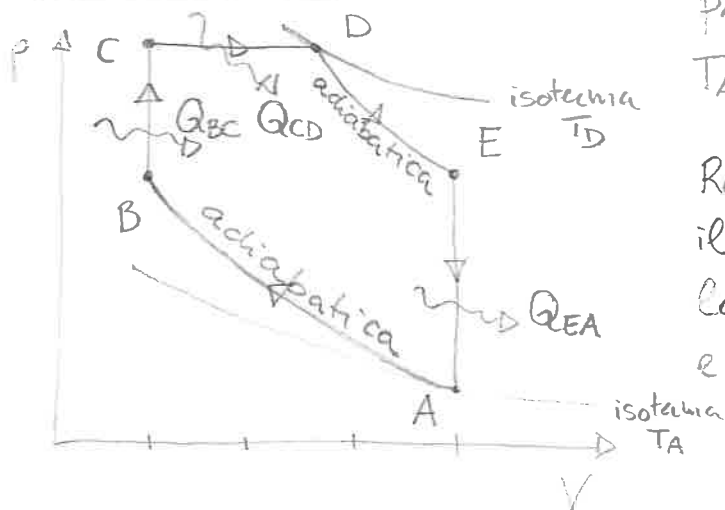


gas perfetto bisatonico:

$$c_v = \frac{5}{2} R \quad \gamma = \frac{7}{5}$$

$$c_p = \frac{7}{2} R$$

Esercizio n. 2



$$p_A = 1.00 \text{ bar} = 1.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_A = 300 \text{ K}$$

Rappresento qualitativamente il ciclo; si vede subito che la pressione è massima in C e D e che la temperatura è massima in D.

- Una (lunga) parte preliminare è determinare gli stati ABCDE:

$$V_A = \frac{n R T_A}{p_A} = \frac{8,314 \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K}}{10^5 \text{ Pa}} = 2,494 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$V_B = \frac{V_A}{4} = 6,236 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

- A e B stanno sulla stessa adiabat:

$$p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma$$

$$p_B = p_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^\gamma = 10^5 \text{ Pa} (4)^{7/5} = 6,964 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{n R} = 522,33 \text{ K}$$

- B e C sono collegati da una isocora

$$V_C = V_B = \frac{V_A}{4} = 6,236 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\frac{p_C}{p_B} = \frac{T_C}{T_B}, \text{ ovvero } T_C = T_B \frac{p_C}{p_B}$$

$$\text{inoltre } Q_{BC} = n c_v (T_C - T_B) = 10 \text{ kJ}$$

$$= \frac{5}{2} R T_B \left(\frac{p_C}{p_B} - 1 \right) = 10 \text{ kJ} \Rightarrow \frac{p_C}{p_B} = 1 + \frac{\frac{2}{5} \cdot 10 \text{ kJ}}{R T_B}$$

$$\Rightarrow p_C = 1,338 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

(p massima)

oppure, sempre da $Q_{BC} = nC_V(T_C - T_B) = 10 \text{ kJ}$

$$\Rightarrow T_C = \frac{10 \text{ kJ}}{\frac{5}{2}R} + T_B = 1003 \text{ K}$$

(e naturalmente si può verificare che $\frac{p_C V_C}{T_C} = R$)

- C e D sono collegati da una isobara

$$p_D = p_C = 1,338 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Infatti, poiché $Q_{CD} = nC_P(T_D - T_C) = 8 \text{ kJ}$

$$\Rightarrow T_D = \frac{8 \text{ kJ}}{\frac{7}{2}R} + T_C = 1278 \text{ K} \quad (T_{\text{massima}})$$

e $V_D = \frac{nRT_D}{p_D} = 7,944 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

- D e E sono collegati da un'adiabatica, e

$$V_E = V_A = 2,494 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$p_D V_D^\gamma = p_E V_E^\gamma$$

$$p_E = p_D \left(\frac{V_D}{V_E} \right)^\gamma = 2,696 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_E = \frac{p_E V_E}{nR} = 808,9 \text{ K}$$

E con questo tutte le coordinate termodinamiche degli stati ABCDE sono note. In particolare:

a) La pressione massima raggiunta è $p_C = p_D = 1,338 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

b) La temperatura massima raggiunta è $T_D = 1278 \text{ K}$

c) Il calore ceduto dal gas nella isocora EA è:

$$Q_{EA} = nC_V(T_A - T_E) = \frac{5}{2}R(808,9 - 300) \text{ K} = -10,578 \text{ kJ}$$

d) Il rendimento del ciclo è

$$\eta = \frac{L}{Q_{\text{ass}}} = 1 + \frac{Q_{\text{ced}}}{Q_{\text{ass}}} = 1 + \frac{Q_{EA}}{Q_{BC} + Q_{CD}} = 1 - \frac{10,578}{10 + 8} = 0,4124$$

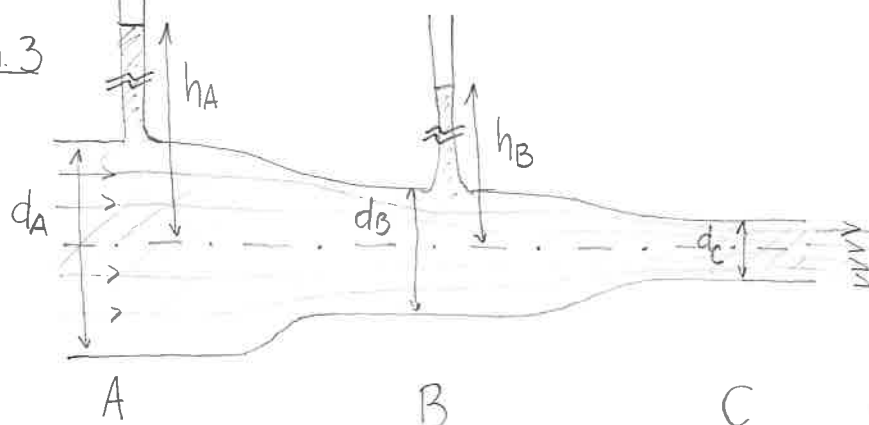
$$\eta \approx 41\%$$

mentre un ciclo di Carnot operante tra due serbatoi alle due temperature estreme avrebbe un rendimento

$$\eta_c = 1 - \frac{T_A}{T_D} \approx 76\%$$



Es. n. 3



$$d_A = 1,55 \text{ cm}$$

$$d_B = 0,86 \text{ cm}$$

$$d_C = 0,80 \text{ cm}$$

$$Q = 74 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$p_A - p_{\text{atm}} = 29,4 \text{ mbar}$$

$$= 2,94 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

a) Per definizione, $Q = vA$ e quindi in particolare:

$$Q = v_C A_C = v_C \pi \left(\frac{d_C}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow v_C = \frac{4Q}{\pi d_C^2} = \frac{4 \cdot 74 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}}{\pi (0,80 \text{ cm})^2} = 147 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 1,47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) L'altezza h_A misura la differenza di pressione ($p_A - p_{\text{atm}}$) secondo:

$$p_A - p_{\text{atm}} = \rho g h_A$$

$$\Rightarrow h_A = \frac{p_A - p_{\text{atm}}}{\rho g} = \frac{2,94 \cdot 10^3 \text{ Pa}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,30 \text{ m} = 30 \text{ cm}$$

c) Per trovare h_B bisogna conoscere p_B , o almeno $p_A - p_B$.

A tal fine si può applicare Bernoulli tra A e B:

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

$$p_A - p_B = \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2)$$

$$= \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{A_C}{A_B} v_C \right)^2 - \left(\frac{A_C}{A_A} v_C \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \rho A_C^2 v_C^2 \left[\frac{1}{A_B^2} - \frac{1}{A_A^2} \right]$$

$$\text{e } v_A A_A = v_B A_B = v_C A_C$$

$$v_A = \frac{A_C}{A_A} v_C$$

$$v_B = \frac{A_C}{A_B} v_C$$

$$p_A - p_B = \frac{1}{2} \rho Q^2 \left(\frac{1}{A_B^2} - \frac{1}{A_A^2} \right)$$

$$e \quad A = \pi \frac{d^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \rho Q^2 \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1}{d_B^4} - \frac{1}{d_A^4} \right)$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{\text{cm}^3} \cdot \left(74 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \right)^2 \left(\frac{1}{0,86^4} - \frac{1}{1,55^4} \right) \text{cm}^{-4}$$

$$= 7345,5 \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{cm}^2} = 734,55 \text{ Pa}$$

$$10^{-5} \text{ N} \cdot 10^4 \text{ m}^{-2} = 10^{-1} \text{ Pa}$$

Da cui infine:

$$h_B = \frac{p_B - p_{\text{atm}}}{\rho g} = \frac{p_B - p_A + p_A - p_{\text{atm}}}{\rho g} = \frac{p_A - p_{\text{atm}}}{\rho g} - \frac{p_A - p_B}{\rho g}$$

$$= h_A - \frac{p_A - p_B}{\rho g}$$

$$= 30 \text{ cm} - \frac{734,55 \text{ Pa}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$= 30 \text{ cm} - 7,5 \text{ cm} = 22,5 \text{ cm}$$