

21 Settembre

Scipio Cuccagna

CUCCAGNA 040 558 2614

Principio di Induzione

L'insieme dei numeri naturali è

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Assioma (Principio di Induzione)

Sia S un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ($S \subseteq \mathbb{N}$)

e supponiamo soddisfarle seguenti due proprietà:

1) $1 \in S$;

2) $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$.

Allora $S = \mathbb{N}$.

Teorema (Dimostrazioni per induzione)

Supponiamo che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ sia associato una proposizione $P(n)$, e supponiamo che si abbia quanto segue

1) $P(1)$ è vero

2) $(P(n) \text{ è vero}) \Rightarrow (P(n+1) \text{ è vero})$

Allora $P(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dim Definiamo

$$S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è vera}\} \quad (\text{X})$$

La tesi è equivalente al dimostrare che $S = \mathbb{N}$

L'ipotesi 1) $\Rightarrow 1 \in S$ ¹⁾ perché $P(1)$ è vero

2) Dico che $(P(n) \text{ è vera}) \Rightarrow (P(n+1) \text{ è vera})$

$$\begin{array}{ccc} \updownarrow & & \updownarrow \\ n \in S & \Rightarrow & n+1 \in S \end{array} \quad \text{2)}$$

Il nostro insieme S definito in * soddisfa le proprietà 1) e 2) del principio di induzione.

Per il Principio di induzione segue che $S = \mathbb{N}$
 $\Leftrightarrow P(n) \text{ è vera} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema (Disuguaglianza di Bernoulli)

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $a \geq -1$

abbiamo:

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad (P(n))$$

Dim Dimostriamo per induzione.

1') Dobbiamo decidere se $(P(1))$ è vera

$$(1+a)^1 = 1+a = 1+1 \cdot a \Rightarrow (P(1)) \text{ è vera!}$$

2') Vogliamo verificare $(P(n) \text{ vera}) \Rightarrow (P(n+1) \text{ vera})$

$$\begin{aligned} (1+a)^n &\geq 1+na && \cdot (1+a) \\ (1+a)^{n+1} &\geq (1+na)(1+a) && \underbrace{\geq 0} \\ &= 1+na + a + na^2 && \text{Golemi} \\ &\geq 1+na + a = 1+(n+1)a \end{aligned}$$

Confrontando gli estremi concludiamo che

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a \quad (P(n+1))$$

Conclusione $(P(n))$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad a \geq -1$$

Per $a = -3$ è falso in generale

$$(1-3)^n \geq 1-3n$$

$$(-2)^n \geq 1-3n$$

$$(-1)^n \cdot 2^n \geq 1-3n \quad \text{per } n \text{ dispari}$$

$$-(2^n) \geq 1-3n \quad \text{non è vero}$$

$$\text{per } n=4 \quad -2^4 = -16 \quad 1-3n = 1-3 \cdot 4 = -11$$

$$\text{è falso che } -16 \geq -11$$

Summatorie

Dati numeri $a_1, \dots, a_n$

$$\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + \dots + a_n$$

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum_{k=10}^{20} a_k$$

Valle la convergenza $\sum_{k=1}^0 a_k = 0$

$$\sum_{j=1}^1 a_j = a_1$$

$$\sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n (a_j + b_j)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda a_j = \lambda \sum_{j=1}^n a_j$$

$$\sum_{j=1}^{10} a_j = \sum_{j=1}^7 a_j + \sum_{j=8}^{10} a_j$$

Teorema $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dim per induzione

1) $n=1$ $\sum_{j=1}^1 j = 1$

$$\frac{n(n+1)}{2} \Big|_{n=1} = 1$$

2) $n \Rightarrow n+1$ Supponiamo $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=n+1}^{n+1} j = \sum_{j=1}^n j + n+1 =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= (n+1) \left[\frac{n}{2} + 1 \right] = (n+1) \frac{n+2}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Questo è $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$ quando n è
sostituito da $n+1$