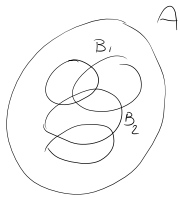


Es. consideriamo A insieme
 su $\mathcal{P}(A)$ consideriamo $\subseteq$ (la relazione "essere sottoinsieme")
 quali sono le proprietà di $\subseteq$

• $\subseteq$ è riflessiva? (si)

$\forall B \subseteq A$
 $(\forall B \in \mathcal{P}(A))$, $B \subseteq B$?



• $\subseteq$ è simmetrica? (no)

$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{P}(A)$ $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_2 \subseteq B_1$?

(no) Es. $A = \{a, b\}$

$\emptyset \subseteq \{a\} \not\subseteq \{a, b\}$
 ~~$\{a\} \subseteq \emptyset$~~
 falso

• $\subseteq$ è antisimmetrica? (si)

$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{P}(A)$, $B_1 \subseteq B_2 \wedge B_2 \subseteq B_1 \Rightarrow B_1 = B_2$?

(si) Vero

• $\subseteq$ è transitiva? (si)

$\forall B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{P}(A)$ $B_1 \subseteq B_2 \wedge B_2 \subseteq B_3 \Rightarrow B_1 \subseteq B_3$?

(si)

$\subseteq$ è una relazione d'ordine.

$\subseteq$ è totale? (no)

Es. $A = \{a, b\}$ $\{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\}$

intuitivamente

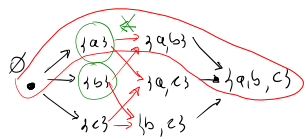
rel. d'ordine totale



due elementi
 uno in relazione
 se primo anche
 del primo al secondo
 rappresenta le
 frecce.

$A = \{a, b, c\}$, $\subseteq$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$



attenzione

se $(A, \subseteq)$ è un insieme
 ordinato
 e $B \subseteq A$,

anche $(B, \subseteq)$ diventa ordinato
 però, se B è opportuno, l'ordinato
 su B può diventare
 totale.

una particolare proprietà degli insiemi ordinati

def. 1 sia A insieme, $\preceq$ una relazione d'ordine

sia $K \subseteq A$

se $\preceq$ su K è una relazione d'ordine totale

K si dice Catena.

def. sia A insieme, $\preceq$ rel. d'ordine

$B \subseteq A$, e $\mu \in A$

se $\forall b \in B$, $b \preceq \mu$ μ si dice maggiore
 di B

def. sia A insieme, $\preceq$ rel. d'ordine

$m \in A$

se $\forall a \in A$, $a \neq m \Rightarrow \neg(m \preceq a)$

nessun elemento di A è "più grande" di m

m si dice maximale

Lemna (di ZORN)

sia A insieme, sia f una rel. d'ordine in A
 Sufficiente che A abbia la seguente proprietà

- ogni catena in A ha almeno un maggiorante

Allora A ha un elemento massimale

oss. il lemma di Zorn è una importante
 proprietà della teoria degli insiemi che
 risulta essere equivalente a

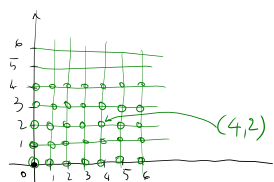
1) ASSIOMA DELLA SCELTA (lo vediamo dopo)

2) TEOREMA DI ZERMELO

(dato un insieme qualunque non vuoto
 una relazione d'ordine tale che ogni insieme
 non vuoto abbia un elemento minimo)

$\forall$ minimo signif. $\forall a \in B$, e $\forall b \in B$, $a \preceq b$
 di B

Es. consideriamo $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$



consideriamo la seguente
 relazione

$$(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2)$$

$$x \quad n_1 + m_2 = m_1 + n_2$$

independente
 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$

Es. verificare x relazione $\sim$ (refl., trans.,
 simm.)

vedere di $\mathbb{Z}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
 $\sim$

è l'unione delle
 classi di
 equivalenza

Funzioni

A insieme

B insieme

f relazione tra A e B

sufficiente valgono 2 proprietà

1) per ogni elemento di A esiste un elemento
 di B tale che a è in relazione con b

$$\forall a \in A, \exists b \in B : a f b$$

2) se a è in relazione con b_1 e a è in relazione
 con b_2 allora $b_1 = b_2$

$$\forall a \in A, \forall b_1, b_2 \in B \quad a f b_1 \wedge a f b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

1)+2) ogni elemento di A è in relazione
 con un unico elemento di B

Se vale 1)+2) la relazione si dice funzione

Ricordo:

una funzione f con tutti due

$$(A, B, f)$$

A insieme : dominio

B insieme : codominio

f una relazione con le proprietà 1) + 2) (logge)

1) che associa a ogni elemento del dominio
uno e un solo elemento del codominio

Scriviamo $f: A \rightarrow B$

e per scrivere $a f b$, scriviamo $b = f(a)$

$$a \mapsto f(a) = b$$

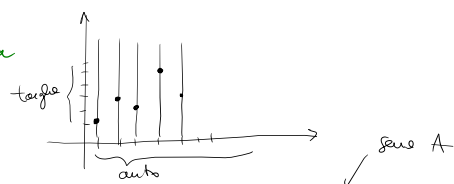
Es. $A =$ automobili regol. immatricolate

$$B = \{ ** \dots ** \}, * \in \{A, B, \dots, Z\} \quad ** \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

matricola

$$A \rightarrow B$$

auto $\mapsto$ targa



Es. $A = \{ \text{Jure, Inter, Milan, } \dots, \text{Genoa} \}$

$$B = \mathbb{N}$$

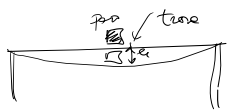
$$f: A \rightarrow B$$

squadra $\mapsto$ punteggio alla fine

$$\begin{array}{l} \text{Jure} \mapsto 102 \\ \text{Inter} \mapsto 70 \end{array}$$

Es

$$\begin{array}{c|c} \text{peso} & \text{flame} \\ \hline 100 & 1 \text{ cm} \end{array}$$

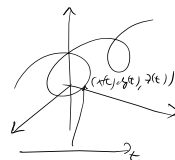


Es.

$$A = [0, +\infty[\quad \text{tempi}$$

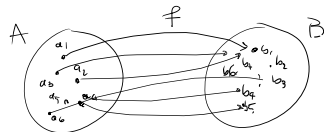
$$B = \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$



Rappresentare

A, B ins.



$$\text{diamo } b = f(a)$$

b si dice elemento immagine di a tramite f

$$f(A) = \{ f(a), a \in A \} \quad \leftarrow \text{l'insieme immagine.}$$

es. sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

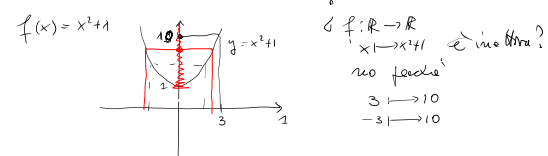
$$x \mapsto x^2 + 1$$

$$3^2 + 1$$

chi è l'immagine di 3?

$$3 \mapsto 10$$

chi è l'insieme immagine?

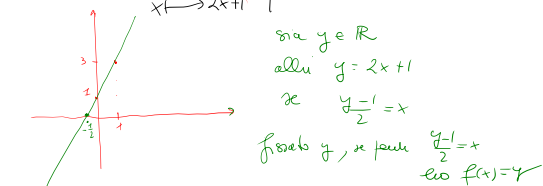


$$f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$$

def. se $f: A \rightarrow B$ è funzione
 e $f(A) = B$ f si dice SURiettiva

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + 1$ non è suriettiva

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x + 1$ è suriettiva facile?



def. se $f: A \rightarrow B$ funzione
 se $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(o equivalente
 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)

f si dice INIETTIVA

ES. prova che $x \mapsto 2x + 1$ è iniettiva
 sufficiente $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ 2x_1 &= 2x_2 \\ &\Downarrow \\ x_1 &= x_2 \quad \text{OK} \end{aligned}$$

f iniettiva e suriettiva si dice BIETTIVA

Or. conviene mettere in evidenza alcune
 funzioni particolari

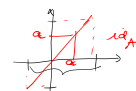
$A \rightarrow B$
 $a \mapsto b$ b lo stesso per tutti gli $a \in A$

COSTANTE

$A \rightarrow A$

$a \mapsto a$ per ogni $a \in A$

IDENTITÀ id_A

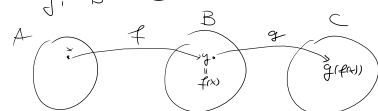


funzioni composte

sufficienti A, B, C insiemi

$f: A \rightarrow B$

$g: B \rightarrow C$



$A \rightarrow C$

$x \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x)$

si legge "g dopo f"

funzione composta di g dopo f

$g \circ f \neq f \circ g$

attenzione: cambia l'ordine di
 composizione.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + 1$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $z \mapsto z + 1$

$g \circ f(x)$

attenzione: cambia l'ordine di composizione.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + 1 \quad z \mapsto 2z + 1$$

$g \circ f(x)$

$$x \mapsto x^2 + 1$$

$$\underbrace{\quad}_{z} \mapsto 2z + 1$$

$$(x^2 + 1) \mapsto 2(x^2 + 1) + 1 = 2x^2 + 3$$

$$g \circ f(x) = 2x^2 + 3$$

$$f \circ g(x) = 4x^2 + 4x + 2$$

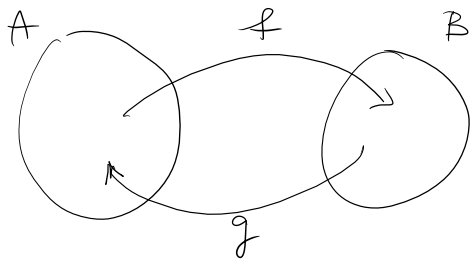
$$x \mapsto \underbrace{2x + 1}_z \mapsto z^2 + 1$$

$$(2x + 1)^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 1 + 1$$

$$\quad \quad \quad = 4x^2 + 4x + 2$$

funzione inversa

sia $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$



se $g \circ f = \text{id}_A$ e $f \circ g = \text{id}_B$

allora g è l'inversa di f e f è una funzione invertibile

si può provare che l'inversa se c'è è unica

TEOR sia $f: A \rightarrow B$ funzione

f è invertibile se e solo se f è biettiva