# Integrazione in più variabili

SECONDA PARTE

## 4 Proprietà dell'integrale

Molte delle proprietà viste per gli integrali di Riemann per funzioni con dominio contenuto in $\mathbb{R}$, continuano a valere per funzioni con dominio contenuto in $\mathbb{R}^2$.

**Proposizione 4.1** (Linearità dell'integrale)**.** *Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathscr{R}(\Omega)$ vale*

$$\int_\Omega (\lambda f + \mu g) = \lambda \left( \int_\Omega f \right) + \mu \left( \int_\Omega g \right).$$

*Quindi l'insieme $\mathscr{R}(\Omega)$, delle funzioni integrabili secondo Riemann su $\Omega$, risulta uno spazio vettoriale e l'applicazione di integrazione $I : \mathscr{R}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definita come $I(f) = \int_\Omega f$, è un'applicazione lineare appartenente al duale di $\mathscr{R}(\Omega)$.*

**Proposizione 4.2** (Monotonia dell'integrale)**.** *Siano $f, g \in \mathscr{R}(\Omega)$ tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in \Omega$. Allora*

$$\int_\Omega f \leq \int_\Omega g\,.$$

**Esercizio 4.3.** *Scrivere la dimostrazione delle Proposizioni 4.1 e 4.2 ispirandosi alle dimostrazioni degli enunciati analoghi visti nel corso di analisi precedente.*

*Senza perdere in generalità si può supporre che $\Omega$ sia un rettangolo. Infatti, per un insieme misurabile $\Omega$ generico, la tesi si ottiene considerando le estensioni $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ su un rettangolo $Q$ contenente $\Omega$.*

**Teorema 4.4** (Teorema della composta)**.** *Consideriamo una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{R}(\Omega)$, dove $\Omega$ è misurabile, e una funzione continua $F : [\inf_\Omega f, \sup_\Omega f] \to \mathbb{R}$. Allora la funzione $G = F \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ è integrabile su $\Omega$, ovvero $G \in \mathscr{R}(\Omega)$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo un rettangolo $Q \supset \Omega$ e l'intervallo $[m, M]$ dove $m = \inf_\Omega f$ e $M = \sup_\Omega f$. La funzione $F$ è uniformemente continua su $[m, M]$, quindi

$$\exists R > 0 \,:\, F([m, M]) \subseteq [-R, R]\,; \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0 \,:\, |s_1 - s_2| < \delta \;\Rightarrow\; |F(s_2) - F(s_1)| < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Essendo $f \in \mathscr{R}(\Omega)$ allora $\widetilde{f} \in \mathscr{R}(Q)$. Consideriamo la funzione $\widetilde{G}$ estensione a zero della funzione $G = F \circ f$ su $Q$; mostreremo che $\widetilde{G} \in \mathscr{R}(Q)$.[1]

Richiamando i valori $\varepsilon$ e $\delta$ introdotti precedentemente, valendo $\widetilde{f} \in \mathscr{R}(Q)$ e $|\partial\Omega| = 0$ ($\Omega$ è misurabile!) allora esiste una suddivisione $D$ di $Q$ tale che[2]

$$S(D, \widetilde{f}) - s(D, \widetilde{f}) < \delta\varepsilon\,, \tag{3}$$

$$S(D, \chi_{\partial\Omega}) < \varepsilon\,. \tag{4}$$

Per ogni rettangolo $Q_{kh}$ della suddivisione $D$, abbiamo tre posizioni possibili del rettangolo rispetto all'insieme $\Omega$:

$$Q_{kh} \cap \partial\Omega \neq \varnothing\,, \qquad Q_{kh} \subset \overline{\Omega}^c\,, \qquad Q_{kh} \subset \mathring{\Omega}\,.$$

Analizziamoli uno alla volta.

$$(a): \qquad Q_{kh} \cap \partial\Omega \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \sup_{Q_{kh}} \widetilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \widetilde{G} \leq 2R\,,$$

[1] Attenzione: $\widetilde{G} \neq F \circ \widetilde{f}$!

[2] Per quale motivo posso assumere che la suddivisione $D$ soddisfi contemporaneamente entrambe le condizioni? Rispondere a questa domanda per esercizio.

infatti per ogni $x \in Q_{kh}$, se $x \in \Omega$ allora $\widetilde{G}(x) = G(x) = F(f(x)) \in F([m,M]) \subseteq [-R,R]$, cf. (1), se invece $x \notin \Omega$ allora $\widetilde{G}(x) = 0$. In entrambi i casi vale $\widetilde{G}(x) \in [-R,R]$, da cui la stima sopra.

$$(b): \qquad Q_{kh} \subset \overline{\Omega}^c \;\Rightarrow\; \widetilde{G} = 0 \text{ su } Q_{kh} \;\Rightarrow\; \sup_{Q_{kh}} \widetilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \widetilde{G} = 0 - 0 = 0\,.$$

Rimane il caso

$$(c): \qquad Q_{kh} \subset \mathring{\Omega}\,, \quad \text{quindi } G = \widetilde{G} \text{ e } f = \widetilde{f} \text{ in } Q_{kh}\,,$$

che dividiamo in due sottocasi per ottenere le stime adeguate.

$$(c1): \qquad Q_{kh} \subset \mathring{\Omega} \text{ e vale } M_{kh} - m_{kh} < \delta \;\Rightarrow\; \sup_{Q_{kh}} \widetilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \widetilde{G} < \varepsilon\,,$$

infatti in questo caso, essendo $M_{kh} - m_{kh} = \sup_{Q_{kh}} f - \inf_{Q_{kh}} f < \delta$ allora per ogni $x_1, x_2 \in Q_{kh}$ vale $|f(x_1) - f(x_2)| < \delta$, quindi abbiamo la stima precedente usando l'uniforme continuità di $F$, cf. (2).

$$(c2): \qquad Q_{kh} \subset \mathring{\Omega} \text{ e vale } M_{kh} - m_{kh} \geq \delta \qquad \text{perlomeno } \sup_{Q_{kh}} \widetilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \widetilde{G} \leq 2R\,,$$

in questo caso abbiamo poca fortuna e *ci dobbiamo accontentare* di usare la limitatezza della $F$, cf. (1), come già fatto nel caso $(a)$.

Possiamo ora dare una stima del valore $S(D,\widetilde{G}) - s(D,\widetilde{G})$ spezzando la somma sui quattro gruppi[3]

$$\begin{aligned}
S(D,\widetilde{G}) - s(D,\widetilde{G}) &= \sum_{k,h} \left(\sup_{Q_{kh}} \widetilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \widetilde{G}\right) |Q_{kh}| \qquad \text{(spezziamo la somma sui casi)} \\
&= \sum_{(a)} \left(\sup_{Q_{kh}} \widetilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \widetilde{G}\right) |Q_{kh}| + \sum_{(b)} \left(\sup_{Q_{kh}} \widetilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \widetilde{G}\right) |Q_{kh}| \\
&\qquad + \sum_{(c1)} \left(\sup_{Q_{kh}} \widetilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \widetilde{G}\right) |Q_{kh}| + \sum_{(c2)} \left(\sup_{Q_{kh}} \widetilde{G} - \inf_{Q_{kh}} \widetilde{G}\right) |Q_{kh}| \\
&\leq 2R \sum_{(a)} |Q_{kh}| + 0 + \varepsilon \sum_{(c1)} |Q_{kh}| + 2R \sum_{(c2)} |Q_{kh}| \\
&\leq 2R \sum_{(a)} |Q_{kh}| + 0 + \varepsilon |Q| + 2R \sum_{(c2)} |Q_{kh}|
\end{aligned}$$

A questo punto il nostro obiettivo è mostrare che l'area totale dei rettangolini dei casi $(a)$ e $(c2)$ è *sufficientemente piccola*. Per quanto riguarda il caso $(a)$ troviamo, usando (4),

$$\sum_{(a)} |Q_{kh}| = S(D, \chi_{\partial\Omega}) < \varepsilon\,.$$

Per quanto rigurarda il caso $(c2)$ vale

$$\delta \sum_{(c2)} |Q_{kh}| \leq \sum_{(c2)} (M_{kh} - m_{kh}) |Q_{kh}| \leq \sum_{k,h} (\sup_{Q_{kh}} \widetilde{f} - \inf_{Q_{kh}} \widetilde{f}) |Q_{kh}| = S(D,\widetilde{f}) - s(D,\widetilde{f}) \leq \delta\varepsilon\,,$$

da cui possiamo semplificare i $\delta$ trovando $\sum_{(c2)} |Q_{kh}| \leq \varepsilon$. Riprendendo il calcolo precedente, troviamo

$$\begin{aligned}
S(D,\widetilde{G}) - s(D,\widetilde{G}) \leq \cdots &\leq 2R \sum_{(a)} |Q_{kh}| + 0 + \varepsilon |Q| + 2R \sum_{(c2)} |Q_{kh}| \\
&\leq 2R\varepsilon + 0 + \varepsilon |Q| + 2R\varepsilon\,,
\end{aligned}$$

da cui la tesi. □

[3] La notazione $\sum_{(*)}$ significa: somma sui rettangoli $Q_{kh}$ che soddisfano $(*)$.

**Corollario 4.5.** *Sia $\Omega$ misurabile, $f, g \in \mathscr{R}(\Omega)$ allora*

- $|f| \in \mathscr{R}(\Omega)$,
- $f^2 \in \mathscr{R}(\Omega)$,
- $\max(f,g) \in \mathscr{R}(\Omega)$ *e* $\min(f,g) \in \mathscr{R}(\Omega)$,
- *quindi* $f^+ = \max(f,0) \in \mathscr{R}(\Omega)$ *e* $f^- = \max(-f,0) \in \mathscr{R}(\Omega)$.
- $fg \in \mathscr{R}(\Omega)$.

*Dimostrazione.* Per i primi due punti usiamo il teorema precedente rispettivamente nel caso $F(y) = |y|$ e $F(y) = y^2$, quindi ricordando che

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}\left[(f+g) + |f-g|\right], \qquad \min(f,g) = \frac{1}{2}\left[(f+g) - |f-g|\right], \qquad fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right].$$

le altre seguono facilmente. □

**Teorema 4.6** (Teorema della media integrale)**.** *Sia $\Omega$ misurabile limitato, con $|\Omega| \neq 0$, e una funzione $f \in \mathscr{R}(\Omega)$ con $m = \inf_\Omega f$ e $M = \sup_\Omega f$. Allora*

$$m \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f \leq M\,.$$

*Dimostrazione.* Preso un rettangolo $Q \supset \Omega$, valendo $m\chi_\Omega \leq \widetilde{f} \leq M\chi_\Omega$, segue dalla monotonia dell'integrale che $m|\Omega| \leq \int_\Omega f \leq M|\Omega|$, da cui la tesi. □

**Corollario 4.7.** *Sia $\Omega$ misurabile limitato, con $|\Omega| = 0$, e una funzione $f$ limitata. Allora $f \in \mathscr{R}(\Omega)$ e $\int_\Omega f = 0$.*

**Corollario 4.8.** *Sia $\overline{\Omega}$ insieme chiuso misurabile limitato, con $|\Omega| \neq 0$, e una funzione $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $\xi \in \overline{\Omega}$ tale che*

$$f(\xi) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\,.$$

**Proposizione 4.9** (Additività rispetto al dominio di integrazione)**.** *Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ insiemi misurabili limitati tali che $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$, e definiamo $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ limitata.*

*Se $f|_{\Omega_1} \in \mathscr{R}(\Omega_1)$ e $f|_{\Omega_2} \in \mathscr{R}(\Omega_2)$, allora $f \in \mathscr{R}(\Omega)$ e vale*

$$\int_\Omega f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f\,.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo $Q \supset \Omega$ e l'estensione $\widetilde{f}$ di $f$, allora

$$\widetilde{f} = \widetilde{f}\left(\chi_{\Omega_1} + \chi_{\Omega_2} - \chi_{\Omega_1\cap\Omega_2}\right) = \widetilde{f}\,\chi_{\Omega_1} + \widetilde{f}\,\chi_{\Omega_2} - \widetilde{f}\,\chi_{\Omega_1\cap\Omega_2}\,.$$

Osserviamo che il primo e il secondo addendo sono funzioni di $\mathscr{R}(Q)$ per ipotesi valendo

$$\widetilde{f}\,\chi_{\Omega_1} = \widetilde{f|_{\Omega_1}} \quad \text{e} \quad \widetilde{f}\,\chi_{\Omega_2} = \widetilde{f|_{\Omega_2}}\,,$$

mentre il terzo addendo appartiene a $\mathscr{R}(Q)$, usando il Corollario 4.7. Sempre dal Corollario 4.7 e usando la linearità dell'integrale abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega f = \int_Q \widetilde{f} &= \int_Q \widetilde{f}\,\chi_{\Omega_1} + \int_Q \widetilde{f}\,\chi_{\Omega_2} - \int_Q \widetilde{f}\,\chi_{\Omega_1\cap\Omega_2} \\ &= \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f - \cancel{\int_{\Omega_1\cap\Omega_2} f}\end{aligned}$$

concludendo la dimostrazione. □

**Proposizione 4.10.** *Dati due insiemi misurabili $\Omega_1$ e $\Omega$ tali che $\Omega_1 \subset \Omega$, se $f \in \mathscr{R}(\Omega)$ allora $f \in \mathscr{R}(\Omega_1)$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo $Q \supset \Omega$, essendo $\Omega_1$ misurabile, allora $\chi_{\Omega_1} \in \mathscr{R}(Q)$. Sappiamo che $\widetilde{f} \in \mathscr{R}(Q)$, quindi usando che il prodotto di funzioni integrabili è integrabile, cf. Corollario 4.5, troviamo che $\widetilde{f|_{\Omega_1}} = \widetilde{f}\chi_{\Omega_1} \in \mathscr{R}(Q)$ cosicché $f \in \mathscr{R}(\Omega_1)$. □

**Proposizione 4.11** (Proprietà degli insiemi misurabili)**.** *Siano $\Omega_1$ e $\Omega_2$ due insiemi misurabili limitati. Allora $\Omega_1 \cap \Omega_2$ e $\Omega_1 \cup \Omega_2$ sono misurabili. Inoltre, se $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ allora $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ è misurabile.*

*Dimostrazione.* Preso un rettangolo $Q \supset \Omega_1 \cup \Omega_2$, le seguenti identità

$$\begin{aligned}
\chi_{\Omega_1\cap\Omega_2} &= \chi_{\Omega_1} \cdot \chi_{\Omega_2}\,, \\
\chi_{\Omega_1\cup\Omega_2} &= \chi_{\Omega_1} + \chi_{\Omega_2} - \chi_{\Omega_1\cap\Omega_2}\,, \\
\chi_{\Omega_2\setminus\Omega_1} &= \chi_{\Omega_2} - \chi_{\Omega_1}\,, \qquad\qquad \text{(questa vale se } \Omega_1 \subseteq \Omega_2)
\end{aligned}$$

danno facilmente la tesi. □

# 5 Integrazione in dimensione maggiore

La teoria vista finora può essere riscritta nel caso di funzioni $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ con $N \geq 3$. Dobbiamo solo adattare alcune definizioni. Il "rettangolo" $Q$ è definito ora come

$$Q = \left[a^1, b^1\right] \times \left[a^2, b^2\right] \times \cdots \times \left[a^N, b^N\right] = \prod_{i=1}^{N} \left[a^i, b^i\right]$$

e per $N = 3$ è a tutti gli effetti un parallelepipedo. La suddivisione $D$ sarà individuata come $D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_N$ dove

$$D_i = \left\{x_0^i, x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{r_i}^i\right\}, \qquad \text{con} \qquad a^i = x_0^i < x_1^i < x_2^i < \cdots < x_{r_i}^i = b^i\,.$$

è una suddivisione del corrispondente intervallo $[a^i, b^i]$. Ogni suddivisione $D$ suddivide $Q$ in piccoli "rettangolini" che denoteremo con

$$Q_{k_1,\cdots,k_N} = I_{k_1} \times \cdots \times I_{k_N} = \left[x_{k_1-1}^1, x_{k_1}^1\right] \times \cdots \times \left[x_{k_N-1}^N, x_{k_N}^N\right],$$

con misura

$$\left|Q_{k_1,\cdots,k_N}\right| = \left(x_{k_1}^1 - x_{k_1-1}^1\right) \cdots \left(x_{k_N}^N - x_{k_N-1}^N\right)$$

dove ogni indice $k_i$ varia nell'insieme $\{1, \ldots, r_i\}$.

Le somme superiori e inferiori quindi sono definite come

$$\begin{aligned}
S(D, f) &= \sum_{k_1,\cdots,k_N} M_{k_1,\cdots,k_N} \left|Q_{k_1,\cdots,k_N}\right| = \sum_{k_1,\cdots,k_N} \left(\sup_{Q_{k_1,\cdots,k_N}} f\right) \left|Q_{k_1,\cdots,k_N}\right|, \\
s(D, f) &= \sum_{k_1,\cdots,k_N} m_{k_1,\cdots,k_N} \left|Q_{k_1,\cdots,k_N}\right| = \sum_{k_1,\cdots,k_N} \left(\inf_{Q_{k_1,\cdots,k_N}} f\right) \left|Q_{k_1,\cdots,k_N}\right|.
\end{aligned}$$

**Definizione 5.1.** *Dato un rettangolo $Q \subset \mathbb{R}^N$ e una funzione $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata, essa si dice* integrabile secondo Riemann su $Q$ *se vale*

$$\sup_D s(D, f) = \inf_D S(D, f)$$

*e tale valore è detto* **integrale di Riemann di $f$ su $Q$.**

Le notazioni in questo caso sono:

$$\int_Q f\,, \qquad \int_Q f(x)\,dx\,, \quad \int_Q f(x_1, \ldots, x_N)\,dx_1 \cdots dx_N\,,$$

in particolare, se $N = 3$,

$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

**Definizione 5.2.** *Consideriamo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ limitata. Sia $Q \supset \Omega$ e definiamo l'estensione a zero di $f$ come*

$$\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}\,, \qquad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega\,, \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega\,. \end{cases}$$

*Diremo che $f$ è* **integrabile secondo Riemann su** $\Omega$ *se la sua estensione $\widetilde{f}$ è integrabile secondo Riemann su $Q$, ponendo*

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_Q \widetilde{f}(x)\,dx\,.$$

**Definizione 5.3** (Insiemi misurabili)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato contenuto in un rettangolo $Q$. Diremo che $\Omega$ è misurabile secondo Peano-Jordan se la* funzione caratteristica di $\Omega$

$$\chi_\Omega : Q \to \mathbb{R}\,, \quad \chi_\Omega = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega \end{cases}$$

*è integrabile secondo Riemann su $Q$. Definiamo* **misura di** $\Omega$ *il valore*

$$|\Omega| = \int_\Omega 1\,dx = \int_Q \chi_\Omega\,dx\,.$$

Nel caso $N = 3$, la misura di $\Omega$, è il suo volume, spesso denotato con $\mathrm{Vol}(\Omega)$.

**Esempio 5.4.** *Se $E$ è un sottoinsieme limitato di un iperpiano in $\mathbb{R}^N$ allora $|E| = 0$. Se $N = 3$, in particolare troviamo che le facce di un poliedro hanno misura nulla.*

Per funzioni $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continuano a valere i teoremi e i risultati visti finora. In particolare **le funzioni limitate generalmente continue definite su insiemi misurabili risultano integrabili secondo Riemann**. Alcuni risultati meritano tuttavia una "riscrittura".

**Osservazione 5.5.** *Sia $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$ misurabile e una funzione $g : \Omega \to \mathbb{R}$, $g \in \mathscr{R}(\Omega)$, allora il suo grafico*

$$G = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \mid x \in \Omega\,, y = g(x)\big\} \subset \mathbb{R}^N$$

*ha misura nulla. Inoltre, se $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$, allora l'insieme*

$$T = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \mid x \in \Omega\,, 0 \leq y \leq g(x)\big\} \subset \mathbb{R}^N$$

*è misurabile con misura*

$$|T| = \int_\Omega g(x)\,dx\,.$$

Riscriviamo ora il teorema di riduzione per $N \geq 3$. A questo scopo consideriamo una decomposizione dello spazio $\mathbb{R}^N$ come segue

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{N-K}\,, \qquad x = (x_1, \ldots, x_N) = (\xi, \eta)\,, \qquad \xi = (x_1, \ldots, x_K)\,, \qquad \eta = (x_{K+1}, \ldots, x_N)\,.$$

Analogamente possiamo decomporre un generico rettangolo $Q$:

$$Q = \prod_{i=1}^N \big[a^i, b^i\big] = Q_\xi \times Q_\eta = \prod_{i=1}^K \big[a^i, b^i\big] \times \prod_{i=K+1}^N \big[a^i, b^i\big]\,.$$

**Teorema 5.6** (Teorema di Riduzione)**.** *Sia $f : Q \to \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{R}(Q)$. Data la decomposizione $Q = Q_\xi \times Q_\eta$ come sopra, supponiamo che per ogni $\xi \in Q_\xi$ esista l'integrale $F(\xi) = \int_{Q_\eta} f(\xi, \eta)\,d\eta$, allora $F \in \mathscr{R}(Q_\xi)$ e vale*

$$\int_Q f(x)\,dx = \int_{Q_\xi \times Q_\eta} f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = \int_{Q_\xi} \left( \int_{Q_\eta} f(\xi, \eta)\,d\eta \right) d\xi\,.$$

Scrivere per esercizio la dimostrazione, adattando quella del corrispondente teorema per $N = 2$.

**Osservazione 5.7.** *Il precedente teorema vale anche rimescolando le variabili.*

In particolare, data $f$ continua, se prendiamo il caso $K = N - 1$ allora $Q_\eta$ è un segmento. In questo caso il teorema precedente ci dice che possiamo integrare una variabile alla volta, eliminandole via via.

**Esempio 5.8.** *Dato $Q = [1,2]\times[0,1]\times[0,2]$, sia $f : Q \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = \sqrt{x+y+z}$ calcoliamo $\iiint_Q f$.*

$$\begin{aligned}
\iiint_Q f(x,y,z)\,dxdydz &= \int_{[1,2]\times[0,1]} \left( \int_0^2 (x+y+z)^{1/2}\,dz \right) dxdy \\
&= \int_{[1,2]\times[0,1]} \left[ \frac{2}{3}\cdot(x+y+z)^{3/2} \right]_{z=0}^{z=2} dxdy \\
&= \frac{2}{3}\int_1^2 \left( \int_0^1 (x+y+2)^{3/2} - (x+y)^{3/2}\,dy \right) dx \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\int_1^2 \left[ (x+y+2)^{5/2} - (x+y)^{5/2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\int_1^2 (x+3)^{5/2} - (x+1)^{5/2} - (x+2)^{5/2} + (x)^{5/2}\,dx \\
&= \frac{8}{105}\left( 5^{7/2} - 3^{7/2} - 4^{7/2} + 2^{7/2} - 4^{7/2} + 2^{7/2} + 3^{7/2} - 1^{7/2} \right) = \cdots
\end{aligned}$$

Vediamo ora come si applica il teorema di riduzione nel caso $N = 3$. Nella seguente osservazione possono essere scambiati i ruoli delle variabili $x, y, z$ come nel teorema precedente.

**Osservazione 5.9** (Strategie in $\mathbb{R}^3$)**.** *Consideriamo il quadrato $Q = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$, e supponiamo per semplicità $f : Q \to \mathbb{R}$ continua. Mediante la scelta $K = 1$ e $K = 2$ nel teorema di riduzione troviamo*

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{a_1}^{b_1} \left( \iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)\,dydz \right) dx \qquad \textbf{integrazione per strati.}$$

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy \qquad \textbf{integrazione per fili,}$$

Vediamo ora come si adatta nel caso $N \geq 3$ la definizione di dominio normale. A questo scopo, scriveremo ogni elemento $x \in \mathbb{R}^N$ come $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R}$.

**Definizione 5.10.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$ un insieme misurabile e due funzioni $g_1, g_2 : \Omega \to \mathbb{R}$, tali che $g_1, g_2 \in \mathscr{R}(\Omega)$ e $g_1(x') \leq g_2(x')$ per ogni $x' \in \Omega$. L'insieme*

$$\mathcal{E} = \left\{ x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R} \mid x' \in \Omega\,,\ g_1(x') \leq x_N \leq g_2(x') \right\} \subset \mathbb{R}^N \tag{5}$$

*si dice* **dominio normale rispetto alle variabili $x'$** *(o* **regione $x_N$-semplice** *).*

**Proposizione 5.11** (Misura di un dominio normale)**.** *L'insieme $\mathcal{E}$ in (5) è misurabile. In particolare, scegliendo $Q \supset \Omega$ e $[m,M]$ tale che $m \leq g_1(x') \leq g_2(x') \leq M$ per ogni $x' \in \Omega$ cosicché $Q\times[m,M] \supset \mathcal{E}$, integrando per fili, troviamo*

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}| = \iint_{Q\times[m,M]} \chi_{\mathcal{E}}(x',x_N)\,dx'\,dx_N &= \int_Q \left( \int_m^M \chi_{\mathcal{E}}(x',x_N)\,dx_N \right) dx' \\
&= \int_\Omega \left( \int_m^M \chi_{\mathcal{E}}(x',x_N)\,dx_N \right) dx' + \int_{Q\setminus\Omega} \cancel{\left( \int_m^M \chi_{\mathcal{E}}(x',x_N)\,dx_N \right) dx'} \\
&= \int_\Omega \left( \cancel{\int_m^{g_1(x')} 0\,dx_N} + \int_{g_1(x')}^{g_2(x')} 1\,dx_N + \cancel{\int_{g_2(x')}^M 0\,dx_N} \right) dx' \\
&= \int_\Omega g_2(x') - g_1(x')\,dx'\,.
\end{aligned}$$

**Teorema 5.12** (Integrazione su domini normali)**.** *Dato un dominio normale $\mathcal{E}$ definito come in* (5)*. Supponiamo in più che $\Omega$ sia chiuso (quindi compatto), che le funzioni $g_1, g_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ e $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ siano continue allora $f \in \mathscr{R}(\mathcal{E})$ e vale*

$$\int_{\mathcal{E}} f = \int_{\mathcal{E}} f(x', x_N)\, dx'\, dx_N = \int_{\Omega} \left( \int_{g_1(x')}^{g_2(x')} f(x', x_N)\, dx_N \right) dx' .$$

**Osservazione 5.13.** *Il teorema precedente resta valido cambiando leggermente le ipotesi su $f$. Possiamo chiedere che $f$ sia limitata e continua su*

$$\mathring{\mathcal{E}} = \left\{ x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \mid x' \in \mathring{\Omega}\,,\ g_1(x') < x_N < g_2(x') \right\} \subset \mathcal{E}$$

*ottenendo lo stesso risultato.*

**Osservazione 5.14** (Volume dei solidi di rotazione)**.** *Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua non negativa. Definiamo l'insieme*

$$A = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in [a, b]\,,\ 0 \le y \le \varphi(z)\}\,.$$

*Consideriamo l'insieme $T$ che otteniamo ruotando $A$ attorno all'asse $z$, ovvero*

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [a, b]\,,\ \sqrt{x^2 + y^2} \le \varphi(z)\}\,,$$

*detto* **solido di rotazione di profilo** *$\varphi$. L'insieme $T$ è misurabile e, integrando per strati abbiamo, dato $Q = \widetilde{Q} \times [a, b] \supset T$,*

$$\begin{aligned} |T| = \int_Q \chi_T(x, y, z)\, dxdydz &= \int_a^b \left( \int_{\widetilde{Q}} \chi_T(x, y, z)\, dxdy \right) dz \\ &= \int_a^b \left( \int_{T_z} 1\, dxdy \right) dz \\ &= \int_a^b \mathrm{Area}(T_z)\, dz = \pi \int_a^b \big(\varphi(z)\big)^2\, dz \end{aligned}$$

*dove $T_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in T\} \subset \mathbb{R}^2$.*

**Risorsa internet:** `https://www.geogebra.org/m/YVembngS` In questa pagina internet, inserendo due funzioni $f$ e $g$ potete visualizzare un solido di rotazione avente due profili: il bordo esterno è individuato dalla funzione $f$, il bordo interno dalla funzione $g$. Attenzione: le notazioni non sono le stesse adottate qui sopra.

**Osservazione 5.15** (Principio di Cavalieri)**.** *Definiamo un* solido *come un insieme limitato $T \subset \mathbb{R}^3$ tale che le sezioni orizzontali $T \cap \{z = \bar{z}\}$ siano misurabili come oggetti bidimensionali, ovvero tale che l'insieme*

$$S_{\bar{z}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, \bar{z}) \in T\} \subset \mathbb{R}^2$$

*sia misurabile per ogni $\bar{z} \in \mathbb{R}$.*

*Siano $T_1, T_2$ due solidi misurabili in $\mathbb{R}^3$ tali che*

$$\mathrm{Area}(T_1 \cap \{z = \bar{z}\}) = \mathrm{Area}(T_2 \cap \{z = \bar{z}\})$$

*per ogni $\bar{z}$, allora $\mathrm{Vol}(T_1) = \mathrm{Vol}(T_2)$.*

**Esempio 5.16.** *Calcoliamo la formula per il volume del cono $T$ di raggio $r$ e altezza $h$. La sezione $A$ è individuata dalla retta $z = h\big(1 - \frac{y}{r}\big)$, da cui, isolando la variabile $y$, ricaviamo $y = \varphi(z) = r\big(1 - \frac{z}{h}\big)$. Quindi*

$$\mathrm{Vol}(T) = \pi \int_0^h r^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz = \pi\, h\, \frac{r^2}{3} \left[ -\left(1 - \frac{z}{h}\right)^3 \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2\, h\,.$$

**Esercizio 5.17.** *Calcolare il volume del cilindro di raggio $r$ e altezza $h$ e della sfera di raggio $r$.*

**Esempio 5.18.** *Calcoliamo il volume di*

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, 1]\,,\ x^2 + y^2 \leq \mathrm{e}^{-2z}\}\,.$$

*Esso è un solido di rotazione avente profilo* $\varphi(z) = \mathrm{e}^{-z}$*, quindi*

$$\mathrm{Vol}(T) = \pi \int_0^1 \mathrm{e}^{-2z}\, dz = \pi \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2z}\right]_0^1 dz = \frac{\pi}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2})\,.$$

**Definizione 5.19** (Baricentro e momento d'inerzia)**.** *Consideriamo una regione* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *misurabile. Sia* $\mu \in \mathscr{R}(\Omega)$ *positiva (la densità di massa), definiamo la* **massa** *totale del corpo* $\Omega$ *come* $m = \int_\Omega \mu(x)\, dx$*.*

*Definiamo il* **baricentro**[4] *di* $\Omega$ *come il punto* $G = (x_1^G, \dots, x_N^G) \in \mathbb{R}^N$ *tale che*

$$x_i^G = \frac{1}{m} \int_\Omega x_i \mu(x)\, dx\,.$$

*Nel caso in cui consideriamo* $\mu$ *costante, viene detto* **centroide***.*

*Definiamo il* **momento d'inerzia** *rispetto ad una retta* $r$ *(o ad un punto* $P$*) come*

$$I = \int_\Omega \big(\mathrm{d}(x)\big)^2 \mu(x)\, dx\,,$$

*dove* $\mathrm{d}(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ *è la distanza tra un punto* $x \in \Omega$ *e la retta* $r$ *(o il punto* $P$*). In particolare, per* $N = 3$*, scegliendo come retta l'asse* $z$ *abbiamo il momento d'inerzia rispetto all'asse* $z$*:*

$$I_z = \int_\Omega \big(x^2 + y^2\big)\mu(x, y, z)\, dxdydz\,.$$

*Scegliendo invece* $P = (0, 0, 0)$ *troviamo*

$$I_P = \int_\Omega \big(x^2 + y^2 + z^2\big)\mu(x, y, z)\, dxdydz\,.$$

**Esempio 5.20.** *Nel caso* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$*, il centroide è* $G = (x_G, y_G)$*, dove*

$$x_G = \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega x\, dxdy \quad e \quad y_G = \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega y\, dxdy\,.$$

*In questo caso infatti, essendo* $\mu = 1$ *troviamo* $m = |\Omega|$*. Nel caso di densità costante* $\mu = 1$*, i momenti d'inerzia rispetto all'asse* $x$ *e* $y$ *e rispetto all'origine risultano*

$$I_x = \iint_\Omega y^2\, dxdy\,,$$
$$I_y = \iint_\Omega x^2\, dxdy\,,$$
$$I_O = \iint_\Omega \big(x^2 + y^2\big)\, dxdy$$

**Esercizio 5.21.** *Trovare la posizione del centroide di un triangolo equilatero.*

*Trovare il centroide di un cono con diametro e altezza di ugual lunghezza. Trovare il momento d'inerzia rispetto all'asse* $z$ *della sfera di raggio* $R$ *centrata nell'origine, del cilindro di raggio* $R$ *e altezza* $h$*.*

**Esercizio 5.22.** *Calcolare il baricentro dei solidi di rotazione aventi densità di massa costante ottenuti mediante una rotazione completa attorno all'asse* $z$ *dei seguenti sottoinsiemi del piano* $y, z$*:* $E_1 = B_1\big((2, 0)\big) \cup B_1\big((6, 0)\big)$ *e* $E_2 = B_1\big((1, 1)\big) \cup B_1\big((3, 3)\big)$ *e confrontare il risultato ottenuto (specialmente per quanto riguarda il valore* $z_G$*) con le coordinate del baricentro dei corpi planari* $E_1$*,* $E_2$*.*

[4] Per essere più rigorosi dal punto di vista fisico, questa è la definizione del centro di massa, il caso particolare della definizione di baricentro in presenza della sola forza peso $P = mg$.

## 5.1 Il cambio di variabili negli integrali

**Definizione 5.23.** *Siano $U, V \subset \mathbb{R}^N$ due aperti, la funzione $T : U \to V$ si dice $C^1$-diffeomorfismo se essa è biiettiva, di classe $C^1$ e ha inversa $T^{-1}$ di classe $C^1$.*

**Osservazione 5.24.** *Se $T$ è $C^1$-diffeomorfismo allora $\det J_T(y) \neq 0$ per ogni $y \in U$. Infatti $\mathrm{Id} = T^{-1} \circ T$ da cui, usando il teorema della derivata della composta, $I_{\mathbb{R}^N} = J_{T^{-1}}(T(y)) \cdot J_T(y)$, quindi $J_{T^{-1}}(T(y)) = [J_T(y)]^{-1}$.*

**Osservazione 5.25.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, sia $T : \Omega \to \mathbb{R}^N$ di classe $C^1$ iniettiva, se per ogni $y \in \Omega$, $\det J_T(y) \neq 0$ allora, ricordando il teorema di inversione locale, abbiamo che $T(\Omega)$ è aperto e $T : \Omega \to T(\Omega)$ è $C^1$-diffeomorfismo.*

Ricordiamo ora la formula del teorema del cambio di variabili visto per funzioni di variabile reale, dove usualmente abbiamo $a < b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y))\,g'(y)\,dy\,.$$

Esso può essere riscritto come

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{g^{-1}([a,b])} f(g(y))\,|g'(y)|\,dy\,.$$

Per funzioni di variabile vettoriale, ci aspetteremmo qualcosa del tipo

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_{T^{-1}(\Omega)} f(T(y)) \quad ??? \quad dy\,.$$

**Proposizione 5.26.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, sia $T : \Omega \to T(\Omega)$, biiettiva di classe $C^1$ tale che $\det J_T(y) \neq 0$ per ogni $y \in \Omega$. Dato $S \subseteq \Omega$ tale che $\overline{S} \subseteq \Omega$ è compatto, allora $S$ è misurabile se e solo se $T(S)$ è misurabile.*

**Teorema 5.27** (Cambio di variabili)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, sia $T : \Omega \to T(\Omega)$, biiettiva di classe $C^1$ tale che $\det J_T(y) \neq 0$ per ogni $y \in \Omega$.*

*Dato $A \subseteq T(\Omega)$ tale che $\overline{A} \subseteq T(\Omega)$ è compatto. Se $A$ è misurabile e $f \in C(\overline{A})$, allora vale la* **formula del cambio di variabili***:*

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{T^{-1}(A)} f(T(y))\,\big|\det J_T(y)\big|\,dy\,,$$

*dove $J_T$ è la matrice Jacobiana di $T$ nel punto $y \in \Omega$.*

La dimostrazione è omessa.

**Osservazione 5.28.** *Se $\Omega$ è limitato, allora, dato $A \subseteq \Omega$, $\overline{A}$ sarà compatto automaticamente.*

*Se $\Omega$ e $T(\Omega)$ sono misurabili e limitati allora posso considerare $f \in C(A)$ limitata.*

**Osservazione 5.29** ( ! Importante ! )**.** *Possiamo rinunciare alla biunivocità di $T$ e l'ipotesi $\det J_T(y) \neq 0$ purché ciò accada su un insieme di misura nulla.*

**Osservazione 5.30.** *Notiamo che*[5]

$$\frac{\big|T\big(B_r(y_0)\big)\big|}{\big|B_r(y_0)\big|} = \frac{1}{\big|B_r(y_0)\big|}\int_{T(B_r(y_0))} 1\,dx = \frac{1}{\big|B_r(y_0)\big|}\int_{B_r(y_0)} |\det J_T(y)|\,dy\,,$$

*dove nella prima uguaglianza scriviamo la definizione di misura dell'insieme $T\big(B_r(y_0)\big)$ e nella seconda abbiamo fatto uso della formula del cambio di variabili nel caso $A = T\big(B_r(y_0)\big)$ e $f = 1$, osservando che $T^{-1}(A) = B_r(y_0)$.*

*Sfruttando il teorema della media, essendo $\det J_T$ continuo su $B_r(y_0)$, segue che per ogni $r > 0$ esiste un elemento $\xi_r \in B_r(y_0)$ tale che*

$$\frac{1}{\big|B_r(y_0)\big|}\int_{B_r(y_0)} |\det J_T(y)|\,dy \;= |\det J_T(\xi_r)|\,.$$

[5]In questa formula, la notazione $|\cdot|$ potrebbe creare confusione. Essa è utilizzata sia per denotare la misura di un insieme (nelle frazioni) sia per denotare il valore assoluto del determinante della matrice Jacobiana a destra.

*Passando al limite $r \to 0$ abbiamo che $\lim_{r\to 0} \xi_r = y_0$ e quindi, riassumendo,*

$$\frac{\big|T\big(B_r(y_0)\big)\big|}{\big|B_r(y_0)\big|} = \frac{1}{\big|B_r(y_0)\big|}\int_{B_r(y_0)} |\det J_T(y)|\,dy = |\det J_T(\xi_r)| \quad \overset{r\to 0^+}{\longrightarrow} \quad |\det J_T(y_0)|$$

*Possiamo quindi vedere $|\det J_T(y)|$ come un tasso puntuale di variazione o un fattore di riscalamento della misura $N$-dimensionale.*

*Non deve quindi sorprendere la presenza del determinante. Infatti, come noto dalla scuola secondaria, per $v, w \in \mathbb{R}^2$ il modulo del prodotto vettoriale $|v \wedge w| = |\det(v\ w)|$ è l'area del parallelogramma individuata dai vettori $v, w$, mentre per $v, w, z \in \mathbb{R}^3$ il valore assoluto del prodotto misto $|(v \wedge w)\cdot z| = |\det(v\ w\ z)|$ è il volume del parallelepipedo individuato dai vettori $v, w, z$. Nel corso di geometria si è vista anche la generalizzazione a dimensioni $N > 3$.*

## 5.2 Esercizi e applicazioni

**Esercizio 5.31.** *Calcoliamo l'area del parallelogramma $\mathcal{P}$ di vertici $A = (0,0)$, $B = (a,b)$, $C = (a+c, b+d)$ e $D = (c,d)$. Introducendo il cambio di variabile (si noti che è un'applicazione lineare)*

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad T(X,Y) = (x,y)\,, \quad \begin{cases} x = aX + cY \\ y = bX + dY \end{cases}$$

*troviamo*

$$\det J_T(X,Y) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc\,.$$

*Quindi, osservando che il parallelogramma, nelle nuove variabili è il quadrato $[0,1]\times[0,1]$, troviamo che*

$$\text{Area} = \iint_{\mathcal{P}} 1\,dxdy = \int_0^1 dX \int_0^1 dY |ad - bc| = |ad - bc|\,.$$

**Esercizio 5.32** (Volume delimitato da un ellissoide)**.** *Calcoliamo il volume di*

$$E = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\Big\}\,,$$

*ovvero la regione di spazio delimitata da un ellissoide di assi $a, b, c > 0$.*

*Introduciamo il cambio di variabili*

$$\begin{cases} u = x/a \\ v = y/b \\ w = z/c \end{cases}$$

*cosicché il diffeomorfismo da considerare per applicare il teorema del cambio di variabili è*

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad T(u,v,w) = (au, bv, cw)$$

*dove*

$$S = T^{-1}(E) = \big\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 \le 1\big\}\,.$$

*Per la formula del cambio di variabili ci serve*

$$\det J_T(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc\,,$$

*quindi troviamo*

$$\begin{aligned} |E| = \iiint_E 1\,dxdydz &= \iiint_{T^{-1}(E)} |\det J_T(u,v,w)|\,dudvdw \\ &= \iiint_S (abc)\,dudvdw \\ &= (abc)\iiint_S dudvdw = \frac{4}{3}\pi abc\,, \end{aligned}$$

*dove nell'ultimo passaggio dobbiamo semplicemente calcolare il volume di una palla di raggio 1.*

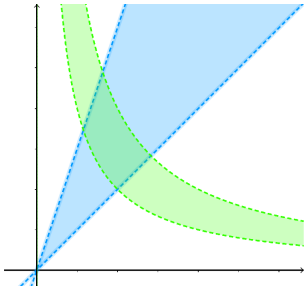

Figura 1: Vedi Esercizio 5.33.

**Esercizio 5.33.** *Calcoliamo l'area dell'insieme*

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < 3x\,, 1 < xy < 2\right\}.$$

*Notiamo che la prima condizione nasconde l'espressione* $1 < y/x < 3$*, quindi se sostituissimo*

$$\begin{cases} p = xy \\ m = y/x \end{cases} \tag{6}$$

*troveremmo un insieme molto semplice (un rettangolo!)*

$$\widetilde{E} = \left\{(p,m) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < m < 3\,, 1 < p < 2\right\} = (1,2) \times (1,3)\,.$$

*Un intergrale su* $\widetilde{E}$ *è banale da risolvere piuttosto che un integrale su* $E$*. Cerchiamo quindi di isolare le variabili* $x, y$ *dal sistema, trovando (posto* $m > 0$*!)*

$$\begin{cases} p = xy \\ m = y/x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p/m = x^2 \\ pm = y^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{p/m} \\ y = \sqrt{pm} \end{cases} \tag{7}$$

*quindi*

$$T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\,, \quad T(p,m) = \left(\sqrt{p/m}\,, \sqrt{pm}\right)$$
$$\det J_T(p,m) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{pm}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{m^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{p}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{m}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2m}\,.$$

*Possiamo quindi calcolare l'area di* $E$*:*

$$|E| = \iint_E 1\,dxdy = \iint_{\widetilde{E}} 1 \cdot \frac{1}{2m}\,dpdm = \frac{1}{2}\left(\int_1^2 1\,dp\right)\left(\int_1^3 dm \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2}[\log m]_1^3 = \frac{1}{2}\log 3\,. \tag{8}$$

*In alternativa possiamo evitare di calcolare esplicitamente* $T$ *e sfruttare direttamente il sistema* (6)*: in questo caso stiamo costruendo la funzione* $T^{-1}$*!*

$$T^{-1} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\,, \quad T^{-1}(x,y) = (p,m) = (xy, y/x)$$
$$\det J_{T^{-1}}(x,y) = \det \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2m\,. \tag{9}$$

*Quindi ricordando che*

$$J_{T^{-1}}(T(y)) = [J_T(y)]^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \det J_{T^{-1}}(T(y)) = [\det J_T(y)]^{-1}$$

*allora* $\det J_T = \frac{1}{2m}$ *e concludiamo come in* (8)*.*

*Notiamo che nell'ultimo passaggio in* (9)*, dobbiamo esprimere il determinante nelle variabili* $p, m$*, in questo caso è ovvio il passaggio, ma a volte siamo costretti comunque a intraprendere i calcoli visti in* (7)*. Concludendo, questa seconda via non è necessariamente più vantaggiosa della precedente.*

*Calcolare il centroide di* $E$ *come esercizio.*

**Esercizio 5.34.** *Calcoliamo ora l'integrale*

$$\iint_E \sin(xy)x^2\,dxdy$$

*dove $E$ è l'insieme dell'esercizio precedente. Adottando lo stesso cambio di coordinate otteniamo*

$$\begin{aligned}\iint_E \sin(xy)x^2\,dxdy &= \iint_{\widetilde{E}} \sin(p)\frac{p}{m}\,\frac{1}{2m}\,dpdm \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_1^2 p\sin(p)\,dp\right)\left(\int_1^3 \frac{1}{m^2}\,dm\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin p - p\cos p\right]_1^2\left[-\frac{1}{m}\right]_1^3 = \frac{1}{3}(\sin 2 - 2\cos 2 - \sin 1 + \cos 1)\,.\end{aligned}$$

**Esercizio 5.35.** *Dalle superiori sappiamo che, dati tre punti nel piano $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, il baricentro del triangolo di vertici $A, B, C$ è*

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\,,\,\frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

*Suggerimento: usare il cambio di variabile $(x, y) \mapsto (v, w)$ dove $v$ e $w$ sono i vettori individuati da due lati del triangolo.*

Vediamo ora degli esempi di cambi di variabile decisamente importanti.

### 5.2.1 Coordinate polari

Consideriamo l'insieme

$$\Omega = (0, +\infty) \times (-\pi/2\,,\,3\pi/2) \subset \mathbb{R}^2$$

e la funzione

$$\Phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \Phi(r, \theta) = (r\cos\theta\,,\,r\sin\theta)\,.$$

Notiamo che $\Phi(\overline{\Omega}) = \mathbb{R}^2$ e $\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^2 \setminus F$ dove $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\,, y \le 0\}$. La funzione $\Phi$ è invertibile in $\Phi(\Omega)$ con inversa $\Phi^{-1} : \Phi(\Omega) \to \Omega$ definita come

$$\Phi^{-1}(x, y) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 + y^2}\,,\,\arctan\frac{y}{x}\right) & x > 0\,, \\ \left(y\,,\,\frac{\pi}{2}\right) & x = 0\,, \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2}\,,\,\arctan\frac{y}{x} + \pi\right), & x < 0\,. \end{cases}$$

Dato $E \subset \mathbb{R}^2$ insieme limitato misurabile "in coordinate cartesiane", notiamo che è possibile scomporlo nei sottoinsiemi disgiunti

$$E_0 = E \cap (\{0\} \times \mathbb{R})\,, \qquad E_1 = E \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})\,, \qquad E_2 = E \cap (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R})\,.$$

Essi sono tutti insiemi misurabili e $|E_0| = 0$ e le funzioni $\Phi^{-1}|_{E_i} : E_i \to \Phi^{-1}(E_i)$, dove $i = 1, 2$, sono $C^1$-diffeomorfismi. Inoltre

$$\begin{aligned}&\Phi^{-1}(E_1) \subset (0, +\infty) \times (-\pi/2\,,\,\pi/2)\,, \\ &\Phi^{-1}(E_2) \subset (0, +\infty) \times (\pi/2\,,\,3\pi/2)\,, \\ &\Phi^{-1}(E_0) \subset (0, +\infty) \times \{-\pi/2\,,\,\pi/2\,,\,3\pi/2\}\,.\end{aligned}$$

Possiamo quindi applicare il teorema del cambio di variabili sugli insiemi $E_i$ $(i = 1, 2)$ tramite l'applicazione $\Phi$. Calcoliamo

$$\det J_\Phi(r, \theta) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\,.$$

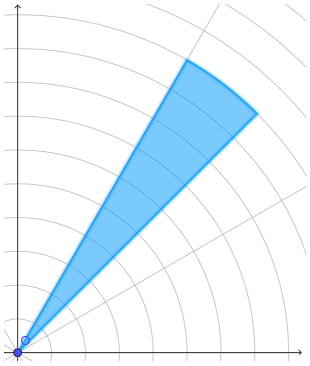

Figura 2: Vedi Esercizio 5.39.

Quindi dato l'insieme misurabile limitato $E \subset \mathbb{R}^2$ "in coordinate cartesiane" e una funzione continua $f : E \to \mathbb{R}$ limitata allora

$$\begin{aligned}\iint_E f(x,y)\,dxdy &= \cancel{\iint_{E_0} f(x,y)\,dxdy} + \iint_{E_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{E_2} f(x,y)\,dxdy \\ &= \iint_{\Phi^{-1}(E_1)} f(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta)\,r\,drd\theta + \iint_{\Phi^{-1}(E_2)} f(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta)\,r\,drd\theta \\ &= \iint_{\Phi^{-1}(E)} f(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta)\,r\,drd\theta\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che

$$\Phi^{-1}(E) \setminus \big(\Phi^{-1}(E_1) \cup \Phi^{-1}(E_2)\big) = \Phi^{-1}(E_0)\,, \qquad \text{dove} \qquad |\Phi^{-1}(E_0)| = 0\,.$$

**Osservazione 5.36.** *Da qui in avanti modificheremo il dominio della funzione $\Phi$ a "nostro vantaggio" di volta in volta, spesso considereremo il dominio $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$.*

**Esercizio 5.37.** *Mostrare che $|\det J_{\Phi^{-1}}(x,y)| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ in ogni punto di $E_1$ ed $E_2$, facendo i calcoli espliciti.*

**Esempio 5.38** (L'area del cerchio)**.** *Il cerchio di raggio $R$*

$$\overline{B}_R(0) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le R^2\big\}$$

*viene trasformato in coordinate polari $(r,\theta)$ nel rettangolo $[0,R]\times[0,2\pi]$, quindi*

$$|\overline{B}_R(0)| = \iint_{\overline{B}_R(0)} 1\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\,dr = 2\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2\,.$$

**Esercizio 5.39.** *Calcoliamo $\iint_E xy\,dxdy$ nell'insieme*

$$E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y \le \sqrt{3}\,x\,,\, x^2+y^2 \le 4\big\}\,.$$

*L'insieme $E$ in coordinate polari $(r,\theta)$ diventa l'insieme $[0,2]\times[\pi/4\,,\,\pi/3]$, quindi*

$$\begin{aligned}\iint_E xy\,dxdy &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_0^2 dr\,(r\cos\theta)(r\sin\theta)\,r \\ &= \left(\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin\theta\cos\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_0^2 r^3\,dr\right) = \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/3}\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot 16 = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

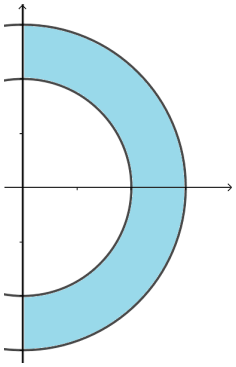

Figura 3: Vedi Esercizio 5.40.

**Esercizio 5.40.** *Calcoliamo il baricentro e il momento di inerzia rispetto agli assi $x$ e $y$ di un corpo bidimensionale di densità superficiale costante $\mu \equiv 1$ che occupa la regione*

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \le x^2+y^2 \le 9\,, x \ge 0\right\}.$$

*Notiamo subito che in coordinate polari $(r,\theta)$ diventa l'insieme $[2,3]\times[-\pi/2\,,\,\pi/2]$, quindi possiamo calcolare*

$$|C| = \iint_C dxdy = \int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\, r = \frac{1}{2}\left[r^2\right]_2^3 \cdot [\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{5}{2}\pi\,,$$

$$B_x = \iint_C x\,dxdy = \int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\, r(r\cos\theta) = \frac{1}{3}\left[r^3\right]_2^3 \cdot [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{3}\,19\cdot 2 = \frac{38}{3}\,,$$

$$B_y = \iint_C y\,dxdy = \int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\, r(r\sin\theta) = \frac{1}{3}\left[r^3\right]_2^3 \cdot \cancel{[-\cos\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}} = 0\,.$$

*La massa è l'area stessa $m = |C|$, mentre il baricentro risulta $G = (x_G, y_G)$ dove*

$$x_G = \frac{B_x}{m} = \frac{38}{3}\cdot\frac{2}{5\pi} = \frac{76}{15\pi} < 2\,, \qquad y_G = \frac{B_y}{m} = 0\,.$$

*Il fatto di aver ottenuto $y_G = 0$ non deve stupire data la simmetria dell'oggetto. Il fatto che $x_G < 2$ ci dà che $G \notin C$, ovvero il baricentro è esterno all'insieme. Calcoliamo ora i momenti di inerzia:*

$$\begin{aligned} I_x = \iint_C y^2\,dxdy &= \int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\, r^3 \sin^2\theta \\ &= \left(\int_2^3 r^3\,dr\right)\cdot\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\right) = \cdots = \frac{3^4-2^4}{4}\frac{\pi}{2}\,. \\ I_y = \iint_C x^2\,dxdy &= \int_2^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\, r^3 \cos^2\theta \\ &= \left(\int_2^3 r^3\,dr\right)\cdot\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta\right) = \cdots = \frac{3^4-2^4}{4}\frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

**Esercizio 5.41.** *Calcoliamo l'area di*

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 2x\,, y \ge 0\right\}.$$

*Se sostituiamo $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ troviamo*

$$\begin{aligned} & 1 \le r^2 \le 2r\cos\theta\,, && \rho\sin\theta \ge 0 \\ \Rightarrow\ & 1 \le r \le 2\cos\theta\,, && \sin\theta \ge 0 \\ \Rightarrow\ & 1 \le r \le 2\cos\theta\,, && \sin\theta \ge 0\,,\ \cos\theta \ge 1/2 \\ \Rightarrow\ & 1 \le r \le 2\cos\theta\,, && 0 \le \theta \le \pi/3\,. \end{aligned}$$

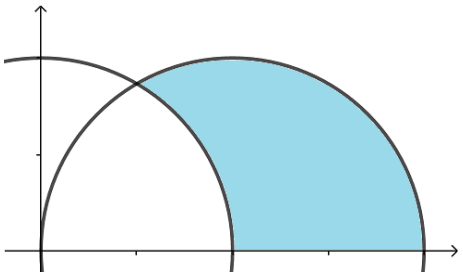

Figura 4: Vedi Esercizio 5.41.

*Quindi osserviamo che, passando alle coordinate polari l'insieme $E$ diventa*

$$T^{-1}(E) = \widetilde{E} = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in [0,\pi/3]\,,\ 1 \le r \le 2\cos\theta\}\,,$$

*che è un dominio normale su cui sappiamo integrare. Quindi*

$$\begin{aligned} |E| = \iint_{\widetilde{E}} r\,dr d\theta &= \int_0^{\pi/3} d\theta \int_1^{2\cos\theta} dr\, r \\ &= \int_0^{\pi/3} d\theta \frac{1}{2}\left[r^2\right]_1^{2\cos\theta} \\ &= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}(4\cos^2\theta - 1) d\theta = \dots \end{aligned}$$

*Similmente possiamo integrare una funzione, ad esempio, data $f(x,y) = xy$*

$$\begin{aligned} \iint_E xy\,dxdy &= \iint_{\widetilde{E}} r^3 \sin\theta\cos\theta\,dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} d\theta \int_1^{2\cos\theta} dr\, r^3 \sin\theta\cos\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} d\theta\, \sin\theta\cos\theta \int_1^{2\cos\theta} dr\, r^3 \\ &= \int_0^{\pi/3} d\theta\, \sin\theta\cos\theta \frac{1}{4}\left[r^4\right]_1^{2\cos\theta} \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} (16\cos^4\theta - 1)\sin\theta\cos\theta d\theta = \dots \end{aligned}$$

**Esercizio 5.42.** *Calcolare misura, baricentro e momenti d'inerzia dell'insieme*

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \ge 1\,,\ 0 \le y \le x \le 2\right\}.$$

**Esempio 5.43** (L'integrale della gaussiana)**.** *Dimostriamo ora che*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

*Che la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ appartenga a $\widetilde{\mathcal{R}}(\mathbb{R})$ è facile da verificare. Quindi possiamo scrivere*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} I(R)\,, \qquad \text{dove } I(R) := \int_{-R}^{+R} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx\,.$$

*Notiamo che*

$$I(R)^2 = \left(\int_{-R}^{+R} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_{-R}^{+R} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx \int_{-R}^{+R} \mathrm{e}^{-y^2}\,dy = \int_{-R}^{+R} dx \int_{-R}^{+R} dy\ \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,.$$

*Denotiamo con $Q_R$ il quadrato $[-R,+R]\times[-R,+R]\subset\mathbb{R}^2$ e con $\overline{B}_R\subset\mathbb{R}^2$ la palla chiusa di raggio $R$ centrata nell'origine. Notiamo che, definito*

$$\mathcal{I}(R):=\iint_{B_R}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,dxdy\,,$$

*vale, essendo la funzione integranda positiva,*

$$\mathcal{I}(R)\le I(R)^2\le\mathcal{I}(R\sqrt{2})\,. \tag{10}$$

*Andiamo quindi a calcolare $\mathcal{I}(R)$ al variare di $R$ introducendo coordinate polari.*

$$\mathcal{I}(R)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R dr\,r\,e^{-r^2}=2\pi\left[-\frac{\mathrm{e}^{-r^2}}{2}\right]_0^R=\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2})\,.$$

*Quindi, dalla* (10)*, troviamo*

$$\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2})\le I(R)^2\le\pi(1-\mathrm{e}^{-2R^2})$$

*e, passando al limite per $R\to+\infty$, usando il teorema dei carabinieri concludiamo*

$$\lim_{R\to+\infty}I(R)^2=\pi\qquad\Rightarrow\qquad\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}\,.$$

### 5.2.2 Coordinate cilindriche

Se trattando un insieme $A\subset\mathbb{R}^3$ consideriamo due variabili, ad esempio $x,y$, e ad esse associamo le coordinate polari, allora troviamo le coordinate cilindriche. In particolare, dato

$$\Omega=(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}$$

consideriamo la funzione $\Phi:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^3$ definita da

$$\Phi(r,\theta,z)=(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta\,,\,z)\,.$$

Notiamo che $\Phi(\Omega)=\mathbb{R}^3\setminus F$ dove $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x\ge0\,,y=0\}$. Seguendo il procedimento adottato per le coordinate polari possiamo notare che

$$\iint_E f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_{\Phi^{-1}(E)}f(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta,z)\,r\,drd\theta dz\,,$$

infatti anche in questo caso

$$\det J_\Phi(r,\theta,z)=\det\begin{pmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta&0\\\sin\theta&r\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}=r\,.$$

### 5.2.3 Coordinate sferiche

Dato l'insieme

$$\Omega=(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)$$

consideriamo la funzione $\Phi:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^3$ definita da

$$\Phi(\rho,\theta,\varphi)=(\rho\sin\varphi\cos\theta\,,\,\rho\sin\varphi\sin\theta\,,\,\rho\cos\varphi)\,.$$

Notiamo che anche in questo caso $\Phi(\Omega)=\mathbb{R}^3\setminus F$ dove $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x\ge0\,,y=0\}$. Seguendo il procedimento adottato per le coordinate cilindriche, calcolando

$$\det J_\Phi(\rho,\theta,\varphi)=\det\begin{pmatrix}\sin\varphi\cos\theta&-\rho\sin\varphi\sin\theta&\rho\cos\varphi\cos\theta\\\sin\varphi\sin\theta&\rho\sin\varphi\cos\theta&\rho\cos\varphi\sin\theta\\\cos\varphi&0&-\rho\sin\varphi\end{pmatrix}=\cdots=-\rho^2\sin\varphi\,.$$

il cambio di variabili stavolta dà

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Phi^{-1}(E)} f(\rho\sin\varphi\cos\theta\,,\ \rho\sin\varphi\sin\theta\,,\ \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho d\theta d\varphi\,.$$

Vediamo ora un'applicazione delle coordinate cilindriche.

**Teorema 5.44** (Teorema di Guldino)**.** *Consideriamo un insieme $A \subseteq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\,,\ y \geq 0\}$ e supponiamo che $A$ visto come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ sia misurabile (ovvero che l'insieme $\widetilde{A} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid (0,y,z) \in A\}$ sia misurabile) con misura positiva. Sia $V$ il solido di rotazione ottenuto ruotando $A$ di un angolo $\alpha \in (0, 2\pi]$ (in senso orario o antiorario) attorno all'asse $z$. Allora*

$$|V| = \mathrm{Vol}(V) = \alpha\,\mathrm{Area}(A) y_G = \alpha|\widetilde{A}|y_G\,,$$

*dove $y_G$ è la coordinata $y$ del baricentro di $\widetilde{A}$.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo il teorema per una rotazione in senso orario. In coordinate cilindriche otteniamo che $V$ si può scrivere come

$$\widetilde{V} = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (r,z) \in \widetilde{A}\,,\ \theta \in [\pi/2 - \alpha, \pi/2]\}$$

quindi possiamo calcolare

$$\begin{aligned}
|V| = \iiint_V dxdydz &= \iiint_{\widetilde{V}} r\,d\theta dr dz \\
&= \iint_{\widetilde{A}} \left( \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} r\,d\theta \right) dr dz = \iint_{\widetilde{A}} \left( \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} d\theta \right) r dr dz \\
&= \alpha \iint_{\widetilde{A}} r\,dr dz = \alpha \iint_{\widetilde{A}} y\,dy dz = \alpha|\widetilde{A}|y_G\,,
\end{aligned}$$

ricordando la formula di $y_G$, data nella Definizione 5.19. □

**Esempio 5.45** (Volume del toro)**.** *Il volume del toro di raggi $r$ e $R$ è $V = 2\pi(\pi r^2)R$, usando il Teorema di Guldino, con i valori $\alpha = 2\pi$, $|\widetilde{A}| = \pi r^2$ e $y_G = R$.*

**Esercizio 5.46.** *Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando di un giro completo attorno all'asse $z$ l'insieme*

$$A = \left\{(y,z,0) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \geq z\,, y^2 + z^2 \leq 4\right\}.$$

**Esercizio 5.47** (Coordinate iperboliche)**.** *Determinare un insieme aperto $\Omega$ opportuno affinché il cambio di variabile*

$$T : \Omega \to T(\Omega)\,, \qquad T(R,\beta) = (x,y)\,, \qquad \begin{cases} x = R\cosh\beta\,, \\ y = R\sinh\beta\,, \end{cases}$$

*sia invertibile e soddisfi le ipotesi del Teorema 5.27. Determinare anche $T(\Omega)$. Quindi calcolare $|\det J_T(R,\beta)|$.*

**Esempio 5.48** (Momento d'inerzia della sfera)**.** *Consideriamo un corpo sferico di raggio $R$ e densità costante $\mu$ e calcoliamo il suo momento d'inerzia rispetto ad un asse. La sfera*

$$B_R(0) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\right\},$$

*in coordinate sferiche è descritta dall'insieme*

$$\left\{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \in [0,R]\,, \theta \in [0,2\pi]\,, \varphi \in [0,\pi]\ \right\}.$$

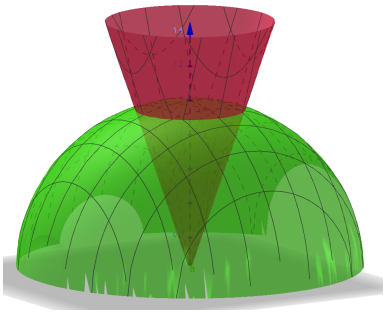

Figura 5: Vedi Esercizio 5.50.

*Quindi per il momento d'inerzia, ricordando che per la massa vale* $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu$*, abbiamo*

$$\begin{aligned} I_z = \iiint_{B_R(0)} \mu(x^2+y^2)\,dxdydz &= \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi\, \rho^2 \sin\varphi \cdot \mu \cdot \rho^2 \sin^2\varphi \\ &= \mu \left( \int_0^{2\pi} 1\, d\theta \right) \left( \int_0^R \rho^4 d\rho \right) \left( \int_0^{\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi \right) \\ &= 2\pi\mu \left[ \frac{1}{5}\rho^5 \right]_0^R \left[ -\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi \right]_0^{\pi} \\ &= 2\pi\mu \frac{R^5}{5}\frac{4}{3} = \frac{2}{5} M R^2 \,. \end{aligned}$$

**Esercizio 5.49.** *Calcola il momento d'inerzia del cilindro di raggio* $R$ *e altezza* $h$*, rispetto al suo asse.*

**Esercizio 5.50** (Il gelato)**.** *Consideriamo l'insieme*

$$C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3(x^2+y^2) \le z^2 \,, z \ge 0 \,, x^2+y^2+z^2 \le 1 \right\}.$$

*In coordinate sferiche* $C$ *diventa*

$$\widetilde{C} = \left\{ (\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \in [0,1] \,, \theta \in [0,2\pi] \,, \varphi \in [0,\pi/6] \right\}.$$

*Calcoliamo il volume di* $C$*:*

$$\begin{aligned} |C| = \iiint_C dxdydz &= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/6} d\varphi\, \rho^2 \sin\varphi \\ &= \int_0^1 \rho^2\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/6} \sin\varphi\, d\varphi \\ &= \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \cdot 2\pi \cdot \left[ -\cos\varphi \right]_0^{\pi/6} = \frac{2}{3}\pi \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

*Graficamente "si vede" chi è* $\widetilde{C}$*, ma gli estremi di integrazione si possono anche trovare algebricamente, ricordando i vincoli naturali per gli angoli:*

$$\begin{aligned} 3(x^2+y^2) \le z^2 \quad &\Rightarrow \quad 3\rho^2 \sin^2\varphi \le \rho^2 \cos^2\varphi \\ &\hookrightarrow \quad 3\sin^2\varphi \le \cos^2\varphi \\ &\hookrightarrow \quad \tan^2\varphi \le 1/3 \\ &\hookrightarrow \quad \varphi \in [0,\pi/6] \cup [5\pi/6,\pi] \\ z \ge 0 \quad &\Rightarrow \quad \rho\cos\varphi \ge 0 \\ &\hookrightarrow \quad \cos\varphi \ge 0 \\ &\hookrightarrow \quad \varphi \in [0,\pi/2] \\ x^2+y^2+z^2 \le 1 \quad &\Rightarrow \quad \rho \le 1 \end{aligned}$$

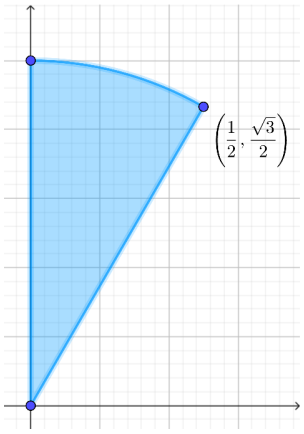


Figura 6: Vedi Esercizio 5.50, una "sezione" dell'insieme $\widehat{C}$ per $\theta$ fissato.

*Facciamo lo stesso calcolo usando le coordinate cilindriche. In questo caso l'insieme $C$ si può scrivere, una volta introdotte le coordinate cilindriche, come*

$$\widehat{C} = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3r^2 \leq z^2\,, z \geq 0\,, r^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

*che può essere scritto come dominio normale rispetto alle variabili $r, \theta$ (o regione $z$-semplice) nel seguente modo:*

$$\widehat{C} = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, 1/2]\,, \theta \in [0, 2\pi]\,, \sqrt{3}r \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}\,\right\}. \tag{11}$$

*Per il calcolo del volume abbiamo quindi*

$$\begin{aligned}
|C| = \iiint_C dx dy dz &= \int_0^{1/2} dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} dz\, r \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} r\, dr \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} 1\, dz \\
&= 2\pi \int_0^{1/2} r\left(\sqrt{1 - r^2} - \sqrt{3}r\right) dr \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2} - \sqrt{3}\frac{r^3}{3}\right]_0^{1/2} = \cdots = \frac{2}{3}\pi\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

*Come terza alternativa, $\widehat{C}$ si può scrivere anche come dominio normale rispetto alle variabili $z, \theta$ (o regione $r$-semplice):*

$$\begin{aligned}
\widehat{C} =& \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, 1]\,, \theta \in [0, 2\pi]\,, 0 \leq r \leq g(z)\,\right\}, \\
g(z) =& \begin{cases} z/\sqrt{3} & 0 \leq z \leq \sqrt{3}/2\,, \\ \sqrt{1 - z^2} & \sqrt{3}/2 \leq z \leq 1\,. \end{cases}
\end{aligned} \tag{12}$$

*In questo caso otteniamo*

$$\begin{aligned}
|C| = \iiint_C dxdydz &= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{g(z)} dr\, r \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} g^2(z)\, dz \\
&= \pi \left( \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{3} z^2\, dz + \int_{\sqrt{3}/2}^1 1 - z^2\, dz \right) \\
&= \pi \left( \left[ \frac{1}{9} z^3 \right]_0^{\sqrt{3}/2} + \left[ z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{\sqrt{3}/2}^1 \right) \\
&= \cdots = \frac{2}{3}\pi \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
\end{aligned}$$

**Esercizio 5.51.** *Consideriamo ancora lo stesso insieme $C$ dell'esercizio precedente. Calcoliamo*

$$\iiint_C x^2\, dxdydz\,.$$

*In questo caso, data la simmetria di $C$ rispetto all'asse $z$ notiamo che*

$$\iiint_C x^2\, dxdydz = \iiint_C y^2\, dxdydz\,,$$

*quindi*

$$\iiint_C x^2\, dxdydz = \frac{1}{2} \iiint_C x^2 + y^2\, dxdydz\,.$$

*Quindi calcoliamo direttamente quest'ultimo integrale. Per calcolarlo adotteremo le coordinate cilindriche esprimendo $\widehat{C}$ come in* (12)*.*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \iiint_C x^2 + y^2\, dxdydz &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_0^{g(z)} dr\, r^3 \\
&= \pi \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_0^{g(z)} dz \\
&= \pi \int_0^1 \frac{1}{4} \big(g(z)\big)^4\, dz \\
&= \frac{\pi}{4} \left( \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{z^4}{9}\, dz + \int_{\sqrt{3}/2}^1 (1 - z^2)^2\, dz \right) = \cdots
\end{aligned}$$

**Esercizio 5.52.** *Consideriamo ancora lo stesso insieme $C$ e calcoliamo*

$$I = \iiint_C z\, dxdydz\,.$$

*Una volta scoperto il valore $I$, possiamo trovare il centroide di $C$ come $G = (0, 0, z_G)$, con $z_G = I/|C|$ dove la misura di $|C|$ è già stata calcolata in precedenza. Le prime due coordinate sono ovvie data la simmetria*

*dell'insieme. Vedendo l'insieme $C$ in coordinate cilindriche come in* (11),

$$\begin{aligned} I = \iiint_C z\,dxdydz &= \int_0^{1/2} dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} dz\, rz \\ &= 2\pi \int_0^{1/2} dr\, r \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} \\ &= \pi \int_0^{1/2} r(1-4r^2)\,dr \\ &= \pi \left[-\frac{1}{16}(1-4r^2)^2\right]_0^{1/2} = \cdots = \frac{\pi}{16}\,. \end{aligned}$$

**Esempio 5.53.** *Consideriamo ora la funzione $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\alpha/2} = \|(x,y)\|^\alpha$ con dominio l'anello $\mathcal{A} = B_R(0) \setminus B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^2$. L'integrale risulta*

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_\delta^R dr\, r \cdot r^\alpha = 2\pi \int_\delta^R r^{\alpha+1}\,dr\,.$$

*Ricordando quanto già visto per gli integrali generalizzati, notiamo che, se $\alpha > -2$, possiamo passare al limite $\delta \to 0$ e trovare*

$$\lim_{\delta\to 0} 2\pi \int_\delta^R r^{\alpha+1}\,dr = \lim_{\delta\to 0} \frac{2\pi}{\alpha+2}\left[r^{\alpha+2}\right]_\delta^R = \frac{2\pi}{\alpha+2}R^{\alpha+2}\,.$$

*Invece, se $\alpha < -2$, possiamo passare al limite $R \to \infty$ e trovare*

$$\lim_{R\to\infty} 2\pi \int_\delta^R r^{\alpha+1}\,dr = \lim_{R\to\infty} \frac{2\pi}{\alpha+2}\left[r^{\alpha+2}\right]_\delta^R = \frac{2\pi}{|\alpha+2|}\delta^{\alpha+2}\,.$$

Passiamo ora a dimensione $N = 3$ e riscriviamo il precedente risultato.

**Esempio 5.54.** *Consideriamo ora la funzione $f(x,y) = (x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2} = \|(x,y,z)\|^\alpha$ con dominio l'anello $\mathcal{A} = B_R(0) \setminus B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^3$. L'integrale risulta, passando a coordinate sferiche,*

$$\iiint_{\mathcal{A}} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \sin\varphi \int_\delta^R d\rho\, \rho^2 \cdot \rho^\alpha = 4\pi \int_\delta^R \rho^{\alpha+2}\,d\rho\,.$$

*Quindi, se $\alpha > -3$, possiamo passare al limite $\delta \to 0$ e trovare*

$$\lim_{\delta\to 0} 4\pi \int_\delta^R r^{\alpha+2}\,dr = \lim_{\delta\to 0} \frac{4\pi}{\alpha+3}\left[r^{\alpha+3}\right]_\delta^R = \frac{4\pi}{\alpha+3}R^{\alpha+3}\,.$$

*Invece, se $\alpha < -3$, possiamo passare al limite $R \to \infty$ e trovare*

$$\lim_{R\to\infty} 4\pi \int_\delta^R r^{\alpha+2}\,dr = \lim_{R\to\infty} \frac{4\pi}{\alpha+3}\left[r^{\alpha+3}\right]_\delta^R = \frac{4\pi}{|\alpha+3|}\delta^{\alpha+3}\,.$$

*Dal primo dei due risultati è interessante notare che un oggetto sferico di raggio $R$ con densità di massa $\mu(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, che quindi tende ad infinito avvicinandoci all'origine, ha massa finita $m = 4\pi R$.*

Vediamo ora il caso per $N$ generico, senza entrare nei dettagli.

**Esempio 5.55.** *Consideriamo ora la funzione $f(x) = \|x\|^\alpha$ con dominio l'anello $\mathcal{A} = B_R(0) \setminus B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^N$. Anche in dimensione $N$ è possibile introdurre delle coordinate sferiche, in particolare, per funzioni* radiali, *ovvero tali che esiste una funzione $g : (\delta, R) \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = g(\|x\|)$, possiamo scrivere*

$$\int_{\mathcal{A}} f(x)\,dx = \omega_N \int_\delta^R \rho^{N-1} g(\rho)\,d\rho$$

*dove $\omega_N$ è il contributo dato dall'integrazione delle coordinate angolari. Abbiamo già visto che $\omega_2 = 2\pi$ (la lunghezza della circonferenza unitaria), $\omega_3 = 4\pi$ (la superficie della sfera unitaria). Più in generale (solo per pura curiosità) si ha*

$$\omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$$

*dove la $\Gamma$ è la funzione Gamma di Eulero. Nel caso particolare $f(x) = \|x\|^\alpha$ abbiamo $g(\rho) = r^\alpha$ e quindi*

$$\int_{\mathcal{A}} f(x)\,dx = \omega_N \int_\delta^R \rho^{N-1+\alpha}\,d\rho$$

*Quindi, se $\alpha > -N$, possiamo passare al limite $\delta \to 0$ e trovare*

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_N \int_\delta^R r^{\alpha+N-1}\,dr = \lim_{\delta\to 0} \frac{\omega_N}{\alpha+N}\left[r^{\alpha+N}\right]_\delta^R = \frac{\omega_N}{\alpha+N} R^{\alpha+N}\,.$$

*Invece, se $\alpha < -N$, possiamo passare al limite $R \to \infty$ e trovare*

$$\lim_{R\to\infty} \omega_N \int_\delta^R r^{\alpha+N-1}\,dr = \lim_{R\to\infty} \frac{\omega_N}{\alpha+N}\left[r^{\alpha+N}\right]_\delta^R = \frac{\omega_N}{|\alpha+N|}\delta^{\alpha+N}\,.$$

# 6 Appendice

Ricordiamo le notazioni introdotte nel teorema di riduzione: consideriamo una decomposizione dello spazio $\mathbb{R}^N$ come segue

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{N-K}\,, \qquad x = (x_1,\dots,x_N) = (\xi,\eta)\,, \qquad \xi = (x_1,\dots,x_K)\,, \qquad \eta = (x_{K+1},\dots,x_N)\,.$$

Analogamente possiamo decomporre un generico rettangolo $Q$:

$$Q = \prod_{i=1}^N \left[a^i, b^i\right] = Q_\xi \times Q_\eta = \prod_{i=1}^K \left[a^i, b^i\right] \times \prod_{i=K+1}^N \left[a^i, b^i\right].$$

Consideriamo un insieme misurabile $\Omega$ tale che possa essere scritto come $\Omega = \Omega_\xi \times \Omega_\eta$ dove $\Omega_\xi$ e $\Omega_\eta$ sono rispettivamente insiemi misurabili di $\mathbb{R}^K$ e $\mathbb{R}^{N-K}$. Supponiamo di voler integrare una funzione integrabile $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e che $f$ sia *a variabili separabili* ovvero tale che possiamo scrivere $f(x) = f(\xi,\eta) = g(\xi)h(\eta)$ dove le funzioni $g : \Omega_\xi \to \mathbb{R}$ e $h : \Omega_\eta \to \mathbb{R}$ sono funzioni integrabili, allora vale

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega g(\xi)h(\eta)\,d\xi d\eta = \left(\int_{\Omega_\xi} g(\xi)\,d\xi\right)\left(\int_{\Omega_\eta} h(\eta)\,d\eta\right)$$

Infatti, possiamo trovare un rettangolo $Q = Q_\xi \times Q_\eta$ tale che $\Omega_\xi \subseteq Q_\xi$ e $\Omega_\eta \subseteq Q_\eta$ e usare il teorema di riduzione come segue, osservando che $\chi_\Omega(\xi,\eta) = \chi_{\Omega_\xi}(\xi)\chi_{\Omega_\eta}(\eta)$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x)\,dx &= \int_Q \chi_\Omega(x)\,f(x)\,dx = \int_{Q_\xi\times Q_\eta} \chi_\Omega(\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \\
&= \int_{Q_\xi}\left(\int_{Q_\eta} \chi_{\Omega_\xi}(\xi)\chi_{\Omega_\eta}(\eta)\,g(\xi)h(\eta)\,d\eta\right)d\xi \\
&= \int_{Q_\xi}\left(\int_{Q_\eta} \chi_{\Omega_\eta}(\eta)\,h(\eta)\,d\eta\right)\chi_{\Omega_\xi}(\xi)g(\xi)d\xi \\
&= \left(\int_{Q_\xi} \chi_{\Omega_\xi} g(\xi)\,d\xi\right)\left(\int_{Q_\eta} \chi_{\Omega_\eta}(\eta)h(\eta)\,d\eta\right) = \left(\int_{\Omega_\xi} g(\xi)\,d\xi\right)\left(\int_{\Omega_\eta} h(\eta)\,d\eta\right)
\end{aligned}$$