Integrazione in più variabili

PRIMA PARTE

1 Integrale di Riemann

Vedremo la definizione di integrale di Riemann per funzioni con dominio contenuto in $\mathbb{R}^2$, successivamente daremo alcuni indizi su come estendere tale definizione a funzioni definite su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$, decisamente utili dal punto di vista fisico. A quel punto, come esercizio, è possibile rileggere tutta la parte precedente immaginando di riscriverla in questo contesto. Un'ulteriore estensione a funzioni con domini contenuti in $\mathbb{R}^N$ con N intero generico può essere effettuata analogamente.

Inoltre potremo notare come le definizioni ricalcano il procedimento adottato nel corso di Analisi Matematica I per introdurre gli integrali per funzioni con dominio contenuto in $\mathbb{R}$.

Introduciamo ora alcune definizione che saranno utilizzate sistematicamente in quanto segue.

Cominceremo dapprima a considerare funzioni limitate $f : Q \to \mathbb{R}$ definite su rettangoli limitati

$$Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 .$$

Ricordiamo, che una funzione si dice limitata se esistono due costanti reali $m, M \in \mathbb{R}$ tali che

$$m \leq f(x, y) \leq M \qquad \text{per ogni } (x, y) \in Q .$$

Consideriamo due suddivisioni, rispettivamente di $[a, b]$ e $[c, d]$, come già viste nel corso di Analisi Matematica I,

$$D_1 := \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_r\} , \qquad D_2 := \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_s\} ,$$

dove

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_r = b , \qquad c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_s = d .$$

Diremo **suddivisione** di Q un insieme $D = D_1 \times D_2$ dove D_1 e D_2 sono suddivisioni, rispettivamente di $[a, b]$ e $[c, d]$ definite come sopra. Definiremo gli intervalli

$$I_k = [x_{k-1}, x_k] , \qquad J_h = [y_{h-1}, y_h] ,$$

dove $k = 1, \dots, r$ e $h = 1, \dots, s$, aventi rispettivamente ampiezza

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} , \quad \Delta y_h = y_h - y_{h-1} .$$

A questo punto il rettangolo Q viene spezzettato "come un puzzle" in $r \cdot s$ rettangolini $Q_{kh} = I_k \times J_h$ di area $A_{kh} = \Delta x_k \cdot \Delta y_h$.

In ogni rettangolino Q_{kh} possiamo considerare estremo inferiore e superiore che dentoremo con

$$m_{kh} = \inf_{(x,y) \in Q_{kh}} f(x, y) , \qquad M_{kh} = \sup_{(x,y) \in Q_{kh}} f(x, y) .$$

Definiamo ora le somme inferiori e superiori.

Definizione 1.1. *Si dice* somma inferiore di Riemann della funzione f rispetto alla suddivisione D *il valore*

$$s(D, f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} m_{kh} \, \Delta x_k \, \Delta y_h .$$

Si dice somma superiore di Riemann della funzione f rispetto alla suddivisione D *il valore*

$$S(D, f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} M_{kh} \, \Delta x_k \, \Delta y_h .$$

Poiché vale

$$m \le m_{kh} \le M_{kh} \le M\,, \qquad \text{per ogni } k,h \tag{1}$$

troviamo

$$m \cdot \mathrm{Area}(Q) \le s(D,f) \le S(D,f) \le M \cdot \mathrm{Area}(Q)\,.$$

Definizione 1.2. *Dato un rettangolo $Q \subset \mathbb{R}^2$, date due suddivisioni di Q, $D = D_1 \times D_2$ e $\widetilde{D} = \widetilde{D}_1 \times \widetilde{D}_2$, diremo che $\widetilde{D}$ è* più raffinata *di D se $D_1 \subseteq \widetilde{D}_1$ e $D_2 \subseteq \widetilde{D}_2$.*

Proposizione 1.3. *Data $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata, siano D e $\widetilde{D}$ due suddivisioni di Q. Se $\widetilde{D}$ è più raffinata di D allora*

$$s(D,f) \le s(\widetilde{D},f) \le S(\widetilde{D},f) \le S(D,f)\,.$$

Dimostrazione. La tesi si ottiene notando che ogni rettangolo Q_{kh} individuato dalla suddivisione D, è suddiviso in ulteriori rettangolini più piccoli della suddivisione $\widetilde{D}$, che denoteremo con $\widetilde{Q}_{\lambda\mu}$. Ragionando come in (1) possiamo notare che

$$m_{kh} \le \widetilde{m}_{\lambda\mu} \le \widetilde{M}_{\lambda\mu} \le M_{kh}\,, \qquad \text{per ogni } \lambda,\mu \text{ tali che } \widetilde{Q}_{\lambda\mu} \subseteq Q_{kh}\,,$$

dove

$$\widetilde{m}_{\lambda\mu} = \inf_{(x,y)\in\widetilde{Q}_{\lambda\mu}} f(x,y)\,, \qquad \widetilde{M}_{\lambda\mu} = \sup_{(x,y)\in\widetilde{Q}_{\lambda\mu}} f(x,y)\,.$$

Quindi possiamo notare che

$$m_{kh}A_{kh} = m_{kh}\sum_{\diamond} \widetilde{A}_{\lambda\mu} \le \sum_{\diamond} \widetilde{m}_{\lambda\mu}\widetilde{A}_{\lambda\mu} \le \sum_{\diamond} \widetilde{M}_{\lambda\mu}\widetilde{A}_{\lambda\mu} \le M_{kh}\sum_{\diamond} \widetilde{A}_{\lambda\mu} = M_{kh}A_{kh}\,.$$

dove $\widetilde{A}_{\lambda\mu}$ è l'area del rettangolino $\widetilde{Q}_{\lambda\mu}$, e $\sum_{\diamond}$ indica che stiamo sommando sugli indici λ,μ tali che $\widetilde{Q}_{\lambda\mu} \subseteq Q_{kh}$. Dalle disuguaglianze precedenti possiamo ricavare quindi la tesi. □

Proposizione 1.4. *Date due suddivisioni D e $\widetilde{D}$ di Q esiste una suddivisione $\widehat{D}$ più raffinata di entrambe.*

Dimostrazione. Basta prendere $\widehat{D} = \widehat{D}_1 \times \widehat{D}_2$ dove $\widehat{D}_1 = D_1 \cup \widetilde{D}_1$ e $\widehat{D}_2 = D_2 \cup \widetilde{D}_2$. □

Definizione 1.5. *Dato un rettangolo $Q = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$ e una funzione $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata, diremo* integrale inferiore di Riemann della funzione f su Q

$$\underline{I}(f,Q) = \sup_D s(D,f)$$

e integrale superiore di Riemann della funzione f su Q

$$\overline{I}(f,Q) = \inf_D S(D,f)\,.$$

Esercizio 1.6. *Mostrare che vale $m \cdot \mathrm{Area}(Q) \le \underline{I}(f,Q) \le \overline{I}(f,Q) \le M \cdot \mathrm{Area}(Q)$.*

Definizione 1.7. *Dato un rettangolo $Q = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$ e una funzione $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata, essa si dice* integrabile secondo Riemann su Q *se vale*

$$\underline{I}(f,Q) = \overline{I}(f,Q)\,.$$

Tale valore è detto **integrale di Riemann di f su Q**. *L'insieme Q è detto dominio di integrazione, mentre f è detta funzione integranda.*

Per denotare l'integrale di Riemann spesso vengono usate le seguenti notazioni:

$$I(f,Q)\,, \qquad \int_Q f\,, \qquad \iint_Q f\,, \qquad \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

In quanto segue denoteremo con $\mathscr{R}(Q)$ l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann su Q:

$$\mathscr{R}(Q) = \big\{ f : Q \to \mathbb{R} \mid f \text{ è integrabile secondo Riemann su } Q \big\}\,,$$

Si noti che, chiedendo nella Definizione 1.7, come ipotesi la limitatezza di f, abbiamo che ogniqualvolta chiederemo $f \in \mathscr{R}(Q)$ sottintenderemo che f è limitata.

Esempio 1.8. *Le funzioni costanti sono integrabili secondo Riemann su ogni rettangolo. In particolare, se $f(x,y) = c$ per ogni $(x,y) \in Q$ allora vale*

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = c \cdot \mathrm{Area}(Q)\,.$$

Esempio 1.9 (! Importante !)**.** *Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ tale che $f(x,y) = g(x)$ dove la funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$, ovvero $g \in \mathscr{R}([a,b])$, allora $f \in \mathscr{R}(Q)$.*

Infatti, prendendo una generica suddivisione $D = D_1 \times D_2$, abbiamo

$$\begin{aligned} s(D,f) &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{h=1}^{s} m_{kh}\,\Delta x_k\,\Delta y_h \\ &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{h=1}^{s} \inf_{x\in I_k} g(x)\,\Delta x_k\,\Delta y_h \\ &= \sum_{k=1}^{r} \inf_{x\in I_k} g(x)\,\Delta x_k\,(d-c) \\ &= s(D_1,g)(d-c) \end{aligned}$$

e similmente

$$\begin{aligned} S(D,f) &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{h=1}^{s} M_{kh}\,\Delta x_k\,\Delta y_h \\ &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{h=1}^{s} \sup_{x\in I_k} g(x)\,\Delta x_k\,\Delta y_h \\ &= \sum_{k=1}^{r} \sup_{x\in I_k} g(x)\,\Delta x_k\,(d-c) \\ &= S(D_1,g)(d-c)\,. \end{aligned}$$

Da ciò possiamo concludere che

$$\sup_D s(D,f) \overset{!}{=} \sup_{D_1} s(D_1,g)(d-c) = \inf_{D_1} S(D_1,g)(d-c) \overset{!}{=} \inf_D S(D,f) \tag{2}$$

dove l'uguaglianza al centro discende dall'ipotesi $g \in \mathscr{R}([a,b])$.

Le uguaglianze con il "!" nascondono delle finezze di non poco conto e non sono brevi da dimostrare. Per la prima, ad esempio, dobbiamo mostrare che valgono entrambe le disuguaglianze

$$\sup_D s(D,f) \le \sup_{D_1} s(D_1,g)(d-c) \qquad e \qquad \sup_D s(D,f) \ge \sup_{D_1} s(D_1,g)(d-c)\,.$$

Abbiamo mostrato che, per ogni suddivisione $D = D_1 \times D_2$ del rettangolo Q, vale

$$s(D,f) = s(D_1,g)(d-c)\,.$$

In particolare, fissata una generica suddivisione D di Q, possiamo ottenere la seguente maggiorazione indipendente dalla scelta di D:

$$s(D,f) = s(D_1,g)(d-c) \le \sup_{\widetilde{D}_1} s(\widetilde{D}_1,g)(d-c)$$

dove abbiamo calcolato l'estremo superiore su tutte le possibili suddivisioni $\widetilde{D}_1$ dell'intervallo $[a,b]$. A questo punto, segue che l'estremo superiore al variare di tutte le suddivisioni D di Q soddisfa

$$\sup_D s(D,f) \le \sup_{\widetilde{D}_1} s(\widetilde{D}_1,g)(d-c)$$

essendo il membro destro un maggiorante dell'insieme $\{s(D,f) \mid D$ è suddivisione di $Q\}$. Quindi vale la prima disuguaglianza.

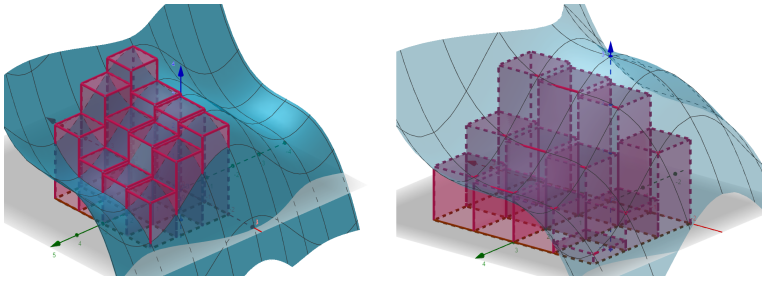

Figura 1: Somme superiori e somme inferiori.

Per dimostrare la seconda, ragioniamo specularmente. Fissiamo una generica suddivisione D_1 dell'intervallo $[a,b]$ e scriviamo la maggiorazione

$$s(D_1,g)(d-c) = s(D,f) \leq \sup_{\widetilde{D}} s(\widetilde{D},f)\,,$$

dove abbiamo calcolato l'estremo superiore su tutte le possibili suddivisioni $\widetilde{D}$ di Q. La maggiorazione precedente vale per ogni scelta della suddivisione D_1, quindi possiamo calcolare l'estremo superiore al variare di tutte le possibili suddivisioni D_1 dell'intervallo $[a,b]$ e trovare

$$\sup_{D_1} s(D_1,g)(d-c) \leq \sup_{\widetilde{D}} s(\widetilde{D},f)\,,$$

concludendo la dimostrazione. Per esercizio scrivere la dimostrazione del "!" in (2) che coinvolge le somme superiori sulla falsariga di quanto sopra.

Esempio 1.10. *Ricordiamo che la seguente funzione non è integrabile secondo Riemann*

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}\,,\qquad f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{se } x\notin\mathbb{Q}\,.\end{cases}$$

Analogamente abbiamo che la seguente funzione non è integrabile secondo Riemann

$$f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}\,,\qquad f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{se } (x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\\ 0 & \text{se } (x,y)\notin\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\,.\end{cases}$$

Diamo ora un'interpretazione grafica della nozione di integrale. Consideriamo quindi una funzione $f:Q\to\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{R}(Q)$ tale che $f(x)\geq 0$ per ogni $x\in Q$ e definiamo l'insieme

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in Q\,, 0\leq z\leq f(x,y)\right\}, \tag{3}$$

ovvero la regione di spazio sotto il grafico di f. Notiamo quindi che, data una suddivisione D di Q, la somma inferiore $s(D,f)$ è il volume di una regione costituita da parallelepipedi contenuta in T, mentre la somma superiore $S(D,f)$ è il volume di una regione costituita da parallelepipedi contenenti T. Quindi è ragionevole concludere che l'integrale di f su Q è il valore del volume di T.

Proposizione 1.11. *Dato un rettangolo $Q\subset\mathbb{R}^2$ e una funzione $f:Q\to\mathbb{R}$ limitata. La funzione è integrabile secondo Riemann su Q se e solo se per ogni $\varepsilon>0$ esiste una suddivisione D_ε di Q tale che $S(D_\varepsilon,f)-s(D_\varepsilon,f)<\varepsilon$.*

La dimostrazione è lasciata per esercizio, si può ottenere seguendo la dimostrazione dell'enunciato analogo già visto nel corso precedente.

Definizione 1.12. *Definiamo, dato un sottoinsieme $E\subset\mathbb{R}^2$, il diametro di E come*

$$\operatorname{diam}(E)=\sup\left\{\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| \mid (x_1,y_1)\,,(x_2,y_2)\in E\right\}.$$

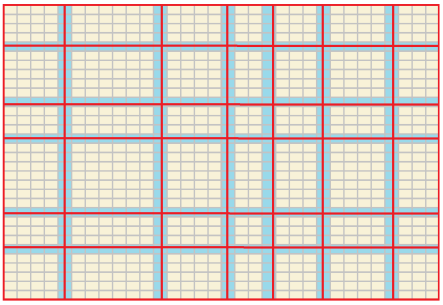

Figura 2: La costruzione delle due suddivisioni, in rosso la griglia individuata da D, in grigio quella individuata da $\widehat{D}$.

Nel caso particolare di un rettangolo Q il valore del diametro è la lunghezza della diagonale, per un cerchio invece abbiamo la lunghezza appunto del diametro.

Definizione 1.13. *Dato $Q \subset \mathbb{R}^2$ e una sua suddivisione D, diremo* **ampiezza della suddivisione** *D il numero*

$$|D| = \max_{k,h} \operatorname{diam}(Q_{kh})\,.$$

Teorema 1.14. *La funzione limitata $f : Q \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann su Q se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni suddivisione D di Q di ampiezza $|D| < \delta$ vale $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$.*

Questo teorema è importante perché ci dice che, in presenza di una funzione integrabile, è sufficiente raffinare adeguatamente la suddivisione al fine di trovare una buona approssimazione dell'integrale.

Dimostrazione. Innanzitutto mostriamo che esistono suddivisioni di ampiezza piccola a piacere. Dato $Q \subset \mathbb{R}^2$, per ogni $N \in \mathbb{N}$, definiamo le suddivisioni

$$D_1(N) = \left\{ x_k = a + \frac{b-a}{N}\, k \mid k = 0, \dots, N \right\}, \qquad D_2(N) = \left\{ y_k = c + \frac{d-c}{N}\, k \mid k = 0, \dots, N \right\}$$

con $\Delta x_k = \frac{b-a}{N}$ e $\Delta y_k = \frac{d-c}{N}$. Definiamo quindi $D(N) = D_1(N) \times D_2(N)$ e notiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $N \in \mathbb{N}$ tale che $|D(N)| < \delta$, infatti

$$|D(N)| = \frac{1}{N}\sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}\,.$$

Implicazione "$\Leftarrow$". Per ipotesi sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ con le proprietà richieste. Avendo appena mostrato che possiamo trovare una suddivisione D di ampiezza $|D(N)| < \delta$ concludiamo questa parte della dimostrazione applicando la Proposizione 1.11 ponendo $D_\varepsilon = D(N)$.

Implicazione "$\Rightarrow$". Poiché $f \in \mathscr{R}(Q)$, dalla Proposizione 1.11 troviamo una suddivisione D di Q tale che

$$S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon/2\,. \tag{4}$$

Supponiamo $D = D_1 \times D_2$ dove $D_1 = \{x_0, \dots, x_r\}$ e $D_2 = \{y_0, \dots, y_s\}$. Consideriamo i segmenti, rispettivamente, verticali e orizzontali

$$\{x_i\} \times [c, d]\,, \quad i = 1, \dots, r-1\,; \qquad [a, b] \times \{y_j\}\,, \quad j = 1, \dots, s-1\,. \tag{5}$$

Tutti questi segmenti hanno assieme una lunghezza totale

$$L = (d-c)(r-1) + (b-a)(s-1)\,.$$

Definiamo ora $\delta > 0$ tale che

$$(M - m)L\delta < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{6}$$

dove ricordiamo che $M = \sup_Q f$ e $m = \inf_Q$. Mostriamo ora che questa scelta di δ permette di giungere alla tesi.

Consideriamo quindi una suddivisione $\widehat{D} = \widehat{D}_1 \times \widehat{D}_2$ tale che $|\widehat{D}| < \delta$ e, con notazioni usuali, scriviamo

$$\widehat{D}_1 = \{\widehat{x}_0 \,, \dots \,, \widehat{x}_{\widehat{r}}\} \,, \qquad \widehat{D}_2 = \{\widehat{y}_0 \,, \dots \,, \widehat{y}_{\widehat{s}}\}$$

dove per $\lambda \in \{1, \dots, \widehat{r}\}$ e $\mu \in \{1, \dots, \widehat{s}\}$ vale necessariamente

$$\max_{\lambda} \Delta\widehat{x}_\lambda < \delta \,, \qquad \max_{\mu} \Delta\widehat{y}_\mu < \delta \,.$$

Inoltre dalla definizione di somme superiori e inferiori

$$S(\widehat{D}, f) - s(\widehat{D}, f) = \sum_{\lambda=1}^{\widehat{r}} \sum_{\mu=1}^{\widehat{s}} (\widehat{M}_{\lambda\mu} - \widehat{m}_{\lambda\mu}) \widehat{A}_{\lambda\mu} \,. \tag{7}$$

dove $\widehat{M}_{\lambda\mu} = \sup_{\widehat{Q}_{\lambda\mu}} f$, $\widehat{m}_{\lambda\mu} = \inf_{\widehat{Q}_{\lambda\mu}} f$ e $\widehat{A}_{\lambda\mu} = \Delta\widehat{x}_\lambda \cdot \Delta\widehat{y}_\mu$. Dalla (4) abbiamo

$$\frac{\varepsilon}{2} \geq S(D, f) - s(D, f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} (M_{kh} - m_{kh}) A_{kh} \,. \tag{8}$$

A questo punto possiamo dividere i rettangolini $\widehat{Q}_{\lambda\mu}$ in due gruppi.

1° *gruppo.* Consideriamo gli indici λ, μ per cui $\widehat{Q}_{\lambda\mu} \subseteq Q_{kh}$ per degli indici k, h. Ovvero i rettangolini della suddivisione *fitta* $\widehat{D}$ che sono contenuti totalmente in uno dei rettangoli della suddivisione D. Per questi valori vale

$$m_{kh} \leq \widehat{m}_{\lambda\mu} \leq \widehat{M}_{\lambda\mu} \leq M_{kh} \,,$$

quindi vale

$$(\widehat{M}_{\lambda\mu} - \widehat{m}_{\lambda\mu}) \widehat{A}_{\lambda\mu} \leq (M_{kh} - m_{kh}) \widehat{A}_{\lambda\mu} \,. \tag{9}$$

2° *gruppo.* I rimanenti indici corrispondono a rettangoli $\widehat{Q}_{\lambda\mu}$ che si trovano a cavallo dei segmenti introdotti in (5). Per questi utilizzeremo la magiorazione "brutale" sul rettangolo Q:

$$(\widehat{M}_{\lambda\mu} - \widehat{m}_{\lambda\mu}) \widehat{A}_{\lambda\mu} \leq (M - m) \widehat{A}_{\lambda\mu} \,. \tag{10}$$

Spezziamo quindi la sommatoria (7) sui due gruppi

$$\begin{aligned}
S(\widehat{D}, f) - s(\widehat{D}, f) &= \sum_{\lambda=1}^{\widehat{r}} \sum_{\mu=1}^{\widehat{s}} (\widehat{M}_{\lambda\mu} - \widehat{m}_{\lambda\mu}) \widehat{A}_{\lambda\mu} \\
&= \underbrace{\sum_{\lambda=1}^{\widehat{r}} \sum_{\mu=1}^{\widehat{s}}}_{1^o \ gruppo.} (\widehat{M}_{\lambda\mu} - \widehat{m}_{\lambda\mu}) \widehat{A}_{\lambda\mu} + \underbrace{\sum_{\lambda=1}^{\widehat{r}} \sum_{\mu=1}^{\widehat{s}}}_{2^o \ gruppo.} (\widehat{M}_{\lambda\mu} - \widehat{m}_{\lambda\mu}) \widehat{A}_{\lambda\mu} \\
&\leq \underbrace{\sum_{\lambda=1}^{\widehat{r}} \sum_{\mu=1}^{\widehat{s}}}_{1^o \ gruppo.} (M_{kh} - m_{kh}) \widehat{A}_{\lambda\mu} + \underbrace{\sum_{\lambda=1}^{\widehat{r}} \sum_{\mu=1}^{\widehat{s}}}_{2^o \ gruppo.} (M - m) \widehat{A}_{\lambda\mu} \qquad \text{! (9) e (10) !} \\
&\leq \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} (M_{kh} - m_{kh}) A_{kh} + (M - m) \underbrace{\sum_{\lambda=1}^{\widehat{r}} \sum_{\mu=1}^{\widehat{s}}}_{2^o \ gruppo.} \widehat{A}_{\lambda\mu} \\
&\leq S(D, f) - s(D, f) + (M - m) L\delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,, \qquad \text{! (4) e (6) !}
\end{aligned}$$

concludendo la dimostrazione. □

Abbiamo dato una definizione di integrale tramite la quale scegliamo di contare nelle somme superiori e inferiori rispettivamente l'estremo superiore e inferiore della funzione in ogni rettangolino. Un approccio simile è dato dalle somme alla Cauchy che vediamo qui di seguito.

Definizione 1.15 (Somme alla Cauchy)**.** *Sia $Q \subset \mathbb{R}^2$ e una sua suddivisione D. Consideriamo una* **funzione di scelta**

$$\mathcal{S} : \{Q_{kh} \mid k = 1, \dots, r\,,\ h = 1, \dots, s\} \to Q$$

dove $\mathcal{S}(Q_{kh}) = (x^{kh}, y^{kh}) \in Q_{kh}$.

Definiamo quindi

$$\sigma(D, \mathcal{S}, f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} f(x^{kh}, y^{kh})\, \Delta x_k\, \Delta y_h\,,$$

come la somma alla Cauchy associata alla funzione f data la suddivisione D con funzione di scelta $\mathcal{S}$.

Sostanzialmente la funzione $\mathcal{S}$ nella precedente definizione sceglie per ogni rettangolino Q_{kh} un suo punto generico, dove andare a valutare la funzione f. Nel caso f fosse una funzione continua, le somme inferiori (o superiori) sarebbero ottenute come *somme alla Cauchy* con la funzione $\mathcal{S}$ che sceglie il punto di minimo (o di massimo) su ogni rettangolino.

Teorema 1.16. *Data $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata e il valore $I \in \mathbb{R}$, la funzione f è integrabile secondo Riemann su Q e vale $\int_Q f = I$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni suddivisione D di Q, con ampiezza $|D| < \delta$, e per ogni funzione di scelta $\mathcal{S}$ vale $|\sigma(D, \mathcal{S}, f) - I| < \epsilon$.*

Il precedente teorema è molto importante perché ci garantisce che possiamo approssimare il valore dell'integrale *scegliendo a caso* il punto in cui valutare la funzione su ogni rettangolino della suddivisione senza curarci di trovare in ognuno di essi l'estremo inferiore e superiore della funzione, purché abbiamo scelto una suddivisione con ampiezza sufficientemente piccola.

Nella dimostrazione, l'implicazione "$\Leftarrow$" sarà resa più complicata dal fatto che non chiedendo nulla più che la limitatezza di f dovremo ragionare con le proprietà di estremo inferiore e superiore costruendo una successione di punti dei rettangolini le cui immagini tendono agli estremi inferiori e superiori. Infatti la funzione f non ammette necessariamente minimo e massimo sui rettangolini Q_{kh}.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che per ogni suddivisione D di Q e per ogni funzione di scelta $\mathcal{S}$ vale

$$m_{kh} \le f(x^{kh}, y^{kh}) \le M_{kh}\,,\ \forall k, h \quad \Rightarrow \quad s(D, f) \le \sigma(D, \mathcal{S}, f) \le S(D, f)\,. \tag{11}$$

Implicazione "$\Rightarrow$". Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni suddivisione D di Q, con ampiezza $|D| < \delta$, vale

$$s(D, f) \le I \le S(D, f) < s(D, f) + \varepsilon\,,$$

quindi usando la (11) troviamo che vale anche

$$s(D, f) \le \sigma(D, \mathcal{S}, f) < S(D, f) \le s(D, f) + \varepsilon\,,$$

per ogni funzione di scelta $\mathcal{S}$, da cui $|\sigma(D, \mathcal{S}, f) - I| < \epsilon$ segue facilmente.

Implicazione "$\Leftarrow$". Fissiamo $\varepsilon > 0$ e una suddivisione D come nelle ipotesi. Sia A l'area del rettangolo Q. Costruiamo due funzioni di scelta

$$\widehat{\mathcal{S}} : \{Q_{kh}\} \to Q\,,\ \widehat{\mathcal{S}}(Q_{kh}) = (\widehat{x}^{kh}, \widehat{y}^{kh}) \text{ tale che } f(\widehat{x}^{kh}, \widehat{y}^{kh}) > M_{kh} - \frac{\varepsilon}{A}\,,\ \forall k, h\,,$$

$$\widetilde{\mathcal{S}} : \{Q_{kh}\} \to Q\,,\ \widetilde{\mathcal{S}}(Q_{kh}) = (\widetilde{x}^{kh}, \widetilde{y}^{kh}) \text{ tale che } f(\widetilde{x}^{kh}, \widetilde{y}^{kh}) < m_{kh} + \frac{\varepsilon}{A}\,,\ \forall k, h\,,$$

cosicché valgono

$$\begin{aligned}
\sigma(D, \widehat{\mathcal{S}}, f) &= \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} f(\widehat{x}^{kh}, \widehat{y}^{kh})\, \Delta x_k\, \Delta y_h \\
&> \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} \left(M_{kh} - \frac{\varepsilon}{A} \right) \Delta x_k\, \Delta y_h \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} M_{kh}\, \Delta x_k\, \Delta y_h - \frac{\varepsilon}{A} \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} \Delta x_k\, \Delta y_h \\
&= S(D, f) - \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(D,\widetilde{\mathcal{S}},f) &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{h=1}^{s} f(\widetilde{x}^{kh},\widetilde{y}^{kh})\,\Delta x_k\,\Delta y_h \\ &< \sum_{k=1}^{r}\sum_{h=1}^{s}\left(m_{kh}+\frac{\varepsilon}{A}\right)\Delta x_k\,\Delta y_h \\ &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{h=1}^{s} m_{kh}\,\Delta x_k\,\Delta y_h + \frac{\varepsilon}{A}\sum_{k=1}^{r}\sum_{h=1}^{s}\Delta x_k\,\Delta y_h \\ &= s(D,f)+\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}S(D,f)-s(D,f) &< \sigma(D,\widehat{\mathcal{S}},f)-\sigma(D,\widetilde{\mathcal{S}},f)+2\varepsilon \\ &\le |\sigma(D,\widehat{\mathcal{S}},f)-\sigma(D,\widetilde{\mathcal{S}},f)|+2\varepsilon \\ &\le |\sigma(D,\widehat{\mathcal{S}},f)-I|+|\sigma(D,\widetilde{\mathcal{S}},f)-I|+2\varepsilon<4\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Dal fatto che

$$S(D,f)-s(D,f)<4\varepsilon\,, \tag{12}$$

utilizzando la Proposizione 1.11, abbiamo $f\in\mathscr{R}(Q)$.

Resta da dimostrare che il valore dell'integrale è proprio I. Essendo $f\in\mathscr{R}(Q)$ vale

$$s(D,f)\le\int_Q f\le S(D,f)\,,$$

mentre da (11) e (12) segue che

$$s(D,f)\le\sigma(D,\widehat{\mathcal{S}},f)\le S(D,f)<s(D,f)+4\varepsilon\,.$$

Quindi $|\sigma(D,\widehat{\mathcal{S}},f)-\int_Q f|<4\varepsilon$, da cui

$$\Big|\int_Q f-I\Big|\le\Big|\int_Q f-\sigma(D,\widehat{\mathcal{S}},f)\Big|+\big|\sigma(D,\widehat{\mathcal{S}},f)-I\big|<4\varepsilon+\varepsilon=5\varepsilon\,,$$

terminando così la dimostrazione. □

Teorema 1.17. *Sia $f:Q\to\mathbb{R}$ continua allora $f\in\mathscr{R}(Q)$.*

Dimostrazione. Poiché Q è un compatto e f è continua allora per il teorema di Weierstrass la funzione è limitata. Inoltre è anche uniformemente continua, quindi per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che per ogni $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in Q$ con $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|<\delta$ vale $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$.

Prendiamo una qualsiasi suddivisione D di Q con ampiezza $|D|<\delta$. In ogni rettangolino Q_{kh} possiamo individuare almeno un punto di minimo (x_1^{kh},y_1^{kh}) e almeno un punto di massimo (x_2^{kh},y_2^{kh}), ovvero

$$m_{kh}=\min_{(x,y)\in Q_{kh}} f(x,y)=f(x_1^{kh},y_1^{kh})\,,\quad M_{kh}=\max_{(x,y)\in Q_{kh}} f(x,y)=f(x_2^{kh},y_2^{kh})\,,\qquad\forall k,h\,.$$

Avendo preso la suddivisione sufficientemente raffinata, usando l'uniforme continuità troviamo che

$$\big\|(x_1^{kh},y_1^{kh})-(x_2^{kh},y_2^{kh})\big\|<\delta\quad\Rightarrow\quad M_{kh}-m_{kh}=\big|f(x_1^{kh},y_1^{kh})-f(x_2^{kh},y_2^{kh})\big|<\varepsilon\,.$$

Quindi possiamo concludere che

$$S(D,f)-s(D,f)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{h=1}^{s}(M_{kh}-m_{kh})A_{kh}\le\varepsilon\,\mathrm{Area}(Q)$$

e trovare la tesi applicando il Teorema 1.14. □

Teorema 1.18 (Teorema di Riduzione)**.** *Sia $f:Q\to\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{R}(Q)$, dove $Q=[a,b]\times[c,d]$.*

a) Se $\forall y \in [c,d]$ *esiste l'integrale* $G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ *allora la funzione* G *è integrabile su* $[c,d]$ *e vale*

$$\iint_Q f = \int_c^d G(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy\,. \tag{13}$$

b) Se $\forall x \in [a,b]$ *esiste l'integrale* $H(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ *allora la funzione* H *è integrabile su* $[a,b]$ *e vale*

$$\iint_Q f = \int_a^b H(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx\,. \tag{14}$$

Osservazione 1.19.
- *Le formule* (13) *e* (14) *sono dette* **formule di riduzione** *e gli elementi al membro destro sono detti* integrali iterati.
- *Se valgono* (13) *e* (14) *allora vale*

$$\iint_Q f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy\,, \tag{15}$$

  detta **formula di scambio dell'ordine di integrazione**.
- *La validità di* $f \in \mathscr{R}(Q)$ *NON implica la validità delle formule* (13) *e* (14)*, devono infatti essere soddisfatte le ipotesi su* G *e* H*.*

Esempio 1.20. *Consideriamo* $Q = [0,1] \times [0,1]$ *e la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1/2 \text{ e } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Mostrare per esercizio che $f \in \mathscr{R}(Q)$ *e* $\int_Q f = 0$*. In questo caso la funzione* G *è ben definita e vale* $G(y) = 0$ *per ogni* $y \in [c,d]$*, quindi vale la formula* (13)*. Invece non posso calcolare il valore* $H(1/2)$*, quindi non vale* (14)*.*

Osservazione 1.21. *Sia* $f : Q \to \mathbb{R}$ *continua, allora* $f \in \mathscr{R}(Q)$ *e la funzione*

$$g_y : [a,b] \to \mathbb{R}\,,\ g_y(x) = f(x,y)$$

è continua, quindi integrabile su $[a,b]$*. Similmente la funzione*

$$h_x : [c,d] \to \mathbb{R}\,,\ h_x(y) = f(x,y)$$

è integrabile su $[c,d]$*. Quindi per funzioni continue valgono* (13)*,* (14) *e* (15)

Osservazione 1.22. *Sia* $f : Q \to \mathbb{R}$ *tale che* $f(x,y) = g(x)h(y)$ *(*f *si dice a variabili separabili), dove* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *e* $h : [c,d] \to \mathbb{R}$*. Se* $g \in \mathscr{R}([a,b])$ *e* $h \in \mathscr{R}([c,d])$ *allora* $f \in \mathscr{R}(Q)$ *e valgono sia* (13) *che* (14)*. In particolare troviamo*

$$\iint_Q f = \left(\int_a^b g(x)\,dx \right) \left(\int_c^d h(y)\,dy \right).$$

Dimostrare per esercizio questa formula.

Dimostriamo ora il teorema di riduzione. Dimostreremo la prima proprietà, la dimostrazione della seconda proprietà è lasciata come esercizio. Si può ottenere adattando il ragionamento.

Dimostrazione del Teorema 1.18 di riduzione. La funzione f è limitata, quindi esistono m, M tali che $m \le f(x,y) \le M$ per ogni $(x,y) \in Q$. Consideriamo una qualsiasi suddivisione $D = D_1 \times D_2$ di Q. Sapendo che $\forall y \in [c,d]$ esiste l'integrale $G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ allora abbiamo

$$\sum_{k=1}^{r} m_k(y)\Delta x_k = s(D_1, f(\cdot,y)) \le G(y) \le S(D_1, f(\cdot,y)) = \sum_{k=1}^{r} M_k(y)\Delta x_k\,, \tag{16}$$

dove

$$m_k(y) = \inf_{x\in I_k} f(x,y) \quad \text{e} \quad M_k(y) = \sup_{x\in I_k} f(x,y)\,.$$

Osserviamo che G è limitata, infatti, usando la suddivisione banale $\hat{D}_1 = \{a,b\}$, ovvero quella che "non suddivide" l'intervallo $[a,b]$, troviamo, per ogni $y \in [c,d]$,

$$\begin{aligned} m(b-a) \le \inf_{x\in[a,b]} f(x,y)(b-a) &= s(\hat{D}_1, f(\cdot,y)) \\ &\le G(y) \le S(\hat{D}_1, f(\cdot,y)) = \sup_{x\in[a,b]} f(x,y)(b-a) \le M(b-a)\,. \end{aligned}$$

Consideriamo ora le somme inferiori e superiori di G rispetto alla suddivisione D_2:

$$s(D_2,G) = \sum_{h=1}^{s} \gamma_h \Delta y_h\,, \qquad \gamma_h = \inf_{y\in J_h} G(y)\,, \tag{17}$$

$$S(D_2,G) = \sum_{h=1}^{s} \Gamma_h \Delta y_h\,, \qquad \Gamma_h = \sup_{y\in J_h} G(y)\,. \tag{18}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \gamma_h = \inf_{y\in J_h} G(y) &\ge \inf_{y\in J_h} \left(\sum_{k=1}^{r} m_k(y)\Delta x_k \right) && \text{! (16) !} \\ &= \inf_{y\in J_h} \left(\sum_{k=1}^{r} \inf_{x\in I_k} f(x,y)\Delta x_k \right) \\ &\ge \sum_{k=1}^{r} \inf_{y\in J_h} \inf_{x\in I_k} f(x,y)\Delta x_k && (\ ! \ ) \\ &= \sum_{k=1}^{r} \inf_{(x,y)\in Q_{kh}} f(x,y)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{r} m_{kh}\Delta x_k\,. \end{aligned}$$

Quindi possiamo calcolare

$$s(D_2,G) = \sum_{h=1}^{s} \gamma_h \Delta y_h \ge \sum_{h=1}^{s}\sum_{k=1}^{r} m_{kh}\Delta x_k \Delta y_h = s(D,f)\,. \tag{19}$$

Analogamente abbiamo

$$\begin{aligned} \Gamma_h = \sup_{y\in J_h} G(y) &\le \sup_{y\in J_h} \left(\sum_{k=1}^{r} M_k(y)\Delta x_k \right) && \text{! (16) !} \\ &= \sup_{y\in J_h} \left(\sum_{k=1}^{r} \sup_{x\in I_k} f(x,y)\Delta x_k \right) \\ &\le \sum_{k=1}^{r} \sup_{y\in J_h} \sup_{x\in I_k} f(x,y)\Delta x_k && (\ ! \ ) \\ &= \sum_{k=1}^{r} \sup_{(x,y)\in Q_{kh}} f(x,y)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{r} M_{kh}\Delta x_k\,. \end{aligned}$$

Quindi possiamo calcolare

$$S(D_2,G) = \sum_{h=1}^{s} \Gamma_h \Delta y_h \le \sum_{h=1}^{s}\sum_{k=1}^{r} M_{kh}\Delta x_k \Delta y_h = S(D,f)\,. \tag{20}$$

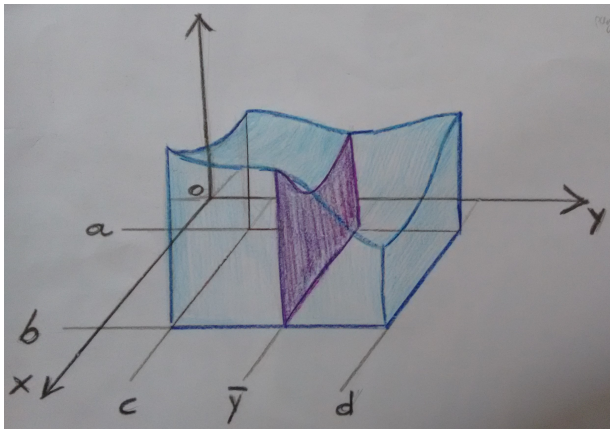

Figura 3: Vedi Osservazione 1.23.

Mettendo assieme le disuguaglianze trovate in (19) e (20), abbiamo

$$s(D,f) \le s(D_2,G) \le S(D_2,G) \le S(D,f)\,. \tag{21}$$

Tutto il procedimento precedente può essere adottato per una qualsiasi suddivisione. Utilizziamo ora l'ipotesi $f \in \mathscr{R}(Q)$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $D = D_1 \times D_2$ tale che $S(D,f) - s(D,f) < \varepsilon$. Questo, insieme a (21), ci porta a trovare la suddivisione D_2 tale che $S(D_2,G) - s(D_2,G) < \varepsilon$, concludendo che $G \in \mathscr{R}([c,d])$. Inoltre, sempre dalla (21) troviamo che

$$\begin{aligned} &s(D,f) \le s(D_2,G) \le \int_c^d G(y)\,dy \le S(D_2,G) \le S(D,f) \le s(D,f) + \varepsilon\,,\\ &s(D,f) \le \iint_Q f \le S(D,f) \le s(D,f) + \varepsilon\,, \end{aligned}$$

quindi

$$\left| \int_c^d G(y)\,dy - \iint_Q f \right| < \varepsilon$$

concludendo la dimostrazione. □

Diamo ora un'interpretazione geometrica dell'integrale.

Osservazione 1.23. *Sia $Q = [a,b]\times[c,d]$, $f : Q \to \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{R}(Q)$, tale che $f(x) \ge 0$ per ogni $x \in Q$. Ricordiamo l'insieme*

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in Q\,,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$$

già visto in (3). *Dato $\bar{y} \in [c,d]$, il valore $G(\bar{y}) = \int_a^b f(x,\bar{y})\,dx$ (se calcolabile!) è l'area dell'insieme $T_{\bar{y}} = T \cap \{y = \bar{y}\}$. Quindi abbiamo*

$$\mathrm{Vol}(T) = \int_c^d \mathrm{Area}(T_y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy\,.$$

Esempio 1.24. *Sia $f : [1,2]\times[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x\,\cos y$, allora*

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_1^2 x\,dx \right) \left(\int_0^1 \cos y\,dy \right) = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 [\sin y]_0^1 = \frac{3}{2}\sin 1\,.$$

Esempio 1.25. *Sia* $f : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{y}{1+x+y}$, *allora*

$$\begin{aligned}\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 \frac{y}{1+x+y}\,dx \right) dy \\ &= \int_0^2 \left[y \ln(1+x+y) \right]_0^1 dy \\ &= \int_0^2 y\ln(2+y) - y\ln(1+y)\,dy = \cdots\end{aligned}$$

Da qui in avanti si prosegue integrando per parti e operando come già visto nel corso precedente. Per esercizio completare il calcolo e provare a risolvere l'integrale invertendo l'ordine di integrazione

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{y}{1+x+y}\,dy \right) dx = \cdots$$

Si noterà che i calcoli nei due casi non hanno la stessa difficoltà. Quindi è spesso determinante in quale modo si sceglie di ridurre l'integrale.

Esempio 1.26. *Sia* $f : [0,2] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(xy)x$, *allora*

$$\begin{aligned}\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 \sin(xy)x\,dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left[-\cos(xy) \right]_0^1 dx \\ &= \int_0^2 1 - \cos x\,dx = \left[x - \sin x \right]_0^2 = 2 - \sin 2\,.\end{aligned}$$

2 Misura di Peano-Jordan e insiemi misurabili

Definizione 2.1. *Consideriamo* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *limitato e una funzione* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *limitata. Sia* Q *un rettangolo che contenga* Ω *e definiamo l'estensione a zero di* f *come*

$$\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}\,, \qquad \widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in \Omega\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin \Omega\,. \end{cases}$$

Diremo che f *è* **integrabile secondo Riemann su** Ω *se la sua estensione* $\widetilde{f}$ *è integrabile secondo Riemann su* Q*, ponendo*

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_Q \widetilde{f}(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Denoteremo con $\mathscr{R}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann sull'insieme Ω.

Naturalmente, dalla definizione segue che $f \in \mathscr{R}(\Omega)$ implica f limitata, in quanto la limitatezza rientra tra le ipotesi della definizione.

Esercizio 2.2. *Dimostrare che la scelta di* Q *non influenza il valore dell'integrale. Si considerino due rettangoli* $\widetilde{Q}, \widehat{Q}$ *entrambi contenenti* Ω *e le associate estensioni a zero* $\widetilde{f} : \widetilde{Q} \to \mathbb{R}$ *e* $\widehat{f} : \widehat{Q} \to \mathbb{R}$*. Vale* $\Omega \subset \widetilde{Q} \cap \widehat{Q}$ *dove l'intersezione è un rettangolo. Quindi valutando il valore di somme superiori e inferiori sugli insiemi* $\widetilde{Q} \cap \widehat{Q}$*,* $\widetilde{Q} \setminus \widehat{Q}$ *e* $\widehat{Q} \setminus \widetilde{Q}$*...*

Obiettivo ora è rispondere alla domanda: "Quali insiemi Ω ha senso considerare? Ci sono insiemi non adatti a definire un insieme $\mathscr{R}(\Omega)$?".

Intuitivamente, reputeremmo non adatto un insieme Ω tale che nemmeno le funzioni costanti risultino integrabili secondo Riemann su questo insieme. In particolare la funzione costantemente uguale a 1. La prossima definizione è un'immediata conseguenza di questo ragionamento.

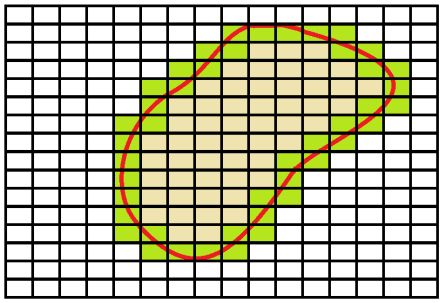

Figura 4: Vedi Osservazione 2.5.

Definizione 2.3 (Insiemi misurabili)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato contenuto in un rettangolo Q. Diremo che Ω è misurabile secondo Peano-Jordan se la* funzione caratteristica di Ω

$$\chi_\Omega : Q \to \mathbb{R}\,, \quad \chi_\Omega = \begin{cases} 1 & se\ (x,y) \in \Omega \\ 0 & se\ (x,y) \notin \Omega \end{cases}$$

è integrabile secondo Riemann su Q. Definiamo **area di** Ω *il valore*[1]

$$\mathrm{Area}(\Omega) = |\Omega| = m(\Omega) = \iint_\Omega 1\, dx\, dy = \iint_Q \chi_\Omega\, dx\, dy\,.$$

Osservazione 2.4. *Nella definizione precedente è equivalente chiedere che la funzione costante $f(x,y) = 1$ è integrabile secondo Riemann su Ω. In questo caso, infatti l'estensione $\widetilde{f}$ coincide proprio con χ_Ω.*

Osservazione 2.5 (La misura di Peano-Jordan a 8 anni.)**.** *Il concetto di misura di Peano-Jordan è quello che ci è stato proposto fin dalla scuola primaria. Pensiamo di prendere una certa regione di piano Ω disegnata su un foglio quadrettato rettangolare. L'insieme Q è il foglio, la quadrettatura rappresenta la suddivisione D. Consideriamo quindi la funzione caratteristica χ_Ω. Le somme inferiori $s(D, \chi_\Omega)$ contano i quadratini contenuti totalmente in Ω, mentre le somme superiori $S(D, \chi_\Omega)$ contano i quadratini che intersecano Ω in almeno un punto.*

Dal ragionamento appena fatto risulta ovvio che se prendiamo un foglio di carta millimetrata i risultati sono più accurati e che il valore $S(D, \chi_\Omega) - s(D, \chi_\Omega)$ tenderà a zero riducendo ulteriormente la grandezza dei quadratini.

Esempio 2.6. *Ovviamente i rettangoli $Q = [a,b] \times [c,d]$ sono insiemi misurabili secondo Peano-Jordan e vale $|Q| = (b-a)(d-c)$, mentre l'insieme $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0,1] \times [0,1])$ non lo è (cf. Esempio 1.10).*

Definizione 2.7 (Insieme di misura nulla)**.** *Un insieme E limitato si dice di misura nulla se è misurabile e vale $|E| = 0$.*

Nota 2.8. *L'insieme $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0,1] \times [0,1])$ non ha misura nulla secondo Peano-Jordan; non è nemmeno misurabile!*

Esiste un altro tipo di misura, chiamata misura di Lebesgue *introdotta al fine di definire l'*integrale di Lebesgue*. Secondo questa misura l'insieme precedente risulta misurabile con misura di Lebesgue nulla.*

Teorema 2.9 (Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ limitato. L'insieme E ha misura di Peano-Jordan nulla se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esistono dei rettangoli $Q_1, \dots, Q_n$ (in numero finito!) tali che*

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Q_i\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} |Q_i| < \varepsilon. \tag{22}$$

[1] Qui forniamo diverse possibili notazioni per l'area dell'insieme Ω usate in letteratura.

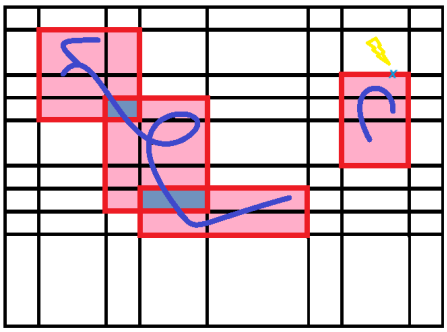

Figura 5: Un'idea dell'implicazione "$\Leftarrow$" della dimostrazione del Teorema 2.9.

Dimostrazione. Implicazione "$\Rightarrow$". Poiché $\int_Q \chi_E = 0$ allora 0 è l'estremo inferiore delle somme superiori, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione D tale che $S(D, \chi_E) < \varepsilon$, in particolare

$$\varepsilon > S(D, \chi_E) = \sum_{k,h} M_{kh}|Q_{kh}| = \sum_{\bullet} |Q_{kh}|$$

dove $\sum_{\bullet}$ indica che la somma è effettuata sugli indici k, h tali che $Q_{kh} \cap E \neq \varnothing$, che sono gli indici per cui $M_{kh} = 1$; gli altri soddisfano $M_{kh} = 0$. Poiché la suddivisione D è formata da un numero finito di rettangolini, a maggior ragione è finito il numero di rettangolini della suddivisione che soddisfano la proprietà $Q_{kh} \cap E \neq \varnothing$.

Implicazione "$\Leftarrow$". Mostriamo dapprima che non è restrittivo assumere che $Q_1, \dots, Q_n$ soddisfino

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{Q}_i \,. \tag{23}$$

Infatti, se abbiamo un insieme finito di rettangoli $Q_1, \dots, Q_n$ che soddisfano (22), allora possiamo ingrandirli leggermente in modo da ottenere dei rettangoli $\widetilde{Q}_1, \dots, \widetilde{Q}_n$ più grandi che contengono i precedenti. Ovviamente questi rettangoli soddisferanno la richiesta

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{\widetilde{Q}}_i \,.$$

Se abbiamo cura di non ingrandire troppo i rettangoli, l'area che aggiungeremo non sarà troppo grande e potremo continuare ad avere

$$\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{Q}_i| < \varepsilon.$$

Quindi possiamo sostituire i rettangoli così ottenuti agli originali e continuare la dimostrazione come segue.

Dall'ipotesi consideriamo un rettangolo $Q = [a, b] \times [c, d]$ che contenga l'insieme $\bigcup_{i=1}^{n} Q_i$, dove denotiamo i rettangolini come $Q_i = [\alpha_i, \beta_i] \times [\gamma_i, \delta_i]$ Consideriamo le suddivisioni individuate dai vertici dei rettangoli $Q, Q_1, \dots, Q_n$ (si veda la Figura 5):

$$\begin{aligned} D_1 &= \{a, b, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n\}\,, \\ D_2 &= \{c, d, \gamma_1, \delta_1, \dots, \gamma_n, \delta_n\}\,, \\ D &= D_1 \times D_2\,. \end{aligned}$$

Possiamo concludere che

$$S(D, \chi_E) = \sum_{k,h} M_{kh}|Q_{kh}| \overset{!}{\leq} \sum_{\diamond} |Q_{kh}| \overset{!!}{\leq} \sum_{i=1}^{n} |Q_i| < \varepsilon\,,$$

dove in "$\diamond$" la somma è effettuata sui rettangoli di indici k, h tali che $Q_{kh} \subset Q_i$ per un qualche indice i. La disuguaglianza denotata con "!" si ha perché maggioriamo il valore M_{kh} con il valore 1 su tutti i rettangoli coinvolti nella sommatoria, i rettangoli che sono stati esclusi dalla somma invece hanno sicuramente valore

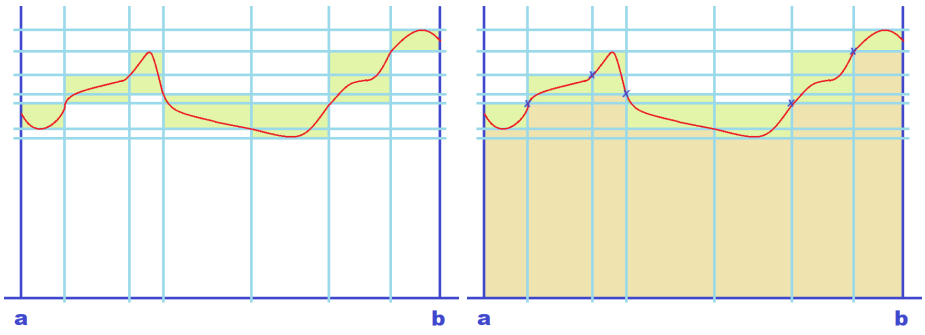

Figura 6: A sinistra, uno schizzo della dimostrazione della Proposizione 2.12: i rettangoli in verde rappresentano i rettangoli Q_i introdotti nella dimostrazione. A destra, uno schizzo della dimostrazione del Corollario 2.13: si noti che le somme $s(D_1, g)$ contano le aree dei sette *rettangoli alti* in arancione, mentre le $s(D, \chi_A)$ contano le aree di tutti i *rettangolini arancioni* di cui sono costituiti; l'area totale è la stessa. Analogamente per le somme $S(D_1, g)$ e $S(D, \chi_A)$ dobbiamo aggiungere il contributo delle aree in verde.

$M_{kh} = 0$ e non davano alcun contributo. La disuguaglianza denotata con "!!" si ha perché se qualche rettangolino Q_{kh} fosse contenuto in diversi rettangoli Q_i, con questo passaggio conteremmo la sua area più volte. In che passaggio è stato necessario considerare la condizione (23)? Tale pignoleria è dovuta al fatto che, se avessimo un punto $x \in E$ appartenente al bordo di uno dei rettangoli Q_i allora ci sarebbe il pericolo che tale punto fornisca un contributo ai rettangoli Q_{kh} confinanti che non hanno la proprietà di coprire il rettangolo Q_i. A titolo di esempio, nella Figura 5 è evidenziato da un fulmine un possibile punto x che crea questa difficoltà. □

Teorema 2.10 (Caratterizzazione degli insiemi misurabili)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato, Ω è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se $\partial\Omega$ ha misura di Peano-Jordan nulla.*

Dimostrazione omessa.

Da qui in avanti ometteremo di specificare che stiamo considerando la misura di Peano-Jordan, sottintendendolo.

Esempio 2.11.

- *Un numero finito di punti forma un insieme di misura nulla.*
- *Dato un insieme di misura nulla, tutti i suoi sottoinsiemi hanno misura nulla.*
- *Un sottoinsieme limitato di una retta (es. un segmento) ha misura nulla.*
- *L'unione finita di insiemi di misura nulla ha misura nulla.*
- *La regione di piano delimitata da un poligono è un insieme misurabile.*

Proposizione 2.12. *Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann su $[a, b]$, allora il grafico di g*

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\,,\ y = g(x)\}$$

è un insieme di misura nulla.

Dimostrazione. Dal fatto che $g \in \mathscr{R}([a, b])$ abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $D_1 = \{x_0, \dots, x_r\}$ di $[a, b]$ tale che $S(D_1, g) - s(D_1, g) < \varepsilon$. Definiamo i rettangoli

$$Q_i = [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]\,, \quad \text{dove } m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x)\,, \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x)\,, \quad i = 1, \dots, r\,. \tag{24}$$

Notiamo che

$$G \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} Q_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{r} |Q_i| = \sum_{i=1}^{r} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = S(D_1, g) - s(D_1, g) < \varepsilon\,,$$

da cui giungiamo alla tesi grazie al Teorema 2.9. □

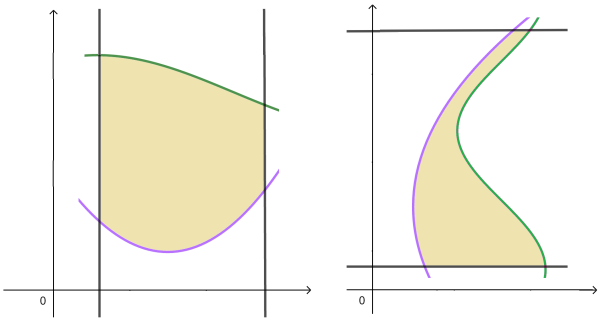

Figura 7: Vedi Definizione 3.1.

Corollario 2.13. *Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in \mathscr{R}([a,b])$, tale che $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$, allora l'insieme*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b]\,,\ 0 \leq y \leq g(x)\}$$

è un insieme misurabile e vale

$$|A| = \int_a^b g(x)\,dx$$

Quanto segue non è la dimostrazione rigorosa del precedente enunciato. Contiene infatti un'imprecisione che può essere risolta facilmente, ma perdendo notevolmente in eleganza. La magagna è dovuta ai punti segnalati con una x nel disegno sulla destra in Figura 6.

Seguiamo il ragionamento della dimostrazione precedente. Dato ε possiamo trovare la suddivisione $D_1 = \{x_0, \ldots, x_r\}$ di $[a,b]$ tale che $S(D_1, g) - s(D_1, g) < \varepsilon$ e definire i valori m_i, M_i come in (24) e $M = \max M_i$. L'insieme A è contenuto nel rettangolo $Q = [a,b] \times [0,M]$, di cui introduciamo la suddivisione $D = D_1 \times D_2$ dove $D_2 = \{0, m_1, M_1, \ldots, m_r, M_r\}$. *Possiamo calcolare*

$$s(D, \chi_A) = s(D_1, g)\,, \quad S(D, \chi_A) = S(D_1, g)\,,$$

da cui troviamo che $\chi_A \in \mathscr{R}(Q)$ e $\iint_Q \chi_A = \int_a^b g(x)\,dx$. Le ultime affermazioni in corsivo non sono corrette a causa della magagna presentata di punti segnalati in figura che fanno sì che il valore $S(D, \chi_A)$ sia superiore in quanto in esso vanno considerate anche le aree dei rettangoli bianchi in figura che hanno come vertice i punti segnalati con una x. Naturalmente infittendo la suddivisione possiamo rendere arbitrariamente piccolo questo errore e ottenere una dimostrazione più rigorosa ma più macchinosa.

3 Integrazione su domini normali

Definizione 3.1 (Dominio normale)**.**

- *Dato l'intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, siano date le funzioni $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g_1, g_2 \in \mathscr{R}([a,b])$ tali che $g_1(x) \leq g_2(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. L'insieme*

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b]\,,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

si dice **dominio normale rispetto all'asse** x *(o* **regione** y**-semplice** *).*

- *Dato l'intervallo $[c,d] \subset \mathbb{R}$, siano date le funzioni $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$, $h_1, h_2 \in \mathscr{R}([c,d])$ tali che $h_1(y) \leq h_2(y)$ per ogni $y \in [c,d]$. L'insieme*

$$\mathcal{F} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d]\,,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

si dice **dominio normale rispetto all'asse** y *(o* **regione** x**-semplice** *).*

Osservazione 3.2. *Dal corollario precedente risulta che $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ sono insiemi misurabili e*

$$|\mathcal{E}| = \int_a^b g_2(x) - g_1(x)\,dx \quad e \quad |\mathcal{F}| = \int_c^d h_2(y) - h_1(y)\,dy\,.$$

Esempio 3.3 (Il cerchio)**.** *Il cerchio di raggio R centrato nell'origine può essere visto come dominio normale rispetto all'asse x:*

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-R,R]\,,\ -\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}\ \right\}\end{aligned}$$

dove, da un calcolo probabilmente già visto,

$$|\mathcal{E}| = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2} - \Big(-\sqrt{R^2-x^2}\Big)\,dx = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}\,dx = \cdots = \pi R^2\,.$$

Esempio 3.4 (L'ellisse)**.** *L'ellisse di assi a e b può essere visto come dominio normale rispetto all'asse x:*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{E}} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\ \right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-a,a]\,,\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ \right\}\end{aligned}$$

dove, da un calcolo probabilmente già visto,

$$|\widetilde{\mathcal{E}}| = \int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} - \left(-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\,dx = \int_{-R}^{R} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \cdots = \pi ab\,.$$

Definizione 3.5. *Sia $Q = [a,b] \times [c,d]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata. La funzione f si dice* **generalmente continua** *se l'insieme dei punti di discontinuità di f ha misura di Peano-Jordan nulla.*

Teorema 3.6. *Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata. Se f è generalmente continua allora f è integrabile secondo Riemann su Q.*

Dimostrazione. Sia E l'insieme dei punti di discontinuità di f. Possiamo supporre che E sia contenuto in $\mathring{Q}$: infatti se così non fosse potremmo considerare un rettangolo più grande Q', tale che $\mathring{Q}' \supset Q$, e l'estensione a zero $\widetilde{f} : Q' \to \mathbb{R}$ della funzione f. Tale funzione avrà come insieme dei punti di discontinuità E' tale che $E' \subseteq E \cup \partial Q$, in quanto un punto di discontinuità di f sarà un punto di discontinuità di $\widetilde{f}$ e non saremo in grado di garantire la continuità sulla frontiera del rettangolo Q. La funzione $\widetilde{f}$ così definita ha le proprietà richieste dal teorema e risulta $f \in \mathscr{R}(Q)$ se e solo se $\widetilde{f} \in \mathscr{R}(Q')$.

Per ipotesi l'insieme E dei punti di discontinuità ha misura nulla, quindi dal Teorema 2.9, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono dei rettangoli $Q_1, \ldots, Q_n$ tali che[2]

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{Q}_i\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} |Q_i| < \varepsilon.$$

Consideriamo l'insieme $C = Q \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{Q}_i$. Notiamo che C è chiuso e limitato, quindi compatto. La restrizione $f|_C : C \to \mathbb{R}$ è quindi uniformemente continua.

Dato il valore ε scelto precedentemente possiamo quindi trovare $\delta > 0$ tale che, per ogni $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in C$,

$$\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon\,. \tag{25}$$

Consideriamo ora una suddivisione D di Q tale che $|D| < \delta$ avente la seguente proprietà: ogni rettangolo Q_i precedentemente introdotto si può ottenere dall'unione di alcuni rettangoli Q_{kh} della suddivisione, ovvero chiediamo che $Q_{kh} \subseteq Q_i$ ogni qualvolta $Q_{kh} \cap \mathring{Q}_i \neq \varnothing$. Tale condizione è soddisfatta se includiamo nelle suddivisioni D_1 e D_2 le coordinate dei vertici dei rettangoli Q_i.

Divideremo i rettangoli Q_{kh}, in due gruppi:

[2]Esercizio: perché possiamo prendere $\mathring{Q}_i$ invece di Q_i?

(1) Il primo gruppo comprende i rettangoli Q_{kh} contenuti in uno dei rettangoli Q_i. In questo caso usiamo la stima $M_{kh} - m_{kh} \leq M - m$ con $M = \sup_Q f$ e $m = \inf_Q f$. Sommando i contributi trovo:

$$\sum_{Q_{kh}\,:\,(1)} (M_{kh} - m_{kh})|Q_{kh}| \leq \sum_{Q_{kh}\,:\,(1)} (M-m)|Q_{kh}| = (M-m) \sum_{Q_{kh}\,:\,(1)} |Q_{kh}| < (M-m)\varepsilon\,.$$

(2) Il secondo gruppo comprende i rettangoli Q_{kh} contenuti nell'insieme C. In questo caso, usando la (25) e ricordando che $|D| < \delta$ troviamo $M_{kh} - m_{kh} < \varepsilon$. Sommando i contributi trovo:

$$\sum_{Q_{kh}\,:\,(2)} (M_{kh} - m_{kh})|Q_{kh}| < \sum_{Q_{kh}\,:\,(2)} \varepsilon|Q_{kh}| = \varepsilon \sum_{Q_{kh}\,:\,(2)} |Q_{kh}| = \varepsilon|C| \leq \varepsilon|Q|\,.$$

Concludiamo quindi con

$$\begin{aligned} S(D,f) - s(D,f) &= \sum_{k,h} (M_{kh} - m_{kh})|Q_{kh}| \\ &= \sum_{Q_{kh}\,:\,(1)} (M_{kh} - m_{kh})|Q_{kh}| + \sum_{Q_{kh}\,:\,(2)} (M_{kh} - m_{kh})|Q_{kh}| < \varepsilon(\,M - m + |Q|\,)\,, \end{aligned}$$

quindi $f \in \mathscr{R}(Q)$. □

Corollario 3.7. *Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua definita su Ω insieme misurabile compatto, allora $f \in \mathscr{R}(\Omega)$.*

Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e limitata definita su Ω insieme misurabile limitato, allora $f \in \mathscr{R}(\Omega)$.

Dimostrazione. Consideriamo Q tale che $\Omega \subseteq Q$ e l'estensione $\widetilde{f}$ su Q. La funzione $\widetilde{f}$ è limitata e discontinua al più in $\partial\Omega$, che essendo Ω misurabile, ha misura nulla. Quindi $\widetilde{f} \in \mathscr{R}(Q)$, essendo $\widetilde{f}$ generalmente continua, da cui la tesi. □

Il precedente corollario, ci permette di applicare il Teorema di riduzione 1.18 in presenza di funzioni definite su domini normali individuati da funzioni continue.

Corollario 3.8 (Integrazione su domini normali)**.**

- *Consideriamo un dominio $\mathcal{E}$ normale rispetto all'asse x, definito come sopra:*

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b]\,,\, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}\,,$$

dove g_1, g_2 sono continue. Sia $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ limitata e continua su $\mathring{\mathcal{E}}$, allora $f \in \mathscr{R}(\mathcal{E})$ e vale

$$\iint_{\mathcal{E}} f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx\,. \tag{26}$$

- *Consideriamo un dominio $\mathcal{F}$ normale rispetto all'asse y, definito come sopra:*

$$\mathcal{F} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d]\,,\, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}\,,$$

dove h_1, h_2 sono continue. Sia $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ limitata e continua su $\mathring{\mathcal{F}}$, allora $f \in \mathscr{R}(\mathcal{F})$ e vale

$$\iint_{\mathcal{F}} f = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy\,. \tag{27}$$

Dimostrazione. La dimostrazione si ha osservando che, dato un rettangolo Q che contiene $\mathcal{E}$,

$$\iint_Q \widetilde{f} = \int_a^b \left(\int_c^d \widetilde{f}(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Analogo ragionamento per l'insieme $\mathcal{F}$. □

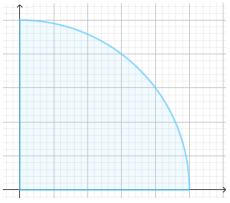

Figura 8: Vedi Esempio 3.9.

Esempio 3.9. *Calcoliamo l'integrale* $\int_\Omega x\sqrt{y}\,dx\,dy$ *dove* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\,,\, x \ge 0\,,\, y \ge 0\}$.

Possiamo dapprima osservare che Ω *può essere scritto come dominio normale rispetto ad entrambi gli assi:*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1]\,,\, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\,\} \tag{28}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,1]\,,\, 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}\,\}\,. \tag{29}$$

Osserviamo, utilizzando la formulazione (28) *che le funzioni* $g_1(x) = 0$ *e* $g_2(x) = \sqrt{1-y^2}$ *sono ben definite e continue in* $[0,1]$. *La funzione* $f(x,y) = x\sqrt{y}$ *è continua su* $\mathbb{R} \times [0,+\infty) \supset \Omega$. *Possiamo quindi utilizzare la formula* (26)*:*

$$\begin{aligned}\iint_\Omega x\sqrt{y}\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\sqrt{y}\,dy\right) dx \\ &= \int_0^1 x\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3}x(1-x^2)^{\frac{3}{4}}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}s^{\frac{3}{4}}\,ds = \frac{1}{3}\frac{4}{7} = \frac{4}{21}\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo effettuato la sostituzione $s = 1-x^2$.

Applicando invece la formula (27)*:*

$$\begin{aligned}\iint_\Omega x\sqrt{y}\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\sqrt{y}\,dx\right) dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{y}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{y}\frac{1}{2}(1-y^2)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{5}{2}}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{7}\right] = \frac{4}{21}\,.\end{aligned}$$

Notiamo che è più conveniente intraprendere la seconda strada.

Esempio 3.10. *Consideriamo* $f : Q \to \mathbb{R}$, *dove* $Q = [0,1] \times [0,1]$ *e*

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } y \ge x^2 \\ y & \text{se } y < x^2\,. \end{cases}$$

Notiamo che f *è discontinua al più sull'insieme* $G = \{(x,y) \in Q \mid y = x^2\}$ *ma esso ha misura nulla essendo* G *il grafico della funzione continua* $g(x) = x^2$. *Quindi* f *è generalmente continua e dal Teorema 3.6 abbiamo*

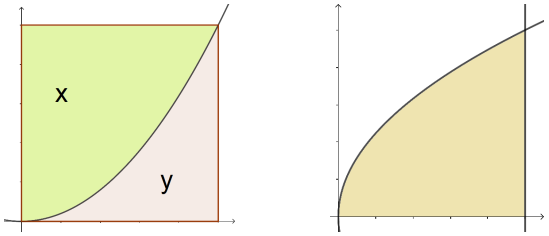

Figura 9: Vedi Esempio 3.10 ed Esempio 3.11.

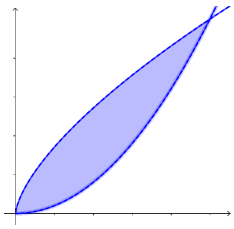

Figura 10: Vedi Esempio 3.12.

$f \in \mathscr{R}(Q)$. Calcoliamo quindi l'integrale:

$$\begin{aligned}\iint_Q f &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} y\,dy + \int_{x^2}^1 x\,dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{x^2} + x \left[y \right]_{x^2}^1 \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}x^4 + x - x^3\,dx = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3.11. *Consideriamo ora la regione chiusa di piano Ω delimitata dalle rette $y = 0$, $x = 1$ e dall'arco di parabola $x = y^2$. Questa regione può essere scritta in forma di dominio normale come*

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1]\,,\, 0 \le y \le \sqrt{x}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,1]\,,\, y^2 \le x \le 1\}\,.\end{aligned}$$

L'integrale di una funzione continua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ può esser quindi calcolato mediante due approcci:

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 f(x,y)\,dx \right) dy\end{aligned}$$

Calcolare l'integrale su Ω delle seguenti funzioni: (a) $f(x,y) = xy$, (b) $f(x,y) = xye^y$, (c) $f(x,y) = y^3 e^{xy}$.

Esempio 3.12. *Dato l'insieme*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\,, x^2 \le y \le x^{2/3}\}\,,$$

calcoliamo l'integrale

$$\iint_\Omega x e^{y^2}\,dx\,dy\,.$$

L'insieme è palesemente un dominio normale rispetto all'asse x, quindi possiamo impostare l'integrale come

$$\iint_\Omega x\mathrm{e}^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x^{2/3}} x\mathrm{e}^{y^2}\,dy\right) dx\,,$$

ma sorge il seguente problema: non sappiamo calcolare la primitiva di e^{y^2} (ricordiamo che x va trattato come una costante, mentre integriamo nella variabile y).

Dobbiamo trovare un'altra strada. Possiamo scrivere Ω come dominio normale rispetto all'asse y:

$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1\,, y^{3/2}\le x\le y^{1/2}\}\,.$$

In questo caso abbiamo

$$\begin{aligned}\iint_\Omega x\mathrm{e}^{y^2}\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{y^{3/2}}^{y^{1/2}} x\mathrm{e}^{y^2}\,dx\right) dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{y^{3/2}}^{y^{1/2}} \mathrm{e}^{y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (y-y^3)\mathrm{e}^{y^2} = \cdots\end{aligned}$$

A questo punto l'integrale può essere risolto scegliendo la sostituzione $s=y^2$ e integrando per parti. Completare per esercizio.

Nota 3.13 (Cose da non fare)**.** *Supponiamo di dover integrare una funzione su un rettangolo $Q=[a,b]\times[c,d]$; è sconsigliabile scrivere semplicemente*

$$\iint_Q f = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

senza le parentesi tonde si rischierebbe alla lunga di confondere gli estremi di integrazione (al passaggio successivo verrebbe voglia di scrivere $dx\,dy$ al posto di $dy\,dx$). A volte si preferisce una scrittura del tipo

$$\iint_Q f = \int_a^b dx \int_c^d dy\ f(x,y)\,,$$

affiancando ad ogni simbolo di integrale la variabile a cui si riferiscono gli estremi nell'ordine in cui verranno effettuati gli integrali (partendo da destra verso sinistra). Tuttavia questa notazione presenta la seguente difficoltà: non è più palese dove finisce l'integrale. In un certo senso il simbolo di integrale $\int$ fa da parentesi aperta e un termine come dx fa da parentesi chiusa.

Inoltre, adottando quest'ultimo tipo di notazione, richiamando i calcoli dell'Esempio 3.12, risulta **sbagliatissima** *una scrittura del tipo*

$$\int_{y^{3/2}}^{y^{1/2}} dx \int_0^1 dy\, x\mathrm{e}^{y^2}\,,$$

infatti, con questa notazione, dovremmo integrare prima nella variabile y (che quindi scomparirebbe dall'argomento dell'integrale nella variabile x), poi nella variabile x e qui le y comparirebbero ottenendo una funzione invece che un numero reale! Questo erroraccio è stato visto in diversi esami scritti!