Esercizi dati negli esami scritti precedenti

La divisione in anni accademici si riferisce all'anno accademico in cui è stato effettuato il corso. Cronologicamente gli appelli sono di giugno, luglio, settembre (2), gennaio, febbraio. L'anno accademico 2019/2020 comprende più esercizi perché a causa del Covid gli appelli scritti telematici e/o in presenza a volte sono stati sdoppiati in più gruppi.

Parti lasciate come esercizio, sono lasciate allo studente e andrebbero analizzate in sede d'esame nel caso di un esercizio analogo.

Man mano che si procede con gli esercizi, alcune risoluzioni sono omesse perché molto similari a esercizi già esposti. Contengono quindi rimandi ad esercizi già visti e sono lasciate volutamente incomplete.

Sono stati riscontrati errori *di battitura* (e non solo) nelle risoluzioni. Alcuni sono stati sistemati, altri mi sono dimenticato di correggerli perché ho perso il foglio su cui mi ero segnato le vostre segnalazioni. Non date per scontata la validità di ogni singolo passaggio. Provate a risolvere voi stessi gli esercizi e successivamente controllate se sono corretti.

In fondo si trovano le risoluzioni di alcuni esercizi dati per il corso di Analisi 3 per il CdL di Matematica. Alcuni esercizi (non tutti!) sono compatibili col corso di Analisi Matematica 2 per il CdL di Fisica.

Indice

1 Serie e integrali **3**
- 1.1 A.A. 2018/2019 . . . 3
- 1.2 A.A. 2019/2020 . . . 6
- 1.3 A.A. 2020/2021 . . . 11
- 1.4 A.A. 2021/2022 . . . 12
- 1.5 A.A. 2022/2023 . . . 13
- 1.6 A.A. 2023/2024 . . . 15
- 1.7 A.A. 2024/2025 . . . 17
- 1.8 A.A. 2025/2026 . . . 18

2 Continuità e differenziabilità, problemi di massimo e minimo **20**
- 2.1 A.A. 2018/2019 . . . 20
- 2.2 A.A. 2019/2020 . . . 27
- 2.3 A.A. 2020/2021 . . . 36
- 2.4 A.A. 2021/2022 . . . 40
- 2.5 A.A. 2022/2023 . . . 44
- 2.6 A.A. 2023/2024 . . . 48
- 2.7 A.A. 2024/2025 . . . 51
- 2.8 A.A. 2025/2026 . . . 52

3 Integrazione **53**
- 3.1 A.A. 2018/2019 . . . 53
- 3.2 A.A. 2019/2020 . . . 57
- 3.3 A.A. 2020/2021 . . . 62
- 3.4 A.A. 2021/2022 . . . 65
- 3.5 A.A. 2022/2023 . . . 67
- 3.6 A.A. 2023/2024 . . . 69
- 3.7 A.A. 2024/2025 . . . 71
- 3.8 A.A. 2025/2026 . . . 72

4 Equazioni differenziali **73**
- 4.1 A.A. 2018/2019 . . . 73
- 4.2 A.A. 2019/2020 . . . 78
- 4.3 A.A. 2020/2021 . . . 83
- 4.4 A.A. 2021/2022 . . . 86
- 4.5 A.A. 2022/2023 . . . 89
- 4.6 A.A. 2023/2024 . . . 91
- 4.7 A.A. 2024/2025 . . . 92
- 4.8 A.A. 2025/2026 . . . 93

5 Campi vettoriali **95**
- 5.1 Primi esercizi . . . 95
- 5.2 A.A. 2022/2023 . . . 97
- 5.3 A.A. 2023/2024 . . . 100
- 5.4 A.A. 2024/2025 e successivi . . . 101

6 Pensati per i matematici **102**

1 Serie e integrali

1.1 A.A. 2018/2019

Esercizio 1.1. *Al variare del parametro reale $\alpha < 0$, studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan(n^\alpha)}{\log_3\left(\frac{1}{n!}+1\right)} \cdot \frac{e^{n^{-n}}-1}{\arcsin\left(2^{-n}+3^{-n}\right)}\,.$$

Innanzitutto notiamo che la serie è a termini positivi. Poiché il parametro α è negativo abbiamo che $\lim_n n^\alpha = 0$ per ogni α da considerare. Dai limiti fondamentali abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\lim_n \frac{\tan(n^\alpha)}{n^\alpha} = 1\,,\\
&\lim_n \frac{\log_3\left(\frac{1}{n!}+1\right)}{\frac{1}{n!}} = \lim_n \frac{1}{\log 3}\,\frac{\log\left(\frac{1}{n!}+1\right)}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\log 3}\,,\\
&\lim_n \frac{e^{n^{-n}}-1}{n^{-n}} = 1\,,\\
&\lim_n \frac{\arcsin\left(2^{-n}+3^{-n}\right)}{2^{-n}+3^{-n}} = 1\,.\\
&\lim_n \frac{2^{-n}+3^{-n}}{2^{-n}} = \lim_n 1+\left(\frac{3}{2}\right)^n = 1\,.
\end{aligned}$$

Dai limiti precedenti troviamo che la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha n^{-n}}{\frac{1}{n!}\cdot 2^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha \cdot n! \cdot 2^n}{n^n}\,.$$

Usando il criterio del confronto asintotico, infatti

$$\lim_n \frac{\dfrac{\tan(n^\alpha)}{\log_3\left(\frac{1}{n!}+1\right)} \cdot \dfrac{e^{n^{-n}}-1}{\arcsin\left(2^{-n}+3^{-n}\right)}}{\dfrac{n^\alpha n^{-n}}{\frac{1}{n!}\cdot 2^{-n}}} = \log 3 \in \mathbb{R}^+$$

(non è obbligatorio scrivere questo enorme limite nel compito, sono sufficienti le considerazioni fatte sopra). Allora studiamo il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha \cdot n! \cdot 2^n}{n^n}\,.$$

Proviamo col criterio del rapporto e scriviamo

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_n \frac{(n+1)^\alpha \cdot (n+1)! \cdot 2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n^\alpha \cdot n! \cdot 2^n}\\
&= \lim_n \frac{(n+1)^\alpha \cdot (n+1) \cdot n! \cdot 2^n \cdot 2}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot \frac{n^n}{n^\alpha \cdot n! \cdot 2^n}\\
&= \lim_n \frac{(1+\frac{1}{n})^\alpha \cdot 2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1
\end{aligned}$$

Concludiamo quindi che la serie converge per ogni $\alpha < 0$.

Esercizio 1.2. *Al variare del parametro reale $x \in \mathbb{R}$, studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(x^2+5x+5\right)^n\,.$$

Poniamo $y = x^2 + 5x + 5$ e troviamo la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} y^n \,. \tag{1}$$

Detto, $a_n = \frac{1}{n}$ troviamo che $L = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1$, quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è $\rho = 1/L = 1$.

In alternativa si può discutere l'*assoluta* convergenza della serie con il criterio del rapporto

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n+1}|y|^{n+1}}{\frac{1}{n}|y|^n} = \lim_n \frac{n}{n+1} \cdot |y| = |y| \,.$$

Dimenticare di trattare l'assoluta convergenza, pensando che valga sempre $y > 0$, e applicare il criterio del rapporto ad una serie a termini di segno alterno è un errore. Quindi è importante ricordare di mettere i valori assoluti nella formula precedente.

A questo punto la serie (1)

- è divergente per $y > 1$ dal fatto che il raggio di convergenza è 1 o dal criterio del rapporto,
- è divergente per $y = 1$ in quanto abbiamo in questo caso $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,
- è convergente per $|y| < 1$ (assolutamente convergente per $-1 < y < 0$),
- è semplicemente convergente per $y = -1$ in quanto abbiamo in questo caso $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ a cui possiamo applicare il criterio di Leibniz,
- è indeterminata per $y < -1$ dal fatto che il raggio di convergenza è 1 o dal criterio del rapporto.

A questo punto essendo $y = x^2 + 5x + 5$ dobbiamo risolvere le equazioni

$$x^2 + 5x + 5 \begin{cases} = 1 & \text{con soluzioni } -1 \text{ e } -4, \\ = 0 & \text{con soluzioni } x_\pm = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ = -1 & \text{con soluzioni } -2 \text{ e } -3. \end{cases}$$

A questo punto concludiamo che la serie assegnata

- è divergente se $x \le -4$ oppure $x \ge -1$,
- è convergente se $-4 < x < -3$ oppure $-2 < x < -1$ (assolutamente convergente se $x_- < x < -3$ oppure $-2 < x < x_+$),
- è semplicemente convergente se $x = -3$ oppure $x = -2$,
- è indeterminata se $-3 < x < -2$.

Esercizio 1.3. *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n) \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})} \,.$$

La serie è a segno qualunque, il segno è deciso da $\sin n$ che oscilla tra -1 e 1. Quindi di essa studiamo l'assoluta convergenza. Notiamo che

$$\left| (\sin n) \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})} \right| = |\sin n| \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})} \le 1 \cdot \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})} \,.$$

Se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n!})}{\arctan(2^{-n})} \tag{2}$$

risultasse convergente, potremmo concludere che anche la serie iniziale è assolutamente convergente usando il criterio del confronto.

Dai limiti fondamentali deduciamo che

$$\lim_n \frac{\log(1+\frac{1}{n!})}{\frac{1}{n!}} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_n \frac{\arctan(2^{-n})}{2^{-n}} = 1\,,$$

quindi la serie (2) ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. Per quest'ultima proviamo ad applicare il criterio del rapporto

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_n \frac{2^n \cdot 2}{(n+1)\cdot n!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_n \frac{2}{n} = 0 < 1\,,$$

da cui concludiamo la convergenza dell'ultima serie, e di conseguenza l'assoluta convergenza della serie assegnata.

Esercizio 1.4. *Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)(\arctan n^{\alpha})\,.$$

La serie è a termini positivi. Per quanto riguarda il primo fattore osserviamo che

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \tag{3}$$

da cui ricordando il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha\,, \tag{4}$$

troviamo

$$\lim_n \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}\cdot\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}\,.$$

Quindi abbiamo mostrato che

$$\lim_n \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{n^{-2/3}} = \frac{1}{3}\,.$$

Passiamo ora a studiare il secondo fattore:

- se $\alpha > 0$ abbiamo $\lim_n \arctan n^{\alpha} = \frac{\pi}{2}$,
- se $\alpha \geq 0$ abbiamo $\arctan n^{\alpha} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- se $\alpha < 0$ useremo che $\lim_n \frac{\arctan n^{\alpha}}{n^{\alpha}} = 1$.

Mettendo assieme i due fattori concludiamo che

- se $\alpha \geq 0$ il termine della serie può essere confrontato asintoticamente con $n^{-2/3}$ e concludiamo che la serie di partenza diverge.
- se $\alpha < 0$ il termine della serie può essere confrontato asintoticamente con $n^{-2/3+\alpha}$. A questo punto abbiamo convergenza se $-\frac{2}{3}+\alpha < -1$, ovvero se $\alpha < -\frac{1}{3}$. Mentre se $\alpha \geq -\frac{1}{3}$ la serie diverge.

Esercizio 1.5. *Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{3^n + 4^n}\,.$$

Osserviamo che la serie è a termini positivi. Valendo il seguente limite

$$\lim_n \frac{4^n}{3^n+4^n} = \lim_n \frac{1}{1+(\frac{3}{4})^n} = 1\,,$$

per il criterio del confronto asintotico il carattere della serie data sarà lo stesso della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^x}{4}\right)^n\,,$$

che è una serie geometrica. Ne consegue che abbiamo convergenza se $|e^x/4| < 1$ ovvero se e solo se $e^x < 4$, da cui $x < 2\ln 2$. Per $x \geq 2\ln 2$ avremo divergenza.

Esercizio 1.6. *Studiare, al variare di* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*, il carattere della serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+1} (\tan x)^k .$$

Innanzitutto poniamo $y = \tan x$, con $y \in \mathbb{R}$, essendo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ne studiamo l'assoluta convergenza e osserviamo che la frazione $\frac{k+2}{k^2+1}$ è sempre positiva. Inoltre vale

$$\lim_k \frac{\frac{k+2}{k^2+1}}{\frac{1}{k}} = 1$$

per cui avremo l'assoluta convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+1} y^k$$

se e solo se la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} y^k$$

è assolutamente convergente. Essa è una serie di potenze di raggio 1 (mostrarlo per esercizio). Quindi avremo che se $|y| < 1$ la serie è assolutamente convergente. Per $y > 1$ sarà divergente, per $y < -1$ sarà indeterminata. Tornando alla variabile x troviamo quindi:

- Se $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ allora la serie è indeterminata
- Se $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ sarà assolutamente convergente.
- Se $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ sarà divergente.
- Vanno risolti a parte i casi rimanenti. Se $x = \frac{\pi}{4}$ otteniamo la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+1}$, che ha lo stesso carattere di $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$, ovvero è divergente. Per $x = -\frac{\pi}{4}$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+2}{k^2+1}$ converge semplicemente usando il criterio di Leibniz. Infatti vale facilmente $\lim_k \frac{k+2}{k^2+1} = 0$ ed è decrescente (per k sufficientemente grandi). Dimostrare per esercizio quest'ultima affermazione.

1.2 A.A. 2019/2020

Esercizio 1.7. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2} .$$

Essendo $\sin(1/n) < 1$ la serie è a termini positivi. Ad essa applichiamo il criterio della radice e troviamo

$$\lim_n \left(1 - \sin \frac{1}{n}\right)^n = \lim_n \mathrm{e}^{n \ln(1 - \sin \frac{1}{n})} = \mathrm{e}^{-1} < 1$$

essendo

$$\lim_n n \ln(1 - \sin \tfrac{1}{n}) = \lim_n \frac{\ln(1 - \sin \frac{1}{n})}{-\sin \frac{1}{n}} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} (-1) = -1 .$$

La serie quindi converge.

Esercizio 1.8. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} \frac{\sin(n^{-1})}{6^n} .$$

Dopo aver osservato che la serie è a termini positivi, possiamo usare il criterio del confronto asintotico, essendo $\lim_n \frac{\sin n^{-1}}{n^{-1}} = 1$, ottenendo che la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} \frac{n^{-1}}{6^n}\,.$$

Applichiamo il criterio del rapporto e otteniamo

$$\lim_n \frac{\binom{3n+3}{n+1}\frac{1}{(n+1)\ 6^{n+1}}}{\binom{3n}{n}\frac{1}{n\ 6^n}} = \lim_n \frac{\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!\ (n+1)n!}\frac{1}{(n+1)\ 6\ 6^n}}{\frac{(3n)!}{(2n)!\ n!}\frac{1}{n\ 6^n}}$$

$$= \lim_n \frac{n(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{6(2n+2)(2n+1)(n+1)^2} = \frac{27}{24} > 1\,.$$

La serie diverge.

Esercizio 1.9. *Discutere la convergenza del seguente integrale al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$*:*

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\tan x - \alpha \sin x}\,dx\,.$$

Notiamo innanzitutto che la funzione non è definita in $x = 0$. Dobbiamo quindi studiare l'ordine di infinitesimo del denominatore. Approssimiamo quindi il denominatore usando il polinomio di Taylor

$$\tan x - \alpha \sin x = (x + \tfrac{1}{3}x^3) - \alpha(x - \tfrac{1}{6}x^3) + R_3(x)\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0$$

Nel caso particolare $\alpha = 1$ otteniamo

$$\tan x - \sin x = \tfrac{1}{2}x^3 + R_3(x)\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0\,,$$

da cui otteniamo che la funzione integranda è tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\tan x - \sin x}}{\frac{1}{x^2}} = 2 \in \mathbb{R}\,.$$

Deduciamo quindi che l'integrando cresce come x^{-2} in un intorno di $x = 0$ e quindi l'integrale non converge.

Consideriamo ora $\alpha \neq 1$, per cui otteniamo

$$\tan x - \sin x = (1-\alpha)x + R_1(x)\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0\,,$$

da cui segue con ragionamento analogo a sopra

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^\alpha}{\tan x - \alpha \sin x}}{x^{\alpha-1}} = \frac{1}{1-\alpha} \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi l'integrando cresce come $x^{\alpha-1}$ in un intorno di $x = 0$. Abbiamo la covergenza dell'integrale se $\alpha - 1 > -1$, ovvero se $\alpha > 0$ (ma abbiamo posto $\alpha \neq 1$!).

Quindi *in un intorno destro dell'origine abbiamo la convergenza dell'integrale se* $\alpha > 0$ *e* $\alpha \neq 1$, altrimenti non c'è convergenza.

Il ragionamento seguente (impegnativo) conferiva punteggio extra anche se risolto parzialmente.

Per la discussione dell'integrabilità della funzione bisogna controllare che il denominatore non si annulli in altri punti $x \in (0,1]$. Risolvendo l'equazione $\tan x - \alpha \sin x = 0$ troviamo $\frac{1}{\cos x} - \alpha = 0$ e quindi $\cos x = \alpha^{-1}$, ovvero $x = \arccos \alpha^{-1}$, ricordando che chiediamo $x \in (0,1]$. Quindi l'equazione ha soluzione in questo intervallo se $1 < \alpha \leq (\cos 1)^{-1}$.

Per questi valori dobbiamo verificare l'andamento della funzione in un intorno del punto x_α tale che $\cos x_\alpha = \alpha^{-1}$. Per fare questo basta calcolare il polinomio di Taylor di grado uno della funzione in questo punto:

$$\begin{aligned}\tan x - \alpha \sin x &= \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \alpha \cos x\right)_{x=x_\alpha} (x - x_\alpha) + S_1(x) \\ &= (\alpha^2 - 1)(x - x_\alpha) + S_1(x)\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{S_1(x)}{x - x_\alpha} = 0\,.\end{aligned}$$

In un intorno di x_α la funzione integranda va quindi come $\frac{1}{x-x_\alpha}$ che ha integrale divergente. Concludiamo quindi questa parte aggiuntiva concludendo che l'integrale converge se $\alpha \in (0,1) \cup (\frac{1}{\cos 1}, +\infty)$.

Esercizio 1.10. *Discutere la convergenza del seguente integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1 - \sin x}{e^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)}\, dx\,.$$

Innanzitutto notiamo che dovremo discutere la convergenza in un intorno di $x = 0$ e di $+\infty$. Il denominatore si annulla (per $x \geq 0$) solo in zero in quanto $e^y - 1 > y > \sin y$ per ogni $y > 0$. Notiamo anche che, detta $f(x) = \frac{e^x - 1 - \sin x}{e^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)}$, vale $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^{(1-\pi)x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-x} - \frac{\sin x}{e^x}}{1 - e^{-\pi x} - \frac{\sin(\pi x)}{e^{\pi x}}} = 1,,$$

ovvero la funzione integranda, in un intorno di $+\infty$ *si comporta come* $e^{(1-\pi)x}$. Quest'ultima funzione è integrabile in senso generalizzato su $[1, +\infty)$, quindi abbiamo la convergenza dell'integrale generalizzato di f su $[1, +\infty)$ per confronto: infatti esiste $\bar{x}$ tale che, per ogni $x \geq \bar{x}$,

$$0 < \frac{f(x)}{e^{(1-\pi)x}} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < f(x) \leq 2e^{(1-\pi)x}\,.$$

Quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x - 1 - \sin x}{e^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)}\, dx \leq 2 \int_1^{+\infty} e^{(1-\pi)x}\, dx \in \mathbb{R}\,.$$

Discutiamo ora la convergenza dell'integrale generalizzato su $(0, 1]$. Possiamo calcolare, scrivendo il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in $t = 0$,

$$g(t) = e^t - 1 - \sin t = \frac{1}{2}t^2 + R_2(t)\,, \quad \text{dove } \lim_{t\to 0} \frac{R_2(t)}{t^2} = 0\,.$$

Con una semplice sostituzione troviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{e^{\pi x} - 1 - \sin(\pi x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + R_2(x)}{\frac{1}{2}(\pi x)^2 + R_2(\pi x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2\frac{R_2(x)}{x^2}}{\pi^2 + 2\pi^2 \frac{R_2(\pi x)}{\pi^2 x^2}} = \frac{1}{\pi^2}\,.$$

La funzione f ha limite finito in zero, allora è integrabile sull'intervallo $(0, 1]$.

Concludiamo che l'integrale richiesto è convergente.

Esercizio 1.11. *Determinare il carattere della serie al variare di* $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^n\,.$$

Dopo aver effettuato la sostituzione $y = \frac{x+2}{x-2}$ troviamo una serie di potenze con raggio di convergenza 1, che risulta indeterminata per $y < -1$, assolutamente convergente per $|y| \leq 1$ e divergente per $y > 1$ (scrivere tutti i dettagli per esercizio). A questo punto, una volta disegnato il grafico della funzione $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$, notiamo che

$$\begin{aligned} f(x) < -1 &\iff x \in (0, 2)\,, \\ |f(x)| \leq 1 &\iff x \in (-\infty, 0]\,, \\ f(x) > 1 &\iff x \in (2 + \infty)\,. \end{aligned}$$

Concludendo quindi che la serie è indeterminata per $x \in (0, 2)$, assolutamente convergente per $x \in (-\infty, 0]$ e divergente per $x \in (2 + \infty)$. Ovviamente per $x = 2$, la serie non è ben definita.

Esercizio 1.12. *Discutere la convergenza del seguente integrale al variare di* $\alpha > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha})\,\alpha^x}\,dx\,.$$

Dopo aver notato che il denominatore si annulla in $x = 0$, notiamo che dobbiamo discutere la convergenza dell'integrale in un intorno di $x = 0$ e $x = +\infty$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x} = 1\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(\sqrt{x^\alpha}) = \frac{\pi}{2}\,,$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha})\,\alpha^x}}{\frac{\mathrm{e}^x}{\alpha^x}} = \frac{2}{\pi}$$

e quindi deduciamo l'esistenza di un certo x_0 tale che per ogni $x > x_0$ vale

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}}{\alpha}\right)^x \le f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha})\,\alpha^x} \le \left(\frac{\mathrm{e}}{\alpha}\right)^x\,,$$

Per confronto con le funzioni presenti al membro sinistro e al membro destro osserviamo che l'integrale generalizzato di f in $[1, +\infty)$ è convergente se e solo se $\alpha > \mathrm{e}$.

Passiamo ora ad analizzare la convergenza dell'integrale di f sull'intervallo $(0, 1]$. Usando i limiti

$$\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1\,, \quad \lim_{x\to0} \alpha^x = 1\,,$$

mostriamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha})\,\alpha^x}}{x^{-(\frac{\alpha}{2}-1)}} = 1$$

e quindi deduciamo l'esistenza di un certo $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (0, \delta)$ vale

$$\frac{1}{2}x^{-(\frac{\alpha}{2}-1)} \le f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\arctan(\sqrt{x^\alpha})\,\alpha^x} \le 2x^{-(\frac{\alpha}{2}-1)}\,,$$

Per confronto con le funzioni presenti al membro sinistro e al membro destro osserviamo che l'integrale generalizzato di f in $(0, 1]$ è convergente se e solo se $\frac{\alpha}{2} - 1 < 1$, cioé se e solo se $\alpha < 4$.

Concludiamo quindi che l'integrale richiesto coverge in senso generalizzato se e solo se $\mathrm{e} < \alpha < 4$.

Esercizio 1.13. *Determinare il carattere della serie al variare di* $\alpha \ge 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \arctan(\alpha^n)\,.$$

Osserviamo che

$$\lim_n \alpha^n = \begin{cases} 0 & 0 \le \alpha < 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_n \arctan(\alpha^n) = \begin{cases} 0 & 0 \le \alpha < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \alpha = 1 \\ \frac{\pi}{2} & \alpha > 1 \end{cases}$$

Quindi per $\alpha \ge 1$ troviamo che la serie diverge usando il criterio del confronto asintotico: ha lo stesso comportamento di 2^n. Se $\alpha = 0$, la serie è costantemente uguale a zero, quindi ovviamente converge.

Consideriamo quindi il caso $0 < \alpha < 1$. Ricordiamo che

$$\lim_{x\to0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_n \frac{\arctan(\alpha^n)}{\alpha^n} = 1\,,$$

quindi

$$\lim_{x\to0} \frac{2^n \arctan(\alpha^n)}{(2\alpha)^n} = 1\,,$$

Abbiamo quindi che, per $0 < \alpha < 1$, la serie richiesta ha lo stesso carattere della serie geometrica di ragione 2α.

Concludiamo quindi che abbiamo convergenza se $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$, divergenza se $\alpha \ge \frac{1}{2}$.

Esercizio 1.14. *Determinare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n!}}{n^n\, n!}\,.$$

L'esercizio si può risolvere applicando sia il criterio del rapporto che quello della radice, vediamo il secondo metodo. Usando la stima $n! < n^n$ otteniamo

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{2^{n!}}{n^n\, n!}} > \lim_n \sqrt[n]{\frac{2^{n\,(n-1)!}}{n^{2n}}} = \lim_n \frac{2^{(n-1)!}}{n^2} = +\infty\,,$$

dove abbiamo usato che un'esponenziale cresce più di una qualsiasi potenza: per ogni $\alpha > 0$ esiste $\bar n$ tale che per ogni $n \geq \bar n$ vale $2^{(n-1)!} > 2^n > n^\alpha$.

La serie quindi diverge.

Esercizio 1.15. *Discutere la convergenza della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

Apllichiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{2(n+1)}}}{\frac{(2n)!}{n^{2n}}} &= \lim_n \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}} \frac{n^{2n}}{(2n)!} \\
&= \lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^{2n}(n+1)^2} \frac{n^{2n}}{(2n)!} \\
&= \lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}(n+1)^2} = \frac{4}{\mathrm{e}^2} < 1\,,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato

$$\lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4\,, \qquad \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \lim_n \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = \mathrm{e}^2\,.$$

La serie quindi converge.

Esercizio 1.16. *Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato*

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}}\, dx\,.$$

Innanzitutto dobbiamo discutere la convergenza di due integrali generalizzati, uno in zero l'altro a infinito.

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \int_0^{1} \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}}\, dx + \int_1^{\infty} \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}}\, dx$$

In zero. Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan(x^{-1}) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 \,:\, \forall x \in (0,\delta)\ \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}} \leq 2\frac{1}{x^{1/3}}$$

Poiché, essendo $1/3 < 1$,

$$\int_0^{1} 2\frac{1}{x^{1/3}}\, dx < +\infty\,,$$

allora deduciamo per confronto che

$$\int_0^{1} \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}}\, dx < +\infty\,.$$

A infinito. In questo caso invece

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x^{-1})}{x^{-1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \bar{x} > 0 : \forall x > \bar{x} \ \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}} \leq 2\frac{1}{x^{4/3}} ,$$

Poiché, essendo $4/3 > 1$,

$$\int_1^\infty 2\frac{1}{x^{4/3}}\, dx < +\infty ,$$

allora deduciamo per confronto che

$$\int_1^\infty \frac{\arctan(x^{-1})}{\sqrt[3]{x}}\, dx < +\infty .$$

L'integrale richiesto è convergente.

1.3 A.A. 2020/2021

Esercizio 1.17. *Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\infty \frac{(e^{e^{-x}} - 1)\sinh x}{x^\alpha}\, dx .$$

Risoluzione omessa. Vedi Esercizio 1.12.

Esercizio 1.18. *Discutere la convergenza del seguente integrale generalizzato (e, se possibile, darne una stima)*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(1/x)}{\sqrt{|x^2-1|}}\, dx .$$

Risoluzione omessa. Si noti tuttavia che sarà necessario discutere la convergenza dell'integrale nei punti $-\infty, -1, 0, +1, +\infty$. Essendo la funzione integranda dispari, se l'integrale dovesse risultare convergente, il valore ottenuto sarà necessariamente zero. Il fatto che la funzione sia dispari inoltre ci permette di concludere anche che la funzione è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $-\infty$ se e solo se è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $+\infty$. Analogamente la funzione è integrabile in senso generalizzato in un intorno di -1 se e solo se è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $+1$.

Esercizio 1.19. *Dire per quali valori di* x *converge la seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^{-2})}{\log\left(\dfrac{n+4}{n}\right)} \left(\frac{2x+4}{x-2}\right)^n .$$

Risoluzione omessa. Vedi Esercizio 1.11.

Esercizio 1.20. *Dire per quali valori positivi* a, b, c *converge la seguente serie effettuando tutti i calcoli necessari*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a\ (\log_b n)^c} .$$

Risoluzione omessa. Cambiando la base al logaritmo ci si riconduce ad un esercizio presente negli appunti del corso. Usare il metodo della condensata.

Esercizio 1.21. *Data la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arcsin(n^\alpha)}{\sin\frac{1}{n}} ,$$

dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ *la serie è ben definita e per questi determinarne il carattere.*

Esercizio 1.22. *Dire per quali valori* $\alpha \in \mathbb{R}$ *il seguente integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{|x^3 - x^2|^{\frac{1}{2}}}\, ds$$

converge in senso generalizzato.

1.4 A.A. 2021/2022

Esercizio 1.23. *Dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie è convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^k \right]^{-1} .$$

Esercizio 1.24. *Dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \sin(\pi x) + f(x)}{|2x-1|^{\alpha}} \, dx$$

dove $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 2022 \\ \arctan(x - 2022) & \text{se } x > 2022 \end{cases}$$

I punti problematici sono $x = \frac{1}{2}$ (in cui si annulla il denominatore) e ovviamente a infinito. Per esercizio mostrare che il seguente limite ha valore reale positivo

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1 - \sin(\pi x)}{(2x-1)^2} .$$

Ne consegue che l'integrando si comporta come la funzione $|2x-1|^{2-\alpha}$ in un intorno di $\frac{1}{2}$. Quindi l'integrale converge in un intorno di questo punto se e solo se $2 - \alpha > -1$ ovvero se e solo se $\alpha < 3$.

Per quanto riguarda il comportamento a infinito notiamo che il numeratore soddisfa $\frac{\pi}{4} < 1 - \sin(\pi x) < \frac{\pi}{2} + 2$ in un intorno di $+\infty$. Quindi abbiamo

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{|2x-1|^{\alpha}} < \frac{1 - \sin(\pi x) + f(x)}{|2x-1|^{\alpha}} < \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) \cdot \frac{1}{|2x-1|^{\alpha}}$$

in un intorno di $+\infty$. Da ciò possiamo dedurre che la funzione è integrabile se converge l'integrale della funzione $|2x-1|^{-\alpha}$ in un introno di $+\infty$. Essa asintoticamente si comporta come $x^{-\alpha}$, quindi se $\alpha > 1$ l'integrale converge.

Quindi tutto l'integrale converge se e solo se $\alpha \in]1, 3[$.

Si noti che in assenza della funzione f avremmo solo

$$0 < \frac{1 - \sin(\pi x)}{|2x-1|^{\alpha}} < 2 \cdot \frac{1}{|2x-1|^{\alpha}}$$

in un intorno di $+\infty$. Ciò potrebbe permettere di ottenere la convergenza dell'integrale anche per $\alpha \le 1$. Ciò tuttavia non accade come vedremo col prossimo ragionamento.

(questa parte sarà aggiunta in seguito)

La funzione f è stata quindi aggiunta per rendere più semplice l'esercizio.

Esercizio 1.25. *Determina il raggio di convergenza della seguente serie:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{3n}{2n} x^n$$

Il raggio di convergenza sarà $R = 1/\ell$ dove

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{\binom{3n+3}{2n+2}}{\binom{3n}{2n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(3n+3)!}{(2n+2)!\,(n+1)!}}{\frac{(3n)!}{(2n)!\,n!}} = \cdots = \lim_{n \to \infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} = \frac{27}{4}$$

da cui $R = 4/27$.

Esercizio 1.26. *Determina il carattere della serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ *definita come*

$$x_0 = 100\,, \qquad x_{n+1} = \frac{3x_n}{x_n + 4}\,,\ n \in \mathbb{N}$$

L'esercizio è simile ad uno presente nelle note del corso. Risoluzione omessa.

Esercizio 1.27. *Determina il carattere della serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k) \sin\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Risoluzione omessa. Suggerimento: provare che la serie è assolutamente convergente.

Esercizio 1.28. *Determina il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2 - 3\sin n)^2}{\sqrt{3^n + 4n}}\,.$$

Qui do solo una risoluzione schematica. Dapprima usare il criterio del confronto asintotico per mostrare che questa serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{3^{n/2}}$$

(scrivere tutti i passaggi necessari per esercizio) poi si può utilizzare il criterio del rapporto asintotico (o della radice asintotico, a scelta) per mostrare che è convergente. I dettagli sono lasciati per esercizio.

1.5 A.A. 2022/2023

Esercizio 1.29. *Determina il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin^2 n}{2}\left(\arctan(4n^2 - 36n + 77) + \frac{1}{4n^2 - 36n + 77}\right)\right]^n.$$

Innanzitutto osserviamo che $4n^2 - 36n + 77 < 0$ per $n \in \{4, 5\}$ essendo le soluzioni dell'equazione di secondo grado associata associata

$$x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 77}}{4} = \frac{18 \pm \sqrt{4 \cdot (9^2 - 77)}}{4} = \frac{9 \pm 2}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{7}{4}\,,\ x_2 = \frac{11}{4}\,.$$

Quindi, consideriamo la serie resto $\sum_{n=6}^{+\infty} a_n$ che risulta a termini positivi poiché $\tan y + \frac{1}{y} > 0$ se $y > 0$. Inoltre vale

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{1}{2}\left[\arctan y + \frac{1}{y}\right] = \frac{\pi}{4} < 1\,. \tag{5}$$

A questo punto consideriamo la serie a termini positivi

$$\sum_{n=6}^{+\infty} b_n = \sum_{n=6}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}\left(\arctan(4n^2 - 36n + 77) + \frac{1}{4n^2 - 36n + 77}\right)\right]^n,$$

che converge usando il criterio della radice asintotico grazie al limite in (5). Concludiamo osservando che $a_n \le b_n$ per ogni $n \ge 6$. Quindi per il criterio del confronto abbiamo la convergenza della serie richiesta.

Importante! Si osservi che NON è possibile argomentare nel modo seguente: *la serie data converge per il criterio della radice asintotico essendo*

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} \le \lim_n \sqrt[n]{b_n} = \frac{\pi}{4} < 1\,.$$

Infatti quanto sopra non permette di ottenere la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tramite il criterio in quanto le precedenti disuguaglianze non garantiscono l'esistenza del limite $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ che infatti non esiste.

Esercizio 1.30. *Determina il carattere della serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{\sqrt[3]{n}}$ *dove la successione* $(b_n)_n$ *è periodica di periodo 10 (ovvero* $b_{n+10} = b_n$ *per ogni* $n \ge 1$*) e vale* $\sum_{k=1}^{10} b_k = 0$.

L'obiettivo è usare il criterio di Dirichlet. La successione $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ è decrescente e infinitesima. Se riusciamo a dimostrare che la successione delle ridotte

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

è limitata, allora otteniamo la convergenza della serie richiesta. Dalle proprietà della successione $(b_n)_n$ deduciamo che, per $n = 10m + r$ con $m, r \in \mathbb{N}$ e $1 < r \le 10$,

$$s_n = s_{10m+r} = \sum_{k=1}^{10m+r} b_k = \sum_{k=1}^{10m} b_k + \sum_{k=10m+1}^{10m+r} b_k = m\left(\sum_{k=1}^{10} b_k\right) + \sum_{k=1}^{r} b_k = \sum_{k=1}^{r} b_k = s_r\,.$$

Concludiamo quindi che la successione s_n assume solo dieci possibili valori: $s_1, s_2\cdot, s_9, s_{10}$. Quindi s_n è limitata.

Esercizio 1.31. *Dire se i seguenti integrali in senso generalizzato sono convergenti o divergenti:*

$$\int_{-\infty}^{10} \sqrt{y^2+1} - y\,dy\,, \qquad \int_0^{\pi^2} \frac{\sqrt{\sin\sqrt{x}}}{\mathrm{e}^{-x}-1}\,dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2}\,ds\,.$$

Esercizio 1.32. *Dire per quali valori reali del parametro* λ *converge la seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n\,.$$

Successivamente scrivere dominio e valore assunto al variare di x *dalla funzione*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n\,.$$

Risoluzione breve. Si nota che siamo in presenza di una serie geometrica. Il valore λ deve soddisfare $-1 < 1 - \frac{1}{x} < 1$, condizione valida se e solo se $\lambda > 1/2$. A questo punto la funzione S ha dominio $]1/2, +\infty[$ e il valore assunto dalla funzione è la somma della serie che quindi è

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)} - 1 = x - 1\,.$$

Esercizio 1.33. *Determina il carattere della seguente serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}\right)$.

La serie diverge. Per dimostrarlo si usa il criterio del confronto asintotico dimostrando che il seguente limite esiste reale positivo

$$\lim_n \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}\right)}{\frac{1}{n}}\,.$$

I dettagli sono lasciati per esercizio (suggerimento: raccogliere il termine $\sqrt{n^3}$ al numeratore).

Esercizio 1.34. *Determina il carattere della serie*

$$\sum_{n=12}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\log n}\,.$$

Risoluzione omessa. Usare il criterio della radice asintotico.

1.6 A.A. 2023/2024

Esercizio 1.35. *Determina il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)\log(n+5)}{n^2\sqrt{n}}\,.$$

Dopo aver notato che

$$\lim_n \frac{n+5}{n}\,\frac{\log(n+5)}{n^\alpha} = 0$$

per ogni $\alpha > 0$, scegliendo ad esempio $\alpha = 1/4$ si trova

$$\lim_n \frac{\frac{(n+5)\log(n+5)}{n^{5/2}}}{n^{5/4}} = 0\,.$$

Da ciò deduciamo che la serie converge grazie al criterio del confronto asintotico.

Esercizio 1.36. *1) Discutere la convergenza della serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{2n}$; *e scrivere la somma della serie;*

2a) Dimostrare che $\int_0^1 e^{x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{2n+1}$.

2b) Sapendo che le serie $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *sono serie convergenti di numeri non negativi, dimostrare che la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *è convergente.*

Ponendo $y = x^2$ troviamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}y^n$; che converge uniformemente per ogni $y \in \mathbb{R}$ (spiegare perché) con somma e^y. Troviamo quindi che la serie data converge uniformemente per ogni $x \in \mathbb{R}$ con somma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{2n} = e^{x^2}$. A questo punto possiamo scambiare limite e integrale nelle seguenti identità

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{2n}dx = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}x^{2n}dx = \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}x^{2n}dx \\ = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\int_0^1 x^{2n}dx = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\frac{1}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{2n+1}\,.\end{aligned}$$

Per l'ultimo punto, data la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ possiamo affermare che esiste $N > 0$ tale che $0 \le b_n \le 1$ per ogni $n > N$. Quindi $0 \le a_n b_n \le a_n$ per ogni $n > N$ e concludiamo usando il criterio del confronto.

Esercizio 1.37. *Data la serie*

$$\sum_{n\ge1} n\frac{x^{n+1}}{(x+1)^n} \qquad x \ge 0\,,$$

trovare l'insieme di convergenza puntuale, trovare l'insieme dove c'è convergenza uniforme, calcolare la somma ove possibile.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$ e la sua serie derivata $\sum_{n=1}^{+\infty} ny^{n-1} = \frac{1}{(1-y)^2}$ convergono puntualmente su $[-1,1[$ e uniformemente sui compatti contenuti in questo intervallo. Ponendo $y = \frac{x}{x+1}$, troviamo

$$\sum_{n\ge1} n\frac{x^{n+1}}{(x+1)^n} = \frac{x^2}{x+1}\sum_{n=1}^{+\infty} ny^{n-1} = \frac{x^2}{x+1}\frac{1}{(1-y)^2} = \frac{x^2}{x+1}(x+1)^2 = x^2(x+1)$$

dove quanto sopra vale per i valori di $x \ge 0$ tali che $y = \frac{x}{x+1} \in [-1,1[$. Questa condizione vale per tutti gli $x \ge 0$. Concludiamo poi osservando che la convergenza uniforme si ha sui compatti del tipo $[0,a]$ con $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.38. *Data la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+4}}{n+1},$$

trovare l'insieme di convergenza puntuale, trovare l'insieme dove c'è convergenza uniforme, calcolare la somma ove possibile.

Possiamo porre $y = x^3$ e trovare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+4}}{n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1}$$

Nel membro destro riconosciamo la serie integrale della serie geometrica con somma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-y)$$

che converge puntualmente su $[-1,1[$. Andando a ritroso possiamo quindi scivere

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+4}}{n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} = -x\ln(1-x^3)$$

che converge puntualmente su $[-1,1[$. Per la convergenza uniforme notiamo che essa converge uniformemente su compatti del tipo $[-r,r]$ con $r<1$.

Esercizio 1.39. *Determinare per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente*

$$\int_0^{+\infty} \frac{(e^{\alpha x}-1)x}{\sqrt[3]{x}(x^3+x^2)^{1-\alpha}}\,dx.$$

Studiamo dapprima la convergenza dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{(e^{\alpha x}-1)x}{\sqrt[3]{x}(x^3+x^2)^{1-\alpha}}\,dx.$$

Dapprima osserviamo che le due funzioni

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x}(x^3+x^2)^{1-\alpha}} \quad e \quad x^{3(\alpha-1)+2/3}$$

hanno lo stesso comportamento a infinito. In particolare notiamo che per $\alpha > 0$ comanda il termine con l'esponenziale e quindi l'integrando non tende a zero, da cui deduciamo la divergenza dell'integrale. Per $\alpha = 0$ invece la funzione integranda è identicamente nulla, quindi l'integrale converge (anche in un intorno di zero). Per $\alpha < 0$ l'integrando va come $-x^{-7/3}$ e quindi l'integrale è convergente. Concludiamo quindi che a infinito l'integrale converge per $\alpha \le 0$. Analizziamo ora la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{1} \frac{(e^{\alpha x}-1)x}{\sqrt[3]{x}(x^3+x^2)^{1-\alpha}}\,dx.$$

Usando il limite fondamentale notiamo che l'integrando va come $\alpha x^{-\frac{1}{3}+2\alpha}$. Quindi l'integrale converge se e solo se $-\frac{1}{3}+2\alpha > -1$ ovvero $\alpha > -1/3$. Concludiamo quindi che l'integrale converge per $-\frac{1}{3} < \alpha \le 0$.

Esercizio 1.40. *Data la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}(4x-3)^n$, trovare l'insieme di convergenza puntuale, trovare l'insieme dove c'è convergenza uniforme, calcolare la somma ove possibile.*

Poniamo $y = 4x-3$ e troviamo la serie di potenze $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}y^n$. Dopo aver mostrato che il raggio di convergenza è 1 e aver motivato che la serie converge semplicemente per $y=-1$, assolutamente per $|y|<1$, concludiamo anche che converge uniformemente sui compatti del tipo $[-a,a]$ con $|a|<1$. Notiamo che

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}y^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n+1}y^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}y^{n+1} - y - \frac{y^2}{2} = -\ln(1-y) - y - \frac{y^2}{2}$$

(si veda l'Esercizio 1.38 per analogia). Si lascia per esercizio la gestione del ritorno alla variabile x.

Esercizio 1.41. *Determinare per quali valori $y \in \mathbb{R}$ converge la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}(4y-3)^n$.

Calcoli lasciati per esercizio. Dopo aver introdotto la variabile $x = 4y - 3$ troviamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$. Per esercizio provare che il raggio di convergenza è $1/4$. Successivamente per $x = -1/4$ è possibile utilizzare il criterio di Leibniz provando che vale

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \text{ dove } a_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n},$$

da cui segue che la successione è decrescente. Nel caso $x = 1/4$ la serie diverge. La cosa è meno intuitiva ed una spiegazione dettagliata non era pretesa. Una possibile strategia è mostrare per induzione che vale $a_n > \frac{1}{n+1}$ usando il calcolo precedente

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}a_n > \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2}$$

dove l'ultima maggiorazione segue dal fatto che

$$(n+2)(2n+1) = 2n^2 + 5n + 2 > 2n^2 + 3n + 2 = (2n+2)(n+1).$$

Si lascia per esercizio la gestione del ritorno alla variabile x.

Esercizio 1.42. *Per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie?*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{\alpha \sin n}}{n^\alpha + 1}$$

1.7 A.A. 2024/2025

Esercizio 1.43. *Dire se la seguente serie converge*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin n)(1-\cos(1/n!))}{n^{-n}}.$$

Dimostreremo che la serie è assolutamente convergente. Dapprima notiamo che

$$\left|\frac{(\sin n)(1-\cos(1/n!))}{n^{-n}}\right| \le \frac{1-\cos(1/n!)}{n^{-n}} = a_n$$

Quindi mostreremo che la serie di termine a_n converge da cui dedurremo per confronto che la serie data è assolutamente convergente. Successivamente, essendo $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, troviamo che la serie di termine a_n, grazie al criterio del confronto asintotico ha lo stesso carattere della serie di termine generale

$$b_n = \frac{(1/n!)^2}{n^{-n}} = \frac{n^{-n}}{(n!)^2}.$$

Completare l'esercizio utilizzando il criterio del rapporto asintotico (il limite farà zero).

Esercizio 1.44. *Discutere per quali valori convergono le seguenti serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n\ln n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n\ln n}$$

Esercizio 1.45. *Discutere la convergenza delle seguenti serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n - 1}, \qquad \sum_{n=20}^{\infty} \sqrt{n+10} - \sqrt{n-10}.$$

Esercizio 1.46. *Studiare il carattere delle seguenti serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n^4) + n^{3/5}}{n^{3/5}\log(n^n + n!)}$$

Esercizio 1.47. *Studiare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=5}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{\log_2 n}{n}\right)-1\right].$$

Esercizio 1.48. *Dire per quali valori $x\in\mathbb{R}$ converge la seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n+5}{(n+3)!}(x+2)^n.$$

1.8 A.A. 2025/2026

Esercizio 1.49. *Discutere il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+4}\right)^{-n^2}.$$

Esercizio 1.50. *Studiare il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4\alpha-1}{\alpha\sqrt[n]{n}}\right]^n$$

al variare di $\alpha>0$

Esercizio 1.51. *Date le serie $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$, sia $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n$ tale che $c_{2k}=a_k$ e $c_{2k+1}=b_k$ per ogni $k\in\mathbb{N}$. Provare che*

1. *se le serie $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ convergono allora $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n$ converge,*
2. *se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ diverge positivamente e $b_n\geq 0$ per ogni n, allora $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n$ diverge positivamente.*
3. *Trovare un esempio di serie $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ divergenti tali che $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n$ converge.*

Introduciamo le notazioni per le successioni delle somme parziali come

$$\alpha_m=\sum_{k=0}^{m}a_k,\qquad \beta_m=\sum_{k=0}^{m}b_k,\qquad \gamma_m=\sum_{k=0}^{m}c_k,$$

Notiamo che

$$\begin{aligned}
\gamma_0&=a_0,\\
\gamma_1&=a_0+b_0,\\
\gamma_2&=a_0+b_0+a_1,\\
\gamma_3&=a_0+b_0+a_1+b_1,\\
\gamma_4&=a_0+b_0+a_1+b_1+a_2=\alpha_2+\beta_1,\\
\gamma_5&=a_0+b_0+a_1+b_1+a_2+b_2=\alpha_2+\beta_2,\\
&\vdots\\
\gamma_{2n}&=\alpha_n+\beta_{n-1},\\
\gamma_{2n+1}&=\alpha_n+\beta_n.
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo che

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\gamma_{2n}&=\lim_{n\to+\infty}\alpha_n+\beta_{n-1},\\
\lim_{n\to+\infty}\gamma_{2n+1}&=\lim_{n\to+\infty}\alpha_n+\beta_n.
\end{aligned}$$

Nel primo punto abbiamo che esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = A \in \mathbb{R}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \beta_n = B \in \mathbb{R}\,,$$

quindi possiamo dedurre dalle formule precedenti, ragionando separatamente su indici pari e dispari,

$$\lim_{m\to+\infty} \gamma_m = C \coloneqq A + B \in \mathbb{R}$$

e concludere il primo punto. Per il secondo punto osserviamo che valgono

$$\gamma_{2n} \geq \alpha_n\,, \qquad \gamma_{2n+1} \geq \alpha_n$$

da cui deduciamo usando il teorema del confronto per successioni

$$\lim_{m\to+\infty} \gamma_m = +\infty.$$

Per l'ultimo punto deduciamo possiamo prendere una qualsiasi serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ divergente ma che soddisfi $\lim_n a_n = 0$, come ad esempio la serie di termine $a_n = \frac{1}{n+1}$, e definire la seconda ponendo $b_n = -a_n$ (per cui otteniamo $\beta_n = -\alpha_n$). Quindi deduciamo che

$$\gamma_{2n} = \alpha_n + \beta_{n-1} = \alpha_{n-1} + a_n - \alpha_{n-1} = a_n\,,$$
$$\gamma_{2n} = \alpha_n + \beta_n = \alpha_{n-1} - \alpha_{n-1} = 0\,,$$

da cui deduciamo, usando il fatto che $\lim_n a_n = 0$, che vale $\lim_n \gamma_n = 0$. Quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge (con somma zero).

Esercizio 1.52. *Studiare il carattere della seguente serie numerica al variare del parametro reale $\alpha > 0$:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)\right].$$

Suggerimento: i termini della serie si compone dei due addendi $1-\cos(\frac{1}{n})$ e $\ln(1+\frac{1}{n^\alpha})$ di cui è facile dedurre l'andamento asintotico. Uno dei due prevale sull'altro al crescere di n (al variare di α cambia quale dei due).

Esercizio 1.53. *Studiare il carattere della seguente serie numerica* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot 3^n}{n^n}$.

2 Continuità e differenziabilità, problemi di massimo e minimo

2.1 A.A. 2018/2019

Esercizio 2.1. *Discutere, della seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Scrivere il valore del gradiente di f al variare di $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Facilmente si vede che la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ in quanto rapporto fra polinomi (usando il teorema di continuità del rapporto fra funzioni continue). Calcoliamo le derivate parziali nei punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Le derivate parziali quindi esistono in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Quindi per $(x,y) \neq (0,0)$ abbiamo

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2}\,,\ \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

Poiché il gradiente è continuo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, per il teorema del differenziale totale la funzione è differenziabile per ogni $(x,y) \neq (0,0)$.

Passiamo ora a studiare le proprietà di f nell'origine $(0,0)$. Per la continuità dobbiamo mostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\,.$$

A questo scopo notiamo che per $(x,y) \neq (0,0)$ possiamo ottenere le seguenti maggiorazioni:

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|x|^3+y^4}{x^2+y^2} = \frac{x^2\cdot|x|}{x^2+y^2} + \frac{y^2\cdot y^2}{x^2+y^2} \leq |x| + y^2\,,$$

dove abbiamo usato che $x^2 \leq x^2+y^2$ e $y^2 \leq x^2+y^2$. Valendo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| + y^2 = 0$, possiamo concludere che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, quindi f è continua in zero. Quindi f è continua in tutto il dominio.

Studiamo ora l'esistenza delle derivate parziali in $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2-0}{h} = 0\,,$$

Concludiamo quindi che le derivate parziali esistono in tutto il dominio.

Studiamo ora la differenziabilità di f in $(0,0)$. Dobbiamo vedere se possiamo mostrare che vale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \tag{6}$$

dove "$\cdot$" denota il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$, in particolare

$$\nabla f(0,0)\cdot(x,y) = (1,0)\cdot(x,y) = x\,.$$

Calcoliamo il termine nel limite

$$\begin{aligned} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} - 0 - x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x^3+y^4-x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^4-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

Se ci avviciniamo all'origine lungo la retta $y = x$ troviamo che

$$\frac{f(t,t) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(t,t)}{\sqrt{t^2+t^2}} = \frac{t^4 - t^3}{2^{3/2}|t|^{3/2}} = 2^{-3/2}\left(\sqrt{|t|} + \frac{t}{|t|}\right)$$

dove il secondo addendo in parentesi non ammette limite per $t \to 0$. Quindi non può valere il limite (6).

Quindi f non è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2.2. *Dato l'insieme*

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le \sqrt{3}x\,,\ x^2 + y^2 \le 2\right\},$$

determinare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$ *nell'insieme* E *dopo aver dimostrato che questi esistono.*

La funzione ammette massimo e minimo su E in quanto l'insieme è chiuso e limitato (infatti è un sottinsieme della palla di $\mathbb{R}^2$ di raggio $\sqrt{2}$ centrata nell'origine.

Osserviamo che l'insieme E è simmetrico rispeto all'asse delle x e vale $f(x,y) = f(x,-y)$. Questa simmetria della funzione ci faciliterà lo studio del problema. Inoltre vale anche $f(x,y) = f(-x,y)$, ma tale proprietà risulta utile in questo caso solo nella ricerca dei punti critici.

Cerchiamo innanzitutto i punti critici di f, che risulta una funzione di classe C^∞, essendo un polinomio. I punti critici sono quindi solo i punti che soddisfano $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Risolvendo quindi il sistema

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 2x, 2y) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x(2x^2-1) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

troviamo i punti critici $(0,0)$ e $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. La matrice Hessiana della funzione è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Valutando questa nei punti critici otteniamo

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{and} \qquad H_f(\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'origine è un punto di sella (un autovalore positivo e uno negativo), gli altri due punto sono di minimo locale (due autovalori positivi). Poiché $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \in E$, esso dovrà essere considerato come possibile minimo della funzione f su E. Quindi calcoliamo

- $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\frac{1}{4}$.

Passiamo alla seconda parte del problema. Abbiamo già individuato un punto interno candidato ad essere punto di minimo. Studiamo quindi la frontiera dell'insieme E. Disegnando E notiamo che la sua frontiera presenta tre *spigoli* nei punti $(0,0)$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$, che sono quindi da considerare fra i candidati punti di estremo:

- $f(0,0) = 0$, - $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}) = \frac{5}{4}$.

La parità della funzione nella variabile y ci permette di studiare solo l'insieme $E^+ = \{(x,y) \in E \mid y \ge 0\}$. Questo accorgimento ci permette, *dopo aver aggiunto il punto candidato* $(\sqrt{2}, 0)$ con valore

- $f(\sqrt{2}, 0) = 2$

di studiare massimi e minimi locali negli insiemi

$$\partial E_1 = \{(x,y) \mid y = \sqrt{3}x\,,\ x \in (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})\},$$
$$\partial E_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 2\,,\ x \in (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})\}.$$

La semplice sostituzione $y = \sqrt{3}x$ ci permette di studiare gli estremi locali di f su ∂E_1 tramite lo studio della funzione

$$g(x) = f(x, \sqrt{3}x) = x^4 - x^2 + 3x^2 = x^4 + 2x^2\,, \quad x \in (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

che è crescente nell'intervallo considerato in quanto

$$g'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1) > 0\,, \quad \forall x > 0\,.$$

Non ha quindi punti di estremo locale. La sostituzione $y^2 = 2 - x^2$ ci permette di studiare gli estremi locali di f su ∂E_2 tramite lo studio della funzione

$$h(x) = f(x,y)|_{y^2=2-x^2} = x^4 - x^2 + 2 - x^2 = x^4 - 2x^2 + 2\,, \quad x \in (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})\,.$$

La derivata $h'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ si annulla per $x = -1, 0, 1$, di cui $x = 1$ appartiene all'intervallo considerato. Quindi il candidato risulta $(1,1)$ e il suo simmetrico $(1,-1)$ con

- $f(1, \pm 1) = 1$

(Uno studio più dettagliato porterebbe alla conclusione che si tratta di un minimo locale di h, ma non necessariamente di un minimo locale di f ristretta all'insieme E).

Concludiamo, confrontando i candidati nelle formule segnate con $\bullet$, che $\min_E f = -\frac{1}{4}$ e $\max_E f = 2$.

Alternative: se non notiamo la parità della funzione rispetto all'asse x possiamo semplicemente calcolare gli estremi locali di f sugli insiemi

$$\begin{aligned}
\partial E_1 &= \{(x,y) \mid y = \sqrt{3}x\,,\ x \in (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})\}\,,\\
\partial E_1^{bis} &= \{(x,y) \mid y = -\sqrt{3}x\,,\ x \in (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})\}\,,\\
\partial E_2^{bis} &= \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 2\,,\ y \in (-\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})\}\,.
\end{aligned}$$

I calcoli per ∂E_1^{bis} sono analoghi a quelli per ∂E_1 già visti sopra. Nel caso di ∂E_2^{bis} si potrebbero scomodare i moltiplicatori di Lagrange. In questo caso il punto $(\sqrt{2}, 0)$ risolverà il sistema e non emergerà da considerazioni legate alla simmetria dell'insieme. Dobbiamo quindi risolvere:

$$\begin{cases} 2x(2x^2 - 1) = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x(2x^2 - 1 - \lambda) = 0 \\ 2y(1 - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2\,. \end{cases}$$

Ha senso studiare prima la seconda equazione che porta alla scelta di $y = 0$ o $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} 2x(2x^2 - 1 - \lambda) = 0 \\ y = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (\pm\sqrt{2}, 0)\,,$$

$$\begin{cases} 2x(2x^2 - 2) = 0 \\ \lambda = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 1 \\ y^2 = 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 1 \\ \lambda = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

Quindi troviamo i punti $(0, \pm\sqrt{2})$, $(\pm 1, \pm 1)$. I punti $(\sqrt{2}, 0)$ e $(1, \pm 1)$ appartengono all'insieme ∂E_2^{bis} e vanno considerati. Si noti infatti che il sistema impostato con i moltiplicatori di Lagrange ci dà tutti i punti di estremo locale di f sull'intera circonferenza di raggio $\sqrt{2}$.

Infine si noti che tutti i punti di estremo trovati sono coerenti con le simmetrie della funzione.

Esercizio 2.3. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = xy^2 - x^2 - 2y^2 + 2x\,,$$

determinarne i punti critici e la loro natura. Dire se la funzione ammette massimi e minimi globali nel suo dominio.

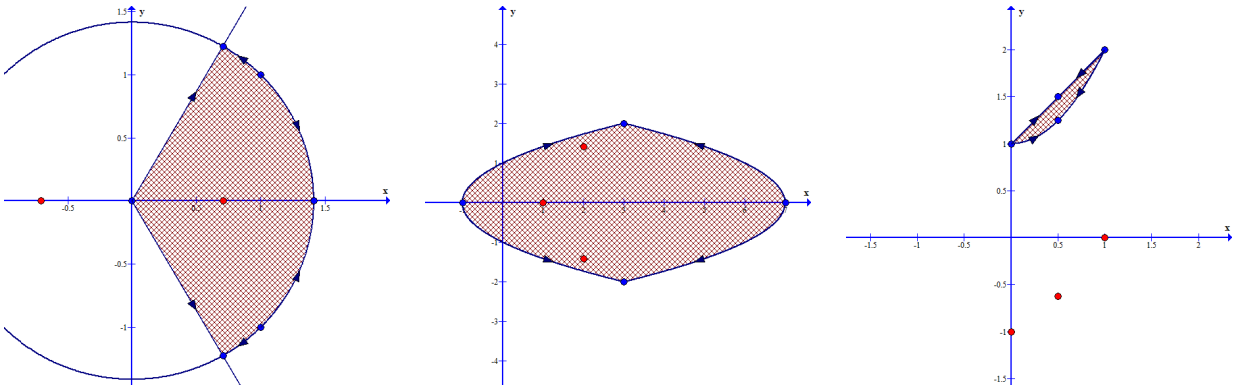


Figura 1: Vedi Esercizio 2.2 a sinistra, Esercizio 2.3 al centro, Esercizio 2.5 a destra.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 1 \le x \le 7 - y^2\right\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

Calcoliamo il gradiente

$$\nabla f(x,y) = (y^2 - 2x + 2\,,\, 2xy - 4y)$$

che si annulla nei punti che risolvono il sistema

$$\begin{cases} y^2 - 2x + 2 = 0 \\ 2y(x-2) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y^2 = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

ovvero i punti $(1,0)$ e $(2,\pm\sqrt{2})$. Per determinarne la natura calcoliamo la matrice hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 2x-4 \end{pmatrix}.$$

e valutarla nei punti precedentemente trovati:

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad H_f(2,\pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -2 & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

Il punto $(1,0)$ risulta punto di massimo locale (due autovalori negativi), mentre per gli altri punti troviamo un determinante negativo (quindi si tratta di punti di sella).

Concludiamo che essendo

$$f(t,t) = t^3 - 3t^2 + t\,, \quad \lim_{t\to\pm\infty} f(t,t) = \pm\infty\,,$$

la funzione non ammette massimi e minimi assoluti su $\mathbb{R}^2$.

Passiamo ora allo studio di f ristretta all'insieme E. L'insieme è chiuso e limitato. La limitezza si ottiene notando che

$$y^2 - 1 \le 7 - y^2 \quad \Rightarrow \quad y \in [-2,2]$$

e che

$$-1 \le y^2 - 1 \le x \le 7 - y^2 \le 7\,.$$

Quindi $E \subseteq [-1,7] \cup [-2,2]$. La funzione è continua su un compatto, quindi ammette massimo e minimo. La funzione ammette massimo locale interno $(1,0)$ con valore

- $f(1,0) = 1\,.$

Studiamo ora f sulla frontiera ∂E, che è costituita dai due archi di parabola:

$$\begin{aligned}\partial E_1 :=&\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = y^2-1\,, y\in(-2,2)\}\\ =&\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = y^2-1\,, x\in[-1,3)\}\,,\\ \partial E_2 :=&\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = 7-y^2\,, y\in(-2,2)\}\\ =&\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = 7-y^2\,, x\in(3,7]\}\,,\end{aligned}$$

separati dai punti $(3,\pm 2)$ tali che

- $f(3,\pm 2) = 1\,.$

Studiando f ristretta a ∂E_1 troviamo

$$g_1(x) = f(x,y)|_{y^2=x+1} = x-2\,, \qquad x\in[-1,3)\,,$$

che dà come candidato punto $(-1,0)$ tale che

- $f(-1,0) = -3\,.$

Analogamente, per f ristretta a ∂E_2 troviamo

$$g_2(x) = f(x,y)|_{y^2=7-x} = -2x^2+11x-14\,, \qquad x\in(3,7]\,,$$

che, essendo monotona decrescente dà come candidato il punto di estremo $(7,0)$ tale che

- $f(7,0) = -35\,.$

Riassumendo troviamo, confrontando i candidati nelle formule segnate con $\bullet$, che $\min_E f = -35$ e $\max_E f = 1$ (raggiunto in tre punti distinti).

Esercizio 2.4. *Data la funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2\,,$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = z\,, y = z^2\right\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

La funzione f ammette come unico punto critico l'origine $O = (0,0,0)$. Lo studio della matrice hessiana in questo punto porta alla conclusione che si tratta di un punto di sella (dettagli per esercizio).

Mostriamo che l'insieme chiuso E è anche limitato. A questo scopo scriviamo

$$z = x^2+y^2 \geq y^2 = z^4 \quad \Rightarrow \quad z\geq z^4\,,$$

che ha soluzioni $z\in[0,1]$. A questo punto deve essere $x^2+y^2 = z\leq 1$. Quindi concludiamo ad esempio che

$$E\subseteq[-1,1]\times[-1,1]\times[0,1]\,.$$

Essendo la funzione continua, esistono massimo e minimo di f su E che si può scrivere come insieme di livello zero per la funzione

$$F(x,y,z) = (x^2+y^2-z\,,\, y-z^2)\,.$$

Per individuare i punti di estremo, usiamo il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Dapprima notiamo che

$$J_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1\\ 0 & 1 & -2z\end{pmatrix}$$

non ha rango massimo se $x = 0$ e $4yz = 1$. Nessun punto di E soddisfa queste due richieste, infatti la validità della prima implica $y^2 = z$ e $y = z^2$, valide solo se $y = z = 0$ oppure $y = z = 1$. Quindi J_F ha rango massimo in tutti i punti di E.

Impostiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 2y + \mu \\ -2z = -\lambda - \mu 2z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ 2y(1-\lambda) = \mu \\ 2z(\mu - 1) = -\lambda \\ x^2 + y^2 = z \\ y = z^2 \end{cases}$$

e distinguiamo i casi $x = 0$ e $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y(1-\lambda) = \mu \\ 2z(\mu - 1) = -\lambda \\ y^2 = z \\ y = z^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) \in \{(0,0,0), (0,1,1)\}$$

(ignorando la seconda e terza equazione)

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ 0 = \mu \\ z = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{7}{16} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = \left(\pm\tfrac{\sqrt{7}}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right)$$

Riassumendo troviamo

- $f(0,0,0) = 0$,
- $f(0,1,1) = 0$,
- $f\left(\pm\tfrac{\sqrt{7}}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4}$.

Concludiamo che $\min_E f = 0$ e $\max_E f = \frac{1}{4}$.

Esercizio 2.5. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x, y) = x^3 - x^2 y + y^2 - x^2 - xy + 2y - x\,,$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre massimo e minimo assoluto della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le y - 1 \le x\right\},$$

dopo aver spiegato perché questi esistono.

Calcoliamo gradiente ed hessiana della funzione f:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 2xy - 2x - y - 1\,,\, -x^2 + 2y - x + 2)\,,$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y - 2 & -2x - 1 \\ -2x - 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo dove si annulla il gradiente:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - 2x - y - 1 = 0 \\ y = \frac{1}{2}(x^2 + x - 2) \end{cases} \quad \Rightarrow \cdots \Rightarrow \quad (x, y) \in \{(0,-1), (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{5}{8}), (1,0)\}$$

dove i calcoli sono lasciati per esercizio. Valutiamo la matrice hessiana in questi punti:

$$H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$H_f(\tfrac{1}{2},-\tfrac{5}{8}) = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

I primi due punti hanno matrice hessiana con determinante negativo, quindi autovalori di segno opposto: sono punti di sella. Invece il terzo punto ha matrice hessiana con determinante e traccia positivi, quindi due autovalori positivi: è un punto di minimo locale con valore $f(\frac{1}{2},-\frac{5}{8}) = -\frac{65}{64}$.

Passiamo allo studio di f ristretta all'insieme chiuso E, che risulta limitato essendo $E \subseteq [0,1]\times[1,2]$: infatti dalla disequazione $x^2 \le x$ segue che $x \in [0,1]$, quindi troviamo $0 \le x^2 \le y-1 \le x \le 1$ che porta a $y \in [1,2]$.

La funzione è continua, quindi per il teorema di Weierstrass, ha massimo e minimo su E. Notiamo che il candidato $(\frac{1}{2},-\frac{5}{8})$ non appartiene a questo insieme.

Studiamo quindi la frontiera ∂E, che risulta costituita da un segmento e un arco di parabola.

$$\partial E_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+1\,,\ x \in (0,1)\}\,,$$
$$\partial E_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2+1\,,\ x \in (0,1)\}\,,$$

e dai punti $(0,1)$ e $(1,2)$ tali che

- $f(0,1) = f(1,2) = 3$.

La funzione f ristretta a ∂E_1 porta alla funzione (calcoli per esercizio)

$$g(x) = \ldots = -2x^2 + 2x + 3\,, \qquad x \in (0,1)\,,$$

con derivata $g'(x) = -4x+2$ che si annulla in $x = \frac{1}{2}$ con derivata seconda negativa individuando un punto di massimo locale (su ∂E_1!). Abbiamo quindi il candidato $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ con valore

- $f(\frac{1}{2},\frac{3}{2}) = \frac{7}{2}$.

Similmente, la funzione f ristretta a ∂E_2 porta alla funzione (calcoli per esercizio)

$$h(x) = \ldots = 2x^2 - 2x + 3\,, \qquad x \in (0,1)\,,$$

con derivata $g'(x) = 4x-2$ che si annulla in $x = \frac{1}{2}$ con derivata seconda positiva individuando un punto di minimo locale (su ∂E_2!). Abbiamo quindi il candidato $(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ con valore

- $f(\frac{1}{2},\frac{5}{4}) = \frac{5}{2}$.

Confrontando i valori assunti nei punti candidati, notiamo che $\min_E f = \frac{5}{2}$ e $\max_E f = \frac{7}{2}$.

Esercizio 2.6. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = xy^2 + 5xy - 8y^2 - 40y$$

determinarne i punti critici e la loro natura.

Determinare inoltre gli eventuali punti di estremo vincolato della funzione f ristretta all'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 2\right\}.$$

Verificare se f assume massimo e minimo assoluto su E (si chiedono i punti di estremo, non il valore assunto!).

Calcoliamo gradiente ed hessiana della funzione f:

$$\nabla f(x,y) = (y^2+5y\,,\ 2xy+5x-16y-40)\,,$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y+5 \\ 2y+5 & 2x-16 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo dove si annulla il gradiente:

$$\begin{cases} y(y+5)=0 \\ 2xy+5x-16y-40=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=0 \\ x=8 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y=-5 \\ x=8 \end{cases}$$

e valutiamo la matrice hessiana in questi punti:

$$H_f(8,0)=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(8,-5)=\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concludiamo quindi che i punti sono entrambi di sella essendo negativi i determinanti delle due matrici.

Passiamo ora allo studio di f ristretto ad E, insieme chiuso e non limitato: è un'iperbole equilatera. Notiamo che i valori assunti dalla funzione f su E possono essere espressi rispetto alla sola variabile y:

$$g(y)=f(x,y)|_{xy=2}=2y+10-8y^2-40y=-8y^2-38y+10\,, \quad y\neq 0\,.$$

Poiché $g'(x)=-16y-38$ si annulla per $y=-\frac{19}{8}$ con derivata seconda negativa troviamo che il punto $(-\frac{16}{19},-\frac{19}{8})$ è punto di massimo locale di f ristretta ad E (si noti che la consegna non chiede il valore assunto). Facilmente notiamo inoltre che

$$\lim_{\substack{y\to\pm\infty \\ (x,y)\in E}} f(x,y)=\lim_{y\to\pm\infty} g(x)=-\infty$$

quindi $f|_E$ non ammette minimo assoluto. Invece

$$\lim_{\substack{x\to\pm\infty \\ (x,y)\in E}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} g(x)=0\,,$$

che porta a concludere che $f|_E$ ammette massimo assoluto nel punto $(-\frac{16}{19},-\frac{19}{8})$ precedentemente individuato.

2.2 A.A. 2019/2020

Esercizio 2.7. *Classificare i punti critici della funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y)=2y^2-2y(\sin x+\cos x)+\sin(2x)\,.$$

Disegnare l'insieme

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, |x|\leq\pi\,,\, |xy|\leq 1\right\}$$

e determinare, se esistono,

$$\min_{\mathbb{R}^2} f \quad , \quad \max_{\mathbb{R}^2} f \quad ; \quad \min_{E} f \quad , \quad \max_{E} f\,.$$

Dopo aver notato che la funzione è di classe almeno C^2, calcoliamo gradiente e matrice hessiana:

$$\nabla f(x,y)=\big(-2y\cos x+2y\sin x+2\cos(2x)\,,\, 4y-2(\sin x+\cos x)\big)$$

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2y\sin x+2y\cos x-4\sin(2x) & -2\cos x+2\sin x \\ -2\cos x+2\sin x & 4 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo i punti in cui si annulla il gradiente risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \cos(2x)=y(\cos x-\sin x) \\ y=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos(2x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x) \\ y=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{3}{2}\cos(2x)=0 \\ y=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ y=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x) \end{cases}$$

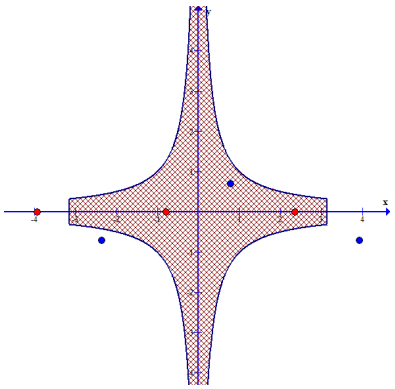


Figura 2: Vedi Esercizio 2.7.

da cui troviamo i punti candidati

$$\left(\tfrac{1}{4}\pi + 2k\pi\,,\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \left(\tfrac{3}{4}\pi + 2k\pi\,,\,0\right),\quad \left(\tfrac{5}{4}\pi + 2k\pi\,,\,-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \left(\tfrac{7}{4}\pi + 2k\pi\,,\,0\right).$$

In corrispondenza di questi punti valutiamo la matrice hessiana:

$$H_f\left(\tfrac{1}{4}\pi + 2k\pi\,,\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} H_f\left(\tfrac{3}{4}\pi + 2k\pi\,,\,0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$
$$H_f\left(\tfrac{5}{4}\pi + 2k\pi\,,\,-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} H_f\left(\tfrac{7}{4}\pi + 2k\pi\,,\,0\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $\left(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sono punti di sella essendo il determinante della matrice hessiana negativo in questi punti. Gli altri presentano determinante positivio, quindi dal segno della traccia segue che i punti $\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\,,\,0\right)$ e $\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\,,\,0\right)$ sono tutti minimi locali stretti con valore

- $f\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\,,\,0\right) = f\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\,,\,0\right) = -1\,.$

La funzione è periodica di periodo 2π nella x e limitata inferiormente, ma non superiormente, infatti

$$2y^2 - 4y - 1 \le f(x,y) \le 2y^2 + 4y + 1\,.$$

Quindi un eventuale minimo sarà raggiunto ad esempio nell'insieme $[0,2\pi]\times\mathbb{R}$. Poiché $\lim_{|y|\to+\infty} 2y^2-4y-1 = +\infty$ allora la funzione f ammetterà minimo (infatti ogni successione che tende a $\inf_{[0,2\pi]\times\mathbb{R}} f$ sarà contenuta in un insieme limitato, quindi compatto e ammetterà una sottosuccessione convergente ad un punto che sarà punto di minimo). Quindi vale $\min_{\mathbb{R}^2} f = -1$.

L'insieme E è chiuso ma non limitato, infatti contiene l'asse y. Inoltre la funzione $g(y) = f(0,y) = 2y^2 - 2y$ è superiormente illimitata, quindi la funzione non ammette massimo su E. Notiamo poi che il minimo globale di f viene raggiunto in un punto appartenente ad E, quindi $\min_E f = -1$.

Esercizio 2.8. *Determinare la continuità e differenziabilità di $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ al variare di $\beta\in\mathbb{R}$:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(y+1)-y^2(y-1)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\,, \\ \beta & (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

Innanzitutto, per ogni valore di $\beta\in\mathbb{R}$, avremo che f sarà continua e differenziabile almeno in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ prevedendo che le derivate parziali di f saranno rapporti tra polinomi, quindi funzioni continue che permetteranno di applicare il teorema del differenziale totale.

Notiamo che $f(x,0) = 1$ per ogni $x\neq 0$, quindi la funzione f non è continua se $\beta\neq 1$. Quindi consideriamo da qui in avanti solo il caso $\beta = 1$. Per verificare la continuità in questo caso dobbiamo mostrare che

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) - 1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - y^3}{x^2+y^2}\,.$$

La tesi segue dalle seguenti maggiorazioni

$$\left|\frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{x^2|y|+y^2|y|}{x^2+y^2} = |y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\,.$$

Calcoliamo le derivate parziali nell'origine:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-1}{t} = 0\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(1-t)-1}{t} = -1\,.$$

La funzione non è differenziabile, infatti dalla stima

$$\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{\frac{x^2(y+1)-y^2(y-1)}{x^2+y^2}-1-(0,-1)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|$$

notiamo che ponendo $(x,y)=(t,t)$ — ovvero considerando la restrizione sulla retta $y=x$ — troviamo la funzione $\frac{2t^3}{|t|^3}$ che non ammette limite in zero.

Esercizio 2.9. *Data la funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y,z) = \frac{e^{xy}\,z}{1+z^2}\,,$$

studiare il carattere dei suoi punti critici. Quindi individuare minimo e massimo di f sull'insieme

$$E = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 2\right\}.$$

Dopo aver notato che la funzione è di classe almeno C^2 su $\mathbb{R}^3$, calcoliamo il gradiente e la matrice hessiana:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(y\mathrm{e}^{xy}\frac{z}{1+z^2}\,,\, x\mathrm{e}^{xy}\frac{z}{1+z^2}\,,\, \mathrm{e}^{xy}\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}\right),$$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2\mathrm{e}^{xy}\frac{z}{1+z^2} & (1+xy)\mathrm{e}^{xy}\frac{z}{1+z^2} & y\mathrm{e}^{xy}\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} \\ (1+xy)\mathrm{e}^{xy}\frac{z}{1+z^2} & x^2\mathrm{e}^{xy}\frac{z}{1+z^2} & x\mathrm{e}^{xy}\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} \\ y\mathrm{e}^{xy}\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} & x\mathrm{e}^{xy}\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} & \mathrm{e}^{xy}\frac{2z(z^2-3)}{(1+z^2)^3} \end{pmatrix}$$

Per trovare i punti dove si annulla il gradiente dobbiamo risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} yz=0 \\ xz=0 \\ 1-z^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz=0 \\ xz=0 \\ z=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y0 \\ x=0 \\ z=\pm 1 \end{cases}$$

e poi valutare la matrice hessiana nei punti trovati

$$H_f(0,0,\pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm\frac{1}{2} & 0 \\ \pm\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda il punto $(0,0,1)$ abbiamo l'autovalore $-\frac{1}{2}$ e un determinante positivo, quindi i possibili segno degli autovalori sono $+++$ oppure $+--$. Ne consegue che l'unica alternativa possibile è la seconda. Siamo quindi in presenza di un punto di sella. Per quanto riguarda il punto $(0,0,-1)$ abbiamo l'autovalore $\frac{1}{2}$ e un determinante negativo, quindi i possibili segno degli autovalori sono $-++$ oppure $---$. Ne consegue che l'unica alternativa possibile è la prima. Siamo quindi in presenza di un altro punto di sella. Non abbiamo quindi candidati punti di minimo o massimo locale per f.

Passiamo ora allo studio di massimo e minimo su E. Osserviamo innanzitutto che E non è limitato, ma è chiuso. Tuttavia applicando il teorema di Weierstrass la funzione e^{xy} ammette massimo sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 2\}$, che chiamiamo M. Quindi abbiamo

$$|f(x,y,z)| \le M \left|\frac{z}{1+z^2}\right| \overset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

La funzione f è quindi limitata su E. Cerchiamo i punti di estremo locale su $\partial E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=2\}$ adottando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} ye^{xy}\frac{z}{1+z^2} = \lambda x \\ xe^{xy}\frac{z}{1+z^2} = \lambda y \\ e^{xy}\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} = 0 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \pm\frac{1}{2}ye^{xy} = \lambda x \\ \pm\frac{1}{2}xe^{xy} = \lambda y \\ z = \pm 1 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$$

e sostituendo $\mu = \pm 2\lambda$ troviamo

$$\begin{cases} ye^{xy} = \mu x \\ xe^{xy} = \mu y \\ z = \pm 1 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ye^{xy} = \mu e^{-xy}\mu y \\ xe^{xy} = \mu y \\ z = \pm 1 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y(e^{2xy}-\mu^2) = 0 \\ xe^{xy} = \mu y \\ z = \pm 1 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$$

di cui distinguo i casi $y = 0$ e $e^{xy} = \pm\mu$, di cui il primo, notiamo, non porta a soluzioni:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = \pm 1 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} e^{xy} = \pm\mu \\ x = \pm y \\ z = \pm 1 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$$

Il sistema a destra porta alle soluzioni elencate qui sotto, di cui calcoliamo subito i valori

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= \tfrac{e}{2} & f(1,1,-1) &= -\tfrac{e}{2} \\ f(1,-1,1) &= \tfrac{1}{2e} & f(1,-1,-1) &= -\tfrac{1}{2e} \\ f(-1,1,1) &= \tfrac{1}{2e} & f(-1,1,-1) &= -\tfrac{1}{2e} \\ f(-1,-1,1) &= \tfrac{e}{2} & f(-1,-1,-1) &= -\tfrac{e}{2} \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che f ha minimo $-\frac{e}{2}$ e massimo $\frac{e}{2}$.

Esercizio 2.10. *Della seguente funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ determinare i punti del dominio in cui è continua e quelli in cui è differenziabile.*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0)\,, \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0)\,. \end{cases}$$

Consideriamo un punto diverso dall'origine. In questo caso la funzione è continua e differenziabile, infatti possiamo calcolare le derivate parziali facilmente usando le usuali regole di derivazione e notare che anche queste sono continue nei punti diversi dall'origine (calcolare per esercizio il gradiente di f). Quindi usando il teorema del differenziale totale, notiamo che la funzione è differenziabile in ogni punto diverso dall'origine.

Studiamo ora la continuità di f nell'origine. Essa è conseguenza immediata delle seguenti stime:

$$\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| \le \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{x^2+y^2+z^2} = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \overset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\longrightarrow} 0$$

dove abbiamo usato che

$$\max\{|x|,|y|,|z|\} = \|(x,y,z)\|_\infty \le \|(x,y,z)\|_2 = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}\,.$$

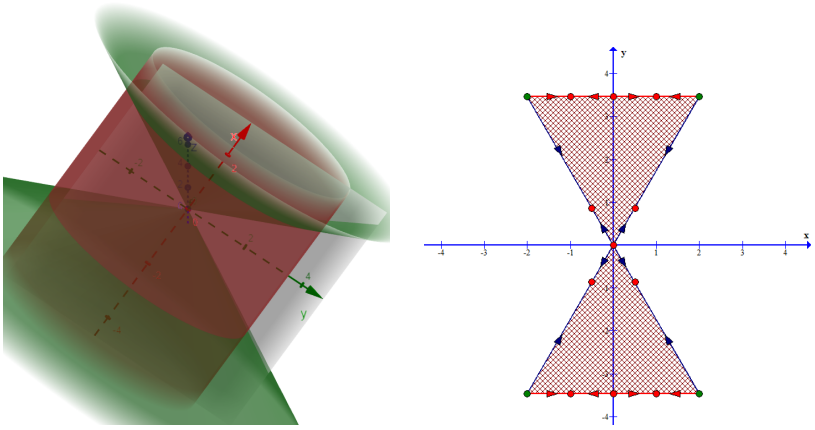


Figura 3: Vedi Esercizio 2.11. A sinistra una visualizzazione dell'insieme E considerare la regione interna al cilindro rosso *esterna* al cono verde. Esso è ottenuto mediante una rotazione completa attorno all'asse x dell'insieme nella figura a destra. Gli insiemi F_1, F_2 ed F_3 sono ottenuti ruotando i sottinsiemi colorati rispettivamente in blu, rosso e verde. Inoltre dato un punto della figura a destra, la funzione f assume lo stesso valore nei punti della circonferenza ottenuta ruotando tale punto attorno all'asse x.

Notiamo che $f(x,0,0) = f(0,y,0) = f(0,0,z) = 0$ da cui segue

$$\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)\,.$$

Quindi per studiare la differenziabilità di f dobbiamo controllare se il seguente limite dà valore zero:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} - 0 - \langle (0,0,0)\,,\,(x,y,z)\rangle}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,.$$

Tale limite non fa zero, infatti se ci avviciniamo all'origine lungo la semiretta $r(t) = (t,t,t)$, $t>0$ troviamo

$$\left.\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right|_{(x,y,z)=(t,t,t)} = \frac{t^3}{|t|^3} \xrightarrow{t\to 0^+} = 1 \neq 0\,.$$

Concludiamo quindi che la funzione f è continua ma non differenziabile nell'origine.

Esercizio 2.11. *Dato l'insieme*

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 \leq y^2+z^2 \leq 12\right\}$$

e la funzione $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definita come* $f(x,y,z) = x^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)}$*, determinare massimo e minimo di* f *su* E *e i punti in cui questi sono raggiunti.*

La funzione è di classe almeno C^2, ne calcoliamo il gradiente:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2x(1-x^2)\,,\,-2x^2y\,,\,-2x^2z\right)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

I punti in cui si annulla il gradiente sono:

$$(0,y,z)\,,\ \text{con}\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\,,\quad (\pm 1,0,0)\,.$$

Di questi, appartengono all'insieme E i punti $(0,y,z)$ con $y^2+z^2 \leq 12$ e qui la funzione vale zero.

L'esercizio diventa più semplice notando le simmetrie della funzione e dell'insieme, trovarle per esercizio.

La frontiera di E può essere così descritta:

$$\begin{aligned}\partial E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 3x^2 = y^2+z^2\,, |x|<2\}&\\ \cup\,\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2 = 12\,,\,|x|<2\}&\\ \cup\,\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2 = 12\,,\,|x|=2\}\cup\{0,0,0\}\,.&\end{aligned}$$

Sul sottinsieme della frontiera $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 = y^2+z^2\,, |x| < 2\}$ abbiamo, usando l'identità $3x^2 = y^2+z^2$:

$$f(x,y,z) = x^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)} = x^2 e^{-4x^2}\,.$$

Consideriamo quindi la funzione $g : (-2,2) \to \mathbb{R}$, definita come $g(x) = x^2 e^{-4x^2}$. Troviamo

$$g'(x) = 2x(1-4x^2)e^{-4x^2}$$

che si annulla per $x = 0, \pm\frac{1}{2}$, dove la funzione assume i valori

$$g(0) = 0\,, \qquad g(\pm\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4e}\,.$$

In modo analogo possiamo considerare il pezzo di frontiera $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2 = 12\,, |x| < 2\}$. In questi punti abbiamo:

$$f(x,y,z) = x^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)} = x^2 e^{-(x^2+12)}\,.$$

La funzione $h : (-2,2) \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 e^{-(x^2+12)}$ ha derivata

$$h'(x) = 2x(1-x^2)e^{-(x^2+12)}$$

che si annulla per $x = 0, \pm 1$. Troviamo

$$h(0) = 0\,, \qquad h(\pm 1) = e^{-13}\,.$$

Infine nei punti di $F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2 = 12\,, |x| = 2\}$ la funzione vale sempre $4e^{-16}$.

Dei candidati trovati il valore minimo è 0, il massimo è $(4e)^{-1}$. Troviamo quindi che f ha minimo zero (non è sorprendente visto che la funzione f è non negativa) e ha massimo $(4e)^{-1}$. Essi sono raggiunti nei punti:

$$f|_E^{-1}(0) = \{(x,y,z) \in E \mid x = 0\}\,,$$
$$f|_E^{-1}(\tfrac{1}{4e}) = \{(x,y,z) \in E \mid x = \pm\tfrac{1}{2}\,,\ x^2+y^2 = \tfrac{3}{4}\}\,.$$

Esercizio 2.12. *Della seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ discutere continuità e differenziabilità in $O = (0,0)$:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin^2 x\, \dfrac{x-y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Discutere dal punto di vista puramente teorico (ovvero senza fare i calcoli) la procedura da adottare per dimostrare continuità e differenziabilità della stessa funzione negli altri punti del suo dominio.

Notiamo che, se conoscessimo la validità del seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\, \frac{x-y}{x^2+y^2} = 0$$

allora avremmo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin^2 x\, \frac{x-y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, x^2\, \frac{x-y}{x^2+y^2} = 1\cdot 0 = 0\,.$$

Mostriamo la validità del primo limite con le seguenti maggiorazioni

$$\left| x^2\, \frac{x-y}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{x^2}{x^2+y^2}\,(|x|+|y|) \leq |x|+|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\,.$$

La funzione f quindi è continua nell'origine. Calcoliamo le derivate parziali nell'origine:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin^2 t}{t} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t}{t^2} = 1\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0\,.$$

Dobbiamo controllare se il seguente limite vale zero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2 x\, \frac{x-y}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

La risposta è no, infatti ponendoci sulla semiretta $r(t) = (t,t)$, $t > 0$, troviamo

$$\left.\frac{\sin^2 x\, \frac{x-y}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(x,y)=(t,t)} = -\frac{t}{|t|} = -1\,.$$

La funzione quindi non è differenziabile nell'origine.

Per la seconda parte dell'esercizio, ragioniamo come segue. La funzione è continua e differenziabile, infatti possiamo calcolare le derivate parziali facilmente usando le usuali regole di derivazione e notare che anche queste sono continue nei punti diversi dall'origine (calcolare per esercizio il gradiente $\mathrm{d}\, f$). Quindi usando il teorema del differenziale totale, notiamo che la funzione è differenziabile in ogni punto diverso dall'origine.

Esercizio 2.13. *Classifica i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x,y) = y^3 - x^2 y - y^2 + x^2$. Disegna l'insieme*

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le 2 - y \le 4\right\}$$

e determina massimo e minimo della funzione f su E e i punti in cui sono raggiunti.

Calcoliamo il gradiente della funzione

$$\nabla f(x,y,z) = (-2xy + 2x\,,\, 3y^2 - x^2 - 2y)$$

e cerchiamo dove si annulla (scrivere per esercizio i calcoli). Troviamo i punti

$$(0,0)\,,\quad (0,\tfrac{2}{3})\,,\quad (1,\pm 1)\,.$$

Calcoliamo la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2y & -2x \\ -2x & 6y-2 \end{pmatrix}$$

e la valutiamo nei punti critici trovati precedentemente e troviamo

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad H_f(0,\tfrac{2}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H_f(\pm 1,1) = \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 4 \end{pmatrix}$$

che ci permette di concludere che $(0,\frac{2}{3})$ è un punto di minimo locale con valore

- $f(0,\frac{2}{3}) = -\frac{4}{27}$,

mentre gli altri sono punti di sella.

Passiamo ora allo studio di massimo e minimo su E. La frontiera di E si può scrivere come

$$\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 - x^2\,,\, |x| < 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2\,,\, |x| < 2\} \cup \{(\pm 2, -2)\}\,.$$

Valutiamo innanzitutto la funzione f nei punti $(\pm 2, -2)$:

- $f(\pm 2, -2) = 0$.

Consideriamo ora i punti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 - x^2\,,\, |x| < 2\}$, per i quali troviamo che vale

$$f(x,y) = y^3 - 3y + 2\,,\quad y \in [-2,2]\,.$$

Ha senso considerare la funzione $g : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $g(y) = y^3 - 3y + 2$ con derivata $g'(y) = 3(y^2 - 1)$ che si annulla per $y = \pm 1$. Quindi i candidati estremi sono $(\pm 1, 1)$ e $(\pm\sqrt{3}, -1)$ per cui troviamo:

- $f(\pm 1, 1) = 0$, - $f(\pm\sqrt{3}, -1) = 4$.

Dobbiamo ricordarci di aggiungere come candidato il valore assunto per $y = 2$:

- $f(0,2) = 4$.

Invece, se consideriamo i punti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2\,,\ |x| < 2\}$ troviamo

$$f(x,y) = 3x^2 - 12$$

Qui ha senso considerare la funzione $h : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^2 - 12$ con minimo in $x = 0$. Abbiamo quindi l'ultimo candidato $(0,-2)$ con valore

- $f(0,-2) = -12$.

Quindi la funzione f, ristretta ad E ha massimo 4 e minimo -12.

Esercizio 2.14. *Disegna l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{3x} \le y \le e^{2x}\,,\ |x| \le 5\}$ e determina, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita come $f(x,y) = e^{3x - \ln y}$.*

Il disegno è omesso.

Riscriviamo la funzione come $f(x,y) = e^{3x}/y$. Notiamo che il gradiente è sempre non nullo:

$$\nabla f(x,y) = \left(3\frac{e^{3x}}{y}\,,\ -\frac{e^{3x}}{y^2}\right).$$

Quindi non abbiamo punti critici all'interno di A. Notiamo inoltre che E è chiuso e limitato. In particolare abbiamo $E \subseteq [-5,0] \times (0,1]$.

Consideriamo quindi il bordo ∂E. Esso è costituito da tre curve di equazioni $\gamma_1 : y = e^{3x}$, $\gamma_2 : y = e^{2x}$, $\gamma_3 : x = -5$. La restrizione di f a queste risulta, nell'ordine,

$$\begin{aligned} f|_{\gamma_1}(x,y) &= f(x, e^{3x}) = 1\,, \\ f|_{\gamma_2}(x,y) &= f(x, e^{2x}) = e^{x}\,, \\ f|_{\gamma_3}(x,y) &= f(-5, y) = e^{-15}/y\,. \end{aligned}$$

La prima è una funzione costante, le altre sono funzioni monotone, quindi non troviamo punti di estremo su queste. Sono invece da considerare tutti i punti della prima curva. Restano da considerare gli "spigoli" di ∂E:

$$f(-5\,,\, e^{-15}) = 1\,, f(-5\,,\, e^{-10}) = e^{-5}\,, f(0,1) = 1\,,$$

da cui deduciamo che $\max_E f = 1$ e $\min_E f = e^{-5}$.

Esercizio 2.15. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x,y,z) = 2xyz$ e l'insieme*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3\,,\ xy = z\}\,,$$

i. determinare per quali punti di E non è possibile applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange al fine di determinare i massimi e minimi di f su E;

ii. determinare massimo e minimo di f su E, con metodo a piacere.

Si noti che l'insieme E ha interno vuoto ed è intersezione delle due superfici individuate dalle equazioni date. Ci aspettiamo quindi un oggetto simile ad una curva, o più curve.

Non possiamo applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange se il rango della matrice Jacobiana della funzione che descrive i vincoli non è massimo. Abbiamo, scrivendolo in modo comodo per i calcoli successivi, il vincolo

$$F(x,y,z) = \left(\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \tfrac{3}{2}\,,\ xy - z\right) = (0,0)$$

con matrice Jacobiana

$$J_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & -1 \end{pmatrix}.$$

Essa non ha rango massimo se tutte le sottomatrici 2x2 hanno determiante nullo.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x + yz = 0 \\ y + xz = 0 \end{cases}$$

Da cui abbiamo la seguente possibilità $x = \pm y$, quindi

$$\begin{cases} x = y \\ x(1+z) = 0 \\ x(1+z) = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -y \\ x(1-z) = 0 \\ x(1-z) = 0 \end{cases}$$

Dal primo sistema otteniamo i punti del tipo $(0,0,z)$ oppure $(x,x,-1)$, dal secondo i punti del tipo $(0,0,z)$ oppure $(x,-x,1)$. Notiamo che nessuno dei punti può appartenere all'insieme E

$$\begin{aligned} &(0,0,z) \in E \Rightarrow z = xy = 0 \Rightarrow 0 = x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \lightning, \\ &(x,x,-1) \in E \Rightarrow -1 = z = xy = x^2 \quad \lightning, \\ &(x,-x,1) \in E \Rightarrow 1 = z = xy = -x^2 \quad \lightning. \end{aligned}$$

Possiamo applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange in ogni punto di E.

Passiamo alla ricerca di massimo e minimo su E, proprio usando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Dobbiamo risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} yz = \lambda x + \mu y \\ xz = \lambda y + \mu x \\ xy = \lambda z - \mu \\ xy = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Sommiamo le prime due equazioni ottenendo il nuovo sistema equivalente

$$\begin{cases} (x+y)(z - \lambda - \mu) = 0 \\ xz = \lambda y + \mu x \\ xy = \lambda z - \mu \\ xy = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

da cui separiamo i due casi

$$\begin{cases} x = -y \\ \dots \\ \dots \\ -x^2 = z \\ 2x^2 + x^4 = 3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} z = \lambda + \mu \\ \lambda(x-y) = 0 \\ xy = \lambda z - \mu \\ xy = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Dal primo sistema ricaviamo, nell'ultima equazione $x = \pm 1$ da cui i punti $(1,-1,-1)$ e $(-1,1,-1)$. Dal secondo sistema distiguiamo i due casi $\lambda = 0$ e $x = y$

$$\begin{cases} z = \lambda + \mu \\ x = y \\ \dots \\ x^2 = z \\ 2x^2 + z^4 = 3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} z = \mu \\ \lambda = 0 \\ xy = -\mu \\ xy = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Dal primo sistema, in modo analogo a quanto fatto prima troviamo i punti $(1,1,1)$ e $(-1,-1,1)$, mentre dal secondo notiamo che la terza e la quarta equazione portano a $z = -\mu$, che unita alla prima ci dà $z = \mu = 0$. Quindi $xy = 0$ unito a $x^2 + y^2 = 3$ ci dà i punti $(\pm\sqrt{3}, 0, 0)$ e $(0, \pm\sqrt{3}, 0)$.

Concludiamo che abbiamo trovato 8 candidati con valori:

$$f(\pm 1, \pm 1, 1) = 2\,, \quad f(\pm 1, \mp 1, -1) = 2\,, \quad f(\pm\sqrt{3}, 0, 0) = 0\,, \quad f(0, \pm\sqrt{3}, 0) = 0\,.$$

Quindi $\min_E f = 0$ e $\max_E f = 2$.

Nota: se invece consideriamo l'insieme

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 9\,,\, xy = z\}\,,$$

il procedimento è molto simile, ma fissato $\eta = \sqrt{\sqrt{10} - 1}$, troveremo nell'ordine i seguenti candidati: dapprima $(\eta, -\eta, \eta^2)$ e $(-\eta, +\eta, \eta^2)$, poi (η, η, η^2) e $(-\eta, .\eta, \eta^2)$, infine i punti $(\pm 3, 0, 0)$ e $(0, \pm 3, 0)$.

2.3 A.A. 2020/2021

Esercizio 2.16. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{|x| + |y|} \arctan x & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

dire in quali punti è continua e in quali punti è differenziabile.

Per esercizio scrivere i passaggi che nella seguente spiegazione sono introdotti con *si vede facilmente* o espressioni analoghe. Si noti che

$$\frac{x^2 - y^2}{|x| + |y|} = \frac{(|x| + |y|)(|x| - |y|)}{|x| + |y|} = |x| - |y|\,.$$

Provare a risolvere l'esercizio anche senza usare questo trucco.

Per provare la continuità e la differenziabilità nell'origine *si ragiona facilmente* come nell'Esercizio 2.12 e situazioni simili, quindi non ne scrivo i dettagli. Invece, data la presenza dei valori assoluti, bisogna studiare se f è differenziabile nei punti $(0, y_0)$ e $(x_0, 0)$ dove $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$. In questi punti *si vede facilmente* che la funzione è continua.

Partiamo con analizzare i punti $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$. Essendo $f(0, y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ abbiamo facilmente $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = 0$, mentre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, y_0) - f(0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(|h| - |y_0|) \arctan h}{h} = -|y_0|\,.$$

Quindi per discutere la differenziabilità di f in questo punto dobbiamo controllare se il seguente limite dà risultato zero:

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(h, y_0 + k) - f(0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

che diventa, visti i calcoli precedenti

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{(|h| - |y_0 + k|) \arctan h + |y_0| h}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

che *si semplifica facilmente* in

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{-|k + y_0| \arctan h + |y_0| h}{\sqrt{h^2 + k^2}}\,.$$

Aggiungiamo e sottraiamo $|y_0| \arctan h$ e troviamo

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} (|y_0| - |k + y_0|) \frac{\arctan h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |y_0| \frac{h - \arctan h}{\sqrt{h^2 + k^2}}\,,$$

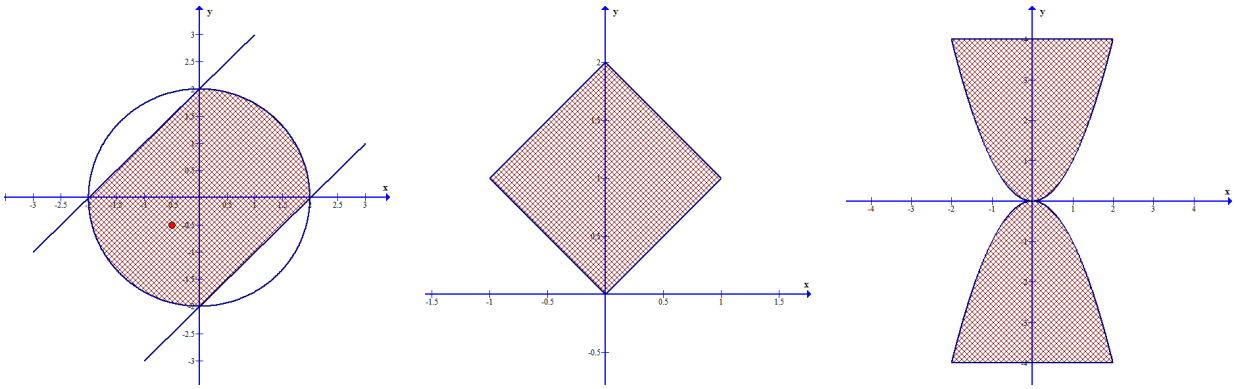


Figura 4: A sinistra, Esercizio 2.17: viene mostrato il disegno dell'insieme A. Al centro l'insieme dell'Esercizio 2.19. A destra quello dell'Esercizio 2.21.

dove il primo addendo va a zero facilmente, mentre per il secondo usiamo che $\lim \frac{h-\arctan h}{h^3} \in \mathbb{R}$, dove il valore del limite è suggerito dal coefficiente del termine di terzo grado del polinomio di Taylor di grado 3 dell'arcotangente (individuarlo per esercizio).

Passiamo ora ad analizzare i punti $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$. In questo caso il seguente limite non esiste

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,h)-f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(|x_0|-|h|)\arctan x_0 - |x_0|\arctan x_0}{h} = \lim_{h\to 0} -\arctan x_0 \frac{|h|}{h}\,.$$

Da ciò concludiamo che f non è differenziabile in questi punti.

Esercizio 2.17. *Data la funzione $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definita come $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+x+y+z$. Calcolare $\min_E f$ e $\max_E f$ (e i punti in cui questi valori vengono assunti), dove*

$$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2\le 4\,,\, |x-y|\le 2\le z\le 3\}\,.$$

Notiamo che il gradiente di f risulta

$$\nabla f = (2x+1, 2y+1, 2z+1) \neq (0,0,0)\,, \quad \forall (x,y,z)\in E\,.$$

Quindi passiamo subito allo studio sul bordo. Dopo aver disegnato l'insieme $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2\le 4\,,\, |x-y|\le 2\}$ che è costituito da due quarti di cerchio nel primo e terzo quadrante e da due triangoli nel secondo e quarto quadrante. Il solido E risulta essere un *cilindro* avente A come base: infatti le condizioni su z sono semplicemente $z\in[2,3]$. Il bordo di E quindi presenta le due facce superiori e inferiori

$$A_1 = \{(x,y,3) \,:\, (x,y)\in A\}\,, \quad A_2 = \{(x,y,2) \,:\, (x,y)\in A\}\,,$$

e le facce laterali

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2=4\,, x\ge 0\,,\, y\ge 0\,,\, z\in[2,3]\}\,,\\
B_2 &= \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2=4\,, x\le 0\,,\, y\le 0\,,\, z\in[2,3]\}\,,\\
B_3 &= \{(x,y,z) \,:\, y=x+2\,, x\in[-2,0]\,,\, z\in[2,3]\}\,,\\
B_4 &= \{(x,y,z) \,:\, y=x-2\,, x\in[0,2]\,,\, z\in[2,3]\}\,.
\end{aligned}$$

Se impostiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange sul vincolo $F_1(x,y,z)=x^2+y^2-4=0$ che contiene gli insiemi B_1 e B_2 troviamo

$$\begin{cases}
2x+1 = 2x\lambda\\
2y+1 = 2y\lambda\\
2z+1 = 0\\
x^2+y^2-4=0
\end{cases}$$

che dà come soluzioni solo punti con $z = -\frac{1}{2}$ che non sono punti di $B_1 \cup B_2$. Quindi non troveremo estremi locali su questi insiemi. Impostando i moltiplicatori di Lagrange sui vincolo $F_2(x,y,z) = x-y+2$ e $F_3(x,y,z) = x-y-2$ arriviamo alla stessa conclusione.

La cosa non deve stupire dato che l'esercizio si può risolvere anche notando che

$$f(x,y,z) = g(x,y) + h(z)$$

e separando la ricerca di massimi e minimi sugli insiemi $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\,,\ |x-y| \le 2\}$ e $B = \{z \in \mathbb{R} : 2 \le z \le 3\}$. Essendo quindi h monotona crescente su B è chiaro che troveremo il massimo di f in E nell'insieme A_1 e il minimo di f in E nell'insieme A_2.

Notando questo dettaglio tutta la trattazione sopra diventa superflua ed è sufficiente studiare la funzione g sull'insieme A.

Concluderemo poi quindi notando che

$$f(x_m,y_m,z_m) = \min_E f = \min_A g + \min_B h = g(x_m,y_m) + h(2)\,.$$

$$f(x_M,y_M,z_M) = \max_E f = \max_A g + \max_B h = g(x_M,y_M) + h(3)\,.$$

Studiamo ora quindi massimi e minimi della funzione $g(x,y) = x^2+x+y^2+y$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\,,\ |x-y| \le 2\}$.

Dall'espressione del gradiente $\nabla g = (2x+1, 2y+1)$, troviamo che esso si annulla in $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e lo studio della matrice Hessiana ci restituisce che è un minimo locale. Il bordo di A è costituito da due segmenti contenuti nelle rette $y = x \pm 2$ (per lo studio della quale si consiglia di sostituire l'espressione della y nella funzione g per ricondursi ad una funzione di una sola variabile), e da due archi della circonferenza $x^2+y^2 = 4$ (per cui si consiglia un passaggio in coordinate polari). Lascio i dettagli per esercizio.

Esercizio 2.18. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^3 - y - |x|\left(\frac{5}{2}x - 6\right),$$

individuare i punti di massimo e minimo locale della funzione (non è necessario fornire il valore assunto). Dimostrare che f è illimitata sia superiormente che inferiormente. Calcolare, se esiste, l'approssimante lineare di f nel punto $(1,0)$. Calcolare, se esiste, il polinomio di Taylor di grado 3 approssimante la funzione f nel punto $(1,0)$.

La presenza del termine $|x|$ nella definizione di f ci porta immediatamente a distinguere il comportamento negli insiemi $E_+ = \{(x,y) \mid x > 0\}$, $E_- = \{(x,y) \mid x < 0\}$, $E_0 = \{(x,y) \mid x = 0\}$. Quindi su E_+ avremo

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^3 - y - \frac{5}{2}x^2 + 6x\,,$$

$$\nabla f(x,y) = \left(x^2 - 5x + 6\,,\ 3y^2 - 1\right),$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) \in \{(2, \pm 3^{-1/2})\,,\ (3, \pm 3^{-1/2})\}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-5 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$H_f(2, \pm 3^{-1/2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pm 6 \cdot 3^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad H_f(3, \pm 3^{-1/2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 6 \cdot 3^{-1/2} \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo un massimo locale in $(2, -3^{-1/2})$ e un minimo locale in $(3, 3^{-1/2})$. Gli altri due sono punti di sella. Su E_- avremo invece

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^3 - y + \frac{5}{2}x^2 - 6x\,,$$

$$\nabla f(x,y) = \left(x^2 + 5x - 6\,,\ 3y^2 - 1\right)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) \in \{(-6, \pm 3^{-1/2})\,,\ (1, \pm 3^{-1/2})\}$$

I punti $(1, \pm 3^{-1/2})$ sono da scartare in quanto non appartengono a E_-, per gli altri scriviamo

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+5 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$H_f(-6, \pm 3^{-1/2}) = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & \pm 6 \cdot 3^{-1/2} \end{pmatrix}$$

da cui troviamo il massimo locale $(-6, -3^{-1/2})$.

Cerchiamo ora i punti di estremo su E_0 (è la parte parte più difficile dell'esercizio). Definiamo $h(y) = y^3 - y$ e $g(x) = \frac{x^3}{3} - |x|\left(\frac{5}{2}x - 6\right)$, cosicché $f(x,y) = g(x) + h(y)$. Notiamo dapprima che

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} - |x|\left(\frac{5}{2}x - 6\right)}{|x|} = 6\,.$$

Quindi esiste $\delta > 0$ tale che se $|x| \le \delta$ allora $g(x) \ge 5|x| \ge 0$. Quindi

$$f(0,y) = h(y) \le g(x) + h(y) = f(x,y)$$

per ogni $(x,y) \in \{(x,y) \mid |x| \le \delta\}$.

Quindi ha senso cercare minimi locali per f in quanto *staccandoci dall'asse $x = 0$ il grafico di f sale.* Osserviamo che h ha estremi in $y = \pm 3^{-1/2}$. In particolare un minimo locale per $y = 3^{-1/2}$ e un massimo locale in $y = -3^{-1/2}$. Quindi possiamo concludere che $(0, 3^{-1/2})$ è un minimo locale per f.

Per dimostrare che f è illimitata basta notare che è illimitata lungo la retta $y = 0$, ovvero $f(0,y) = y^3 - y$ (superiormente e inferiormente). Calcoliamo l'approssimante lineare $\ell(x,y)$ in $(1,0)$:

$$\ell(x,y) = f(1,0) + \langle \nabla f(1,0)\,,\,(x-1,y)\rangle = \frac{23}{6} + \langle (2,-1)\,,\,(x-1,y)\rangle = \frac{23}{6} + 2x - 2 - y = \frac{11}{6} + 2x - y\,.$$

La funzione f in un intorno di $(1,0)$ è un polinomio di grado 3, quindi banalmente il polinomio di grado 3 richiesto è semplicemente

$$\frac{x^3}{3} + y^3 - y - \frac{5}{2}x^2 + 6x\,.$$

Esercizio 2.19. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come $f(x,y) = x|y-1| + x^2 - \frac{1}{2}x$ determinare in quali punti è differenziabile e in quali non lo è (motivare la risposta in modo adeguato e completo). Trovare massimo e minimo della funzione f nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 2 - y\,,\, |x| \le y\}$.*

Per ogni punto (x,y) con $y \neq 1$ possiamo trovare un intorno in cui la funzione è espressa da un polinomio. Quindi f è differenziabile in tutti i punti di questo tipo. Consideriamo quindi punti del tipo $(x,1)$. Osserviamo che $f(x,1) = x^2 - \frac{1}{2}x$. Quindi sarà possibile calcolare sempre la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = 2x - \frac{1}{2}$. Calcoliamo quindi l'altra derivata parziale

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,1+h) - f(x,1)}{h} = \lim_{h\to 0} x\,\frac{|h|}{h}.$$

Se $x \neq 0$ il limite non esiste. Se $x = 0$ invece il limite esiste e vale zero. Concludiamo quindi che f non è differenziabile nei punti $(x,1)$ con $x \neq 0$. Resta da considerare il caso $(x,y) = (0,1)$ che ammette l'esistenza delle derivate parziali. Dobbiamo vedere se il seguente limite dà risultato zero:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k+1) - f(0,1) - \langle \nabla f(0,1)\,,\,(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

osservando che $f(0,1) = 0$, $\nabla f(0,1) = (-\frac{1}{2}, 0)$. Otteniamo quindi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h|k| + h^2 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h|k| + h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

in cui si possono usare le maggiorazioni $|k| \le \sqrt{h^2+k^2}$ e $|h| \le \sqrt{h^2+k^2}$ per ottenere

$$\left| \frac{h|k| + h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \le \big|h + |h|\big| .$$

La funzione f è quindi differenziabile in $(0,1)$.

Per quanto riguarda la ricerca di massimi e minimi locali in A la risoluzione completa è lasciata per esercizio, ne dò solo un accenno. L'insieme A ha come bordo un quadrato di vertici

$$(0,0)\,, \quad (1,1)\,, \quad (0,2)\,, \quad (-1,1)\,.$$

Lo studio sul bordo si può fare per sostituzione scrivendo le equazioni delle rette ed è omesso. Per lo studio dell'esistenza di massimi e minimi interni è opportuno studiare separatamente i casi $y > 1$ e $y < 1$ come fatto nell'esercizio precedente: lo studio di gradiente e matrice hessiana porterà a trovare dei punti di sella in $(0, \frac{3}{2})$ e $(0, \frac{1}{2})$. Lungo la retta $y = 1$ si può trovare un minimo locale in $(\frac{1}{4}, 1)$. Infatti lungo tale retta dobbiamo studiare la funzione

$$f(x,1) = g(x) = x^2 - \tfrac{1}{2}x$$

che presenta un minimo locale in $x = \frac{1}{4}$. In un intorno del punto $(\frac{1}{4}, 1)$ notiamo che

$$f(x,y) = x|y-1| + x^2 - \tfrac{1}{2}x \ge x^2 - \tfrac{1}{2}x = f(x,1)\,.$$

Anche qui, come nell'esercizio precedente, notiamo che *staccandoci dalla retta $y = 1$ il grafico di f sale.*

Concludo con questa osservazione: si poteva introdurre il cambio di variabile $Y = y - 1$ che avrebbe portato allo studio della funzione $\tilde{f}(x,Y) = x|Y| + x^2 - \frac{1}{2}x$ sull'insieme $\tilde{A} = \{(x,Y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \le 1 - Y\,, |x| \le Y + 1\}$ simmetrico rispetto all'asse delle x. La funzione $\tilde{f}$ risulta pari rispetto alla variabile Y. Naturalmente anche la funzione f presenta una simmetria rispetto alla retta $y = 1$.

Esercizio 2.20. *Classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita come*

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - x - 1\,.$$

Consideriamo la restrizione $f|_A : A \to \mathbb{R}$ della funzione precedente all'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - y^2 = 0\}\,.$$

Trovare, se esistono, massimi e minimi locali della funzione $f|_A$. Essa è limitata su A?

Esercizio 2.21. *Data la funzione $f(x,y) = x^2 + y - xy$, deteriminare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione f nell'insieme*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 \le |y| \le 4\}\,.$$

Dire in quali punti tali valori sono raggiunti. Disegna A.

2.4 A.A. 2021/2022

Esercizio 2.22. *Dimostra che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x| + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua nel suo dominio. Dimostra che non è differenziabile nell'origine. Dimostra che è differenziabile in ogni altro punto del dominio.

Esercizio 2.23. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } y > x \\ x^3 - x + 2y & \text{se } y \le x \end{cases}$$

determina in quali punti è continua e in quali punti è differenziabile.

Determina, se esistono, massimo e minimo della funzione sull'insieme $Q = [-2,2] \times [-2,2]$.

La seguente risoluzione conterrà molti dettagli che non erano pretesi in sede di esame scritto, ma saranno comunque esposti per maggior chiarezza e completezza.

Riscriviamo la funzione f come

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) & \text{se } y > x \\ f_2(x,y) & \text{se } y \leq x \end{cases}$$

dove abbiamo introdotto le funzioni $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite come

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad f_2(x,y) = x^3 - x + 2y\,.$$

Calcoliamo facilmente

$$\nabla f_1(x,y) = (2x, 2y) \quad \text{e} \quad \nabla f_2(x,y) = (3x^2 - 1, 2)\,.$$

Quindi, possiamo affermare che la funzione risulta continua e differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$ con

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} (2x, 2y) & \text{se } y > x \\ (3x^2 - 1, 2) & \text{se } y < x \end{cases}$$

in quanto per ogni punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $y > x$ possiamo trovare un intorno in cui $f = f_1$ e per ogni punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $y < x$ possiamo trovare un intorno in cui $f = f_2$. Resta da analizzare continuità e differenziabilità sulla retta $y = x$.

Abbiamo che la funzione f è continua in un punto (t,t) con $t \in \mathbb{R}$ se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(t,t)} f(x,y)$$

che implica verificare se vale

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(t,t) \\ y>x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(t,t) \\ y<x}} f(x,y)$$

ovvero

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(t,t) \\ y>x}} f_1(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(t,t) \\ y<x}} f_2(x,y)$$

e quindi

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(t,t) \\ y>x}} x^2 + y^2 = \lim_{\substack{(x,y)\to(t,t) \\ y<x}} x^3 - x + 2y\,.$$

Quindi sostanzialmente dobbiamo controllare per quali valori vale

$$f_1(t,t) = f_2(t,t)$$

ovvero $2t^2 = t^3 + t$ che porta all'equazione $t(t^2 - 2t + 1) = 0$ che ha soluzioni $t = 0$ e $t = 1$.

Quindi la funzione è continua in

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\} \cup \{(0,0)\,,\,(1,1)\}\,.$$

Dobbiamo vedere se la funzione è differenziabile in $(0,0)$ oppure $(1,1)$. Poiché la differenziabilità è equivalente all'esistenza dell'approssimante lineare, allora le approssimanti lineari delle funzioni f_1 e f_2 in questi punti devono coincidere.

Sostanzialmente dobbiamo verificare se

$$\nabla f_1(0,0) \stackrel{?}{=} \nabla f_2(0,0) \quad \text{e} \quad \nabla f_1(1,1) \stackrel{?}{=} \nabla f_2(1,1)\,.$$

La risposta si ottiene facilmente

$$(0,0) \stackrel{NO}{=} (-1,2) \quad \text{e} \quad (2,2) \stackrel{SI}{=} (2,2)\,.$$

Quindi la funzione è differenziabile in

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\} \cup \{(1,1)\}\,.$$

Per quanto riguarda la ricerca di massimi e minimi, la funzione f_1 rappresenta il quadrato della distanza dall'origine quindi troviamo facilmente che, definito l'insieme aperto $Q^+ = \{(x,y) \in Q \mid y > x\}$, vale

$$\max_{Q^+} f_1 = f_1(-2,2) = 8\,, \qquad \inf_{Q^+} f_1 = f_1(0,0) = 0\,.$$

Notiamo che dell'estremo inferiore non viene raggiunto in quanto l'origine non appartiene a Q^+.

Studiamo ora la funzione f_2 nell'insieme compatto $Q^- = \{(x,y) \in Q \mid y \geq x\}$. Il suo gradiente non si annulla, quindi non troveremo punti di estremo nell'interno di Q^-. Studiamo il bordo di Q^-: è un triangolo i cui vertici

$$A = (2,2) \qquad B = (-2,-2)\,, \qquad C = (2,-2)$$

sono candidati punti di estremo:

$$f_2(A) = f_2(2,2) = 10\,, \qquad f_2(B) = f_2(-2,-2) = -10\,, \qquad f_2(C) = f_2(2,-2) = 2\,.$$

Passiamo allo studio di f_2 sui segmenti

$$\begin{aligned} \overline{AB} &: g_1(t) = f(t,t) = t^3 + t \\ \overline{BC} &: g_2(t) = f(t,-2) = t^3 - t - 4 \\ \overline{AC} &: g_3(t) = f(2,t) = 6 + 2t \end{aligned}$$

Le funzioni g_1 e g_3 sono strettamente crescenti, quindi non troviamo ulteriori candidati lungo i segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Invece dallo studio g_2 abbiamo

$$g_2'(t) = 0 \iff t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

con valori (sono rispettivamente massimo e minimo locali ma non globali sul segmento)

$$g_2(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}} - 4 < 2 = g_2(2)\,, \qquad g_2(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = -\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}} - 4 > -10 = g_2(-2)\,.$$

Concludiamo quindi che il la funzione f ammette minimo -10 e massimo 10 sull'insieme Q. Si noti che se la funzione f fosse stata definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) & \text{se } y \geq x \\ f_2(x,y) & \text{se } yzx \end{cases}$$

(mettendo l'uguale nella prima riga) allora questi valori sarebbero stati di estremo inferiore e superiore, ma non di minimo e massimo. La funzione infatti non è continua su Q.

Esercizio 2.24. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + \sqrt{3}\,y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

determina se essa è continua nell'origine. Poi determina se è differenziabile nell'origine.

Determina, se esistono, massimo e minimo della funzione f sull'insieme di livello 1 della funzione $F(x,y) = x^2 + y^2$.

Mostrare per esercizio che la funzione è continua. Poi, usando la definizione di derivata parziale mostrare che $\nabla f(0,0) = (1,\sqrt{3})$. Ora impostiamo il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0)\,,\,(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

per verificare se valga zero o meno. Con alcuni calcoli troviamo

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3+\sqrt{3}\,y^3}{x^2+y^2} - 0 - x - \sqrt{3}y\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\qquad = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + \sqrt{3}\,y^3 - (x+\sqrt{3}y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &\qquad = -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 + \sqrt{3}x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Posto $g(x,y) = \frac{xy^2+\sqrt{3}x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ dobbiamo verificare se vale $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$. Notiamo

$$h(t) = g(t, \sqrt{3}t) = \frac{3}{4}\frac{t}{|t|}$$

che non ammette limite per $t \to 0$. Quindi nemmeno il limite precedente può esistere. La funzione f quindi non è differenziabile.

L'ultima parte dell'esercizio chiede di trovare massimo e minimo di f nella circonferenza unitaria, che può essere parametrizzata in coordinate polari. Ne consegue che dobbiamo trovare massimi e minimi della funzione $k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definita come $k(\theta) = \cos^3\theta + \sqrt{3}\sin^3\theta$. Completare questa parte per esercizio.

Esercizio 2.25. *Considerare l'insieme*

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 9\,,\ |x| + y \le 0\}\,.$$

Data la funzione $g : E \to \mathbb{R}$ definita come

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

determina se essa è continua nel suo dominio.

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y$, calcola massimi e minimi di f nell'insieme E.

L'insieme E può essere visto come l'intersezione della palla di raggio 3 centrata nell'origine con l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le -|x|\}$. Sebbene la funzione g ricordi il classico esempio di funzione non continua in un intorno dell'origine, si noti che in questo caso, avendo la funzione un dominio particolare essa risulta continua. Nelle note lo studente troverà un esercizio simile che coinvolge l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge |x|\}$. Adattare i calcoli e risolvere autonomamente questa parte.

La seconda parte dell'esercizio invece consiste in un facile esercizio di ricerca di massimi e minimi. La risoluzione è omessa.

Esercizio 2.26. *Dire per quali valori del parametro reale α la funzione*

$$f_\alpha(x,y) = |y|^\alpha \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$$

può essere estesa con continuità nell'origine. Per quali valori α la funzione f_α è differenziabile?

Notiamo subito che $f(x,0) = 0 = f(0,y)$ per ogni scelta di $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Quindi, la funzione potrà essere estesa per continuità nell'origine se dimostriamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = 0\,.$$

Notiamo innanzitutto che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g_\alpha(x,y)$$

dove

$$g_\alpha(x,y) = |y|^\alpha \frac{xy}{x^2+y^2}$$

grazie al primo limite fondamentale. Abbiamo che $|\frac{xy}{x^2+y^2}| \le 1$. Quindi se $\alpha > 0$ troviamo $0 \le |g_\alpha(x,y)| \le |y|^\alpha$. Poiché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y|^\alpha = 0$ la funzione g_α, e quindi anche f_α, può essere estesa in modo continuo nell'origine se $\alpha > 0$.

Mostriamo ora che per $\alpha \le 0$ la funzione non può essere estesa per continuità nell'origine. Se prendiamo la restrizione lungo la bisettrice del primo quadrante otteniamo

$$h(t) = f_\alpha(t,t) = |t|^\alpha \frac{\sin(t^2)}{2t^2}\,.$$

Abbiamo

$$\begin{cases} \lim_{t\to 0} h(t) = \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 0\,, \\ \lim_{t\to 0} h(t) = +\infty & \text{se } \alpha < 0\,. \end{cases}$$

In entrambi i casi, quindi, non possiamo estendere per continuità la funzione nell'origine.

Esercizio 2.27. *Data la funzione $h(x,y) = x|x| - y^2$ e l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \le 1\}$, determina massimo e minimo assoluto di g in D.*

La funzione ha gradiente $\nabla h(x,y) = (|x|, -2y)$. Tale funzione è continua. Quindi h è di classe C^1. Tuttavia h non è differenziabile due volte quando $x = 0$, non avremo quindi una matrice Hessiana da studiare per il punto critico $(0,0)$. Tuttavia è facile notare che in un intorno dell'origine vale $h(x,0) = x|x|$ che cambia segno. Dobbiamo quindi studiare la funzione sul bordo di D che è descritto dall'equazione $x^2 + 2y^2 = 1$. Per esercizio risolvere il problema con le seguenti strategie (in ogni caso, tranne uno, il valore assoluto porrà delle difficoltà):

- Introdurre la parametrizzazione della frontiera di D come $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ e studiare massimi e minimi di $f \circ \gamma(\theta) = \cos\theta|\cos\theta| - \frac{1}{2}\sin^2\theta$.
- Introdurre le funzioni $a_\pm(y) = \pm\sqrt{1-2y^2}$ che descrivono la parte destra e sinistra dell'ellisse $x^2 + 2y^2 = 1$ e quindi studiare le funzioni $g_\pm(y) = f(a_\pm(y), y)$.
- Introdurre due funzioni $b_\pm(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-x^2)}$ che descrivono la parte superiore e inferiore dell'ellisse $x^2 + 2y^2 = 1$ e quindi studiare le funzioni $h_\pm(x) = f(x, b_\pm(x))$.
- Si può impostare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange solo dopo aver separato i casi $x > 0$ e $x < 0$ e studiando separatamente la frontiera per $x = 0$ trovando due candidati per quest'ultima parte.

2.5 A.A. 2022/2023

Esercizio 2.28. *Stabilire se la seguente funzione è continua e differenziabile:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos(xy) + (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Per come è definita la funzione, osserviamo che continuità e differenziabilità sono soddisfatte su ogni punto diverso dall'origine. Qui di seguito discuteremo la continuità e differenziabilità nell'origine.

La funzione è continua se riusciamo a mostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\cos(xy) + (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - 1\right| = 0\,.$$

Effettuiamo quindi le seguenti maggiorazioni

$$\begin{aligned} \left|\cos(xy) + (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - 1\right| &\le |\cos(xy) - 1| + \left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \\ &\le |\cos(xy) - 1| + \left|x^2+y^2\right| = a(x,y)\,. \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} a(x,y) = 0$, otteniamo la continuità di f tramite il teorema dei carabinieri. Calcoliamo le derivate parziali di f nell'origine. Essendo

$$f(t,0) = f(0,t) = 1 + t^2\sin(t^{-2})\,, \qquad \text{se } t \neq 0,$$

troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1 + t^2\sin(t^{-2}) - t}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin(t^{-2}) = 0\,, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1 + t^2\sin(t^{-2}) - t}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin(t^{-2}) = 0\,. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo $\nabla f(0,0) = (0,0)$. La funzione è differenziabile nell'origine se il seguente limite esiste e vale zero

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0)\,,\,(h,k)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\cos(hk) + (h^2+k^2)\sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) - 1}{\sqrt{h^2+k^2}}\,.$$

A tal fine effettuiamo le seguenti maggiorazioni

$$\left|\frac{\cos(xy) + (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - 1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \left|\frac{\cos(xy)-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| + \sqrt{x^2+y^2}\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \le \left|\frac{\cos(xy)-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| + \sqrt{x^2+y^2}$$

Se mostriamo che il seguente limite è zero possiamo concludere che la funzione f è differenziabile nell'origine grazie al teorema dei carabinieri

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\cos(xy)-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| + \sqrt{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\cos(xy)-1}{x^2y^2}\right| \cdot \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Si vede facilmente che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0\,,$$

Infine abbiamo

$$0 \le \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |x|y^2\,, \qquad \text{con } \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|y^2 = 0\,.$$

Quindi il limite richiesto vale zero e abbiamo concluso.

Esercizio 2.29. *Determina massimo e minimo assoluto di $f(x,y) = x^2+y^2-3x-2y+1$ nella palla euclidea chiusa di raggio uno centrata nell'origine.*

Denotiamo con B la palla data. La funzione è di classe almeno C^2. Calcoliamo dapprima il gradiente $\nabla f(x,y) = (2x-3, 2y-2)$ che si annulla nel punto $(\frac{3}{2}, 1)$ che non appartiene a B. Quindi massimi e minimi si ottengono sulla frontiera di B.

Primo metodo: la frontiera si può parametrizzare in coordinate polari. Quindi basta studiare gli estremi della funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = 2 - 3\cos\theta - 2\sin\theta\,.$$

La derivata $g'(\theta) = 3\sin\theta - 2\cos\theta$ si annulla quando $\tan\theta = 2/3$, quindi risolvendo il sistema

$$\tan\theta = \tfrac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{2}{3} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

che ha soluzioni $(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$ e $(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}})$. I valori assunti sono $f(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}) = 2 - \sqrt{13}$ e $f(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}) = 2 + \sqrt{13}$, ottenendo così i valori di massimo e minimo.

Secondo metodo: Studio i punto critici con la sostituzione $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ oppure $x = \pm\sqrt{1-y^2}$. Analizziamo il primo caso. Dobbiamo trovare gli estremi delle funzioni $a_1, a_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definite come

$$a_1(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = 2 - 3x - 2\sqrt{1-x^2}\,, \qquad a_2(x) = f(x, -\sqrt{1-x^2}) = 2 - 3x + 2\sqrt{1-x^2}$$

Vanno considerati i valori assunti agli estremi (tale passaggio non è necessario nel primo metodo!): $a_i(-1) = f(-1,0) = 5$ e $a_i(1) = f(1,0) = -1$. Quindi calcoliamo le derivate di cui cercheremo gli zeri:

$$a_1'(x) = -3 + 2\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad a_2'(x) = 3 - 2\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Dobbiamo risolvere le equazioni (molti studenti hanno sbagliato il passaggio con il punto esclamativo dimenticando che la x doveva avere un segno preciso)

$$a_1'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 3\sqrt{1-x^2} \quad \overset{(!)}{\Rightarrow} \quad 4x^2 = 9 - 9x^2 \text{ con } x > 0\,! \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$a_2'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = 3\sqrt{1-x^2} \quad \overset{(!)}{\Rightarrow} \quad 4x^2 = 9 - 9x^2 \text{ con } x < 0\,! \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{\sqrt{13}} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

A questo punto si valuta f nei due punti trovati e si conclude come sopra dopo aver confrontato i valori ottenuti sopra. Si noti quante più difficoltà siano presenti in questo metodo.

Terzo metodo: utilizziamo i moltiplicatori di Lagrange. Impostiamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3 = 2x\lambda \\ 2y - 2 = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 3 \\ 2y(1-\lambda) = 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui notiamo che deve valere $\lambda \neq 1$ altrimenti troveremmo $3 = 0 = 2$. Quindi sottraendo il triplo della seconda riga al doppio della prima troviamo $2(2x - 3y)(1 - \lambda) = 0$, quindi dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x = 3y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

che porta alle soluzioni come nel primo metodo.

Esercizio 2.30. *Determina i punti critici della funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4x^2$ e determina la loro natura. Successivamente, trova massimo e minimo assoluto di f nella palla euclidea chiusa di raggio tre centrata nell'origine.*

Risoluzione omessa. Si troverà un punto critico $(\bar{x}, \bar{y})$ non classificabile tramite la matrice Hessiana (per la presenza dell'autovalore zero). In questo caso la classificazione va fatta con la verifica diretta che il punto, in questo caso, non è di estremo locale: infatti possiamo trovare due rette (individuarle!) passanti per il punto che potremmo parametrizzare come $r_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ e $r_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ e tali che $r_1(0) = r_2(0) = (\bar{x}, \bar{y})$ e per cui vale $r_1(t) > 0$ e $r_2(t) < 0$ in un intorno *bucato* di $t = 0$.

Esercizio 2.31. *Individuare il valore b per cui la funzione $f : [-2,2] \times [1,4]$ definita come*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y - 3x^2 - y^2 + 3y & \text{se } y \geq x^2 \\ x^4 - x^2y - 2x^2 + by & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

risulta continua, quindi individuare massimo e minimo di f.

Notiamo che vale $f(x,y) = f(-x,y)$, quindi possiamo risolvere in modo equivalente il seguente esercizio:

Individuare il valore b per cui la funzione $f : [0,2] \times [1,4]$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y - 3x^2 - y^2 + 3y & \text{se } y \geq x^2 \\ x^4 - x^2y - 2x^2 + by & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

risulta continua, quindi, fissato questo valore, individuare massimo e minimo di f.

Per comodità introduciamo la notazione

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) = x^2y - 3x^2 - y^2 + 3y & \text{se } y \geq x^2 \\ f_2(x,y) = x^4 - x^2y - 2x^2 + by & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

e verifichiamo che $f_1(x,x^2) = f_2(x,x^2)$ per ogni $x \in [1,2]$ (sono i valori x per cui la parabola $y = x^2$ interseca il dominio di f. Un semplice calcolo porta a

$$f_1(x,x^2) = 0\,, \qquad f_2(x,x^2) = -2x^2 + bx^2$$

da cui deduciamo che dobbiamo porre $b = 2$.

Consideriamo il gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} \nabla f_1(x,y) = (2xy - 6x\,,\, x^2 - 2y + 3) & \text{se } y > x^2 \\ \nabla f_2(x,y) = (4x^3 - 2xy - 4x\,,\, -x^2 + 2) & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

Si noti che per ogni punto (x,y) tale che $y = x^2$ non possiamo garantire che f ammetta derivate parziali, mentre quando vale $y \neq x^2$ possiamo sempre trovare un intorno di questo punto in cui questa disuguaglianza

permane, quindi la funzione f coincide o con f_1 o con f_2 in questo intorno. La differenziabilità per $y \neq x^2$ segue immediatamente dalla differenziabilità di f_1 o f_2 a seconda dei casi. Poiché l'obiettivo dell'esercizio è trovare massimi e minimi, consideriamo tutti i punti (x, y) tali che $y = x^2$ come candidati punti di estremo. Tra l'altro abbiamo già notato che $f(x, y) = f(x, x^2) = 0$ in tutti questi punti.

Cerchiamo ora i punti (x, y) con $y \neq x^2$ tali che $\nabla f(x, y) = 0$. Per farlo dobbiamo risolvere i sistemi

$$\begin{cases} 2x(y-3) = 0 \\ x^2 - 2y + 3 = 0 \\ y > x^2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} 2x(2x^2 - y - 2) = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \\ y < x^2 \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$\text{per il primo} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 3/2 \\ y > x^2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x^2 = 3 \\ y > x^2 \end{cases} \qquad \text{mentre per il secondo} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ y < x^2 \end{cases} .$$

Notiamo che solo il punto $(0, 3/2)$ risolve i sistemi precedenti. Poiché abbiamo notato che la funzione è *pari nella variabile* x e abbiamo ristretto la nostra attenzione sul dominio $[0, 2] \times [1, 4]$ anche questo punto è da scartare in quanto non appartiene all'interno del dominio. *Se invece non avessimo notato questa proprietà allora il punto diventa un candidato di estremo con valore* $f(0, 3/2) = 9/4$. *Uno studio della matrice Hessiana porterebbe ad una matrice con autovalori negativi, da cui dedurremmo la presenza di un massimo locale (fare i calcoli per esercizio). Tuttavia l'esercizio non contempla la discussione esplicita dei punti critici, quindi considerarlo a priori un candidato di estremo non è poi così grave.*

Molti studenti hanno considerato le disuguaglianze larghe nei sistemi sopra, hanno quindi considerato questi come punti critici (ed in essi sappiamo già che il valore assunto dalla funzione è zero). Questi studenti hanno poi eseguito il test della matrice Hessiana attraverso le funzioni f_1 *e* f_2. *Questo è un errore grave perché in questi punti non è nemmeno garantita la differenziabilità della funzione* f, *quindi è ancora meno probabile il fatto che sia differenziabile due volte.*

A questo punto rimane solo lo studio di f lungo il bordo. Dobbiamo quindi studiare le funzioni

$$\begin{aligned} a &: [0, 2] \to \mathbb{R}, \qquad a(x) = f(x, 4) = f_1(x, 4) = \ldots = x^2 - 4, \\ b &: [1, 4] \to \mathbb{R}, \qquad b(y) = f(0, y) = f_1(0, y) = \ldots = 3y - y^2, \\ c &: [1, 4] \to \mathbb{R}, \qquad c(y) = f(2, y) = f_2(2, y) = \ldots = 8 - 2y, \\ d &: [0, 2] \to \mathbb{R}, \qquad d(x) = f(x, 1), \end{aligned}$$

lasciando lo studio di quest'ultima funzione a un secondo momento. Le funzioni a e c non hanno punti critici interni all'intervallo, mentre la funzione b presenta un massimo per $y = 3/2$ recuperando così il candidato $(0, 3/2)$ già individuato precedentemente con valore $f(0, 3/2) = 9/4$. Infine abbiamo

$$d(x) = \begin{cases} -2x^2 + 2 & x \leq 1 \\ x^4 - 3x^2 + 2 & x > 1 \end{cases} .$$

Oltre al candidato $x = 1$ come punto di estremo in quanto in esso d non è derivabile (ma in cui la funzione vale $d(1) = f(1, 1) = 0$ come già calcolato) troviamo dallo studio della derivata solo il punto $x = \sqrt{3/2}$ (fare i calcoli per esercizio). Abbiamo $d(\sqrt{3/2}) = f(\sqrt{3/2}, 1) = f_2(\sqrt{3/2}, 1) = -1/4$. Infine dobbiamo considerare gli spigoli del rettangolo

$$f(0, 4) = -4, \qquad f(0, 1) = 2, \qquad f(2, 4) = 0, \qquad f(2, 1) = 6.$$

Quindi concludiamo che il minimo è -4, mentre il massimo è 6.

Esercizio 2.32. *Data la funzione* f *definita come*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + xy)}{|x| + |y|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

determina il suo dominio D *e disegnalo. In quali punti del dominio la funzione è continua? La funzione è differenziabile nell'origine?*

Il dominio è $D = \{(x,y) \mid xy \geq -1\}$ e consiste nella parte aperta e illimitata di piano che contiene gli assi ed è delimitata dall'iperbole $xy = -1$. La funzione è continua su $D \setminus \{(0,0)\}$ in quanto rapporto di funzioni continue. La continuità nell'origine è ottenuta nel modo seguente.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{|x|+|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\ln(1+xy)}{xy}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{xy}{|x|+|y|}}_{\to 0} = 0\,,$$

dove si dimostra che il secondo fattore va a zero mediante l'utilizzo del teorema dei carabinieri dopo aver fatto le seguenti maggiorazioni

$$0 \leq \left| \frac{xy}{|x|+|y|} \right| = \frac{|x|\,|y|}{|x|+|y|} \leq |x| \to 0$$

in cui si usa la maggiorazione $|y| \leq |x| + |y|$.

La funzione non è differenziabile in zero. Dopo aver dedotto che $\nabla f(0,0) = (0,0)$ essendo la funzione costante lungo gli assi, dalla definizione di differenziabilità si giunge a discutere se vale la seguente affermazione

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{\ln(1+xy)}{|x|+|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{(|x|+|y|)\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Tuttavia questa identità non vale infatti restringendoci alla retta $y = x$ possiamo verificare che

$$\lim_{t\to 0} \left[\frac{\ln(1+xy)}{(|x|+|y|)\sqrt{x^2+y^2}} \right]_{(x,y)=(t,t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2)}{(|t|+|t|)\sqrt{t^2+t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2)}{2\sqrt{2}|t|^2} \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2)}{2\sqrt{2}t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0\,.$$

Esercizio 2.33. *Su una palla di raggio 3 centrata nell'origine, la temperatura segue la legge $T(x,y,z) = x - 2y + 2z$. Trova il punto più caldo e il punto più freddo.*

Risoluzione omessa. Dopo aver mostrato che massimo e minimo non sono raggiunti all'interno, trovare i punti di estremo sul bordo usando i moltiplicatori di Lagrange. Si noti che la sfera si descrive come $x^2+y^2+z^2 = 9$ e non come $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ come fatto da ben 3 studenti dei 13 che hanno consegnato il compito.

2.6 A.A. 2023/2024

Esercizio 2.34. *Data una funzione $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1, si definisce la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ come $f(x,y,z) = \mu(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$. Per quali punti (x,y,z) la funzione f è continua? In quali punti possiamo dire con certezza che la funzione è differenziabile? Quale condizione aggiuntiva su μ va richiesta affinché sia differenziabile su tutto $\mathbb{R}^3$?*

Sapendo che la funzione μ ha le seguenti proprietà: $\lim_{t\to\pm\infty} \mu(t) = 0$, la funzione è decrescente nell'intervallo $]-\infty,-3]$, crescente nell'intervallo $[-3,4]$ e di nuovo decrescente in $[4,+\infty[$. Inoltre abbiamo i seguenti valori $\mu(-3) = -2$, $\mu(0) = -1$, $\mu(4) = 1$. Cosa possiamo affermare sull'esistenza (o non esistenza) di massimi e minimi per la funzione f? In caso di esistenza, quanto valgono questi valori e in quali punti sono raggiunti?

Introduciamo la funzione $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Questa funzione è continua e differenziabile su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Essendo le funzioni μ e ρ continue, deduciamo che f è continua in quanto composizione di funzioni continue. Con un'argomentazione analoga possiamo affermare che f è differenziabile almeno su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Resta da risolvere il problema della differenziabilità nell'origine. Le derivate parziali di f si calcolano come segue (si mostrano i calcoli solo per la derivata in x, gli altri sono identici per simmetria della funzione)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0,0) - f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\mu(|t|) - \mu(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\mu(|t|) - \mu(0)}{|t|} \cdot \frac{|t|}{t}\,.$$

Nell'ultimo limite la prima frazione tende al valore $\mu'(0)$. Se $\mu'(0) \neq 0$ allora la derivata parziale non esiste, se invece $\mu'(0) = 0$ allora la derivata parziale esiste con valore zero. Ne consegue che, se $\mu'(0) \neq 0$ allora f non è differenziabile nell'origine, se invece $\mu'(0) = 0$ troviamo che esiste il gradiente $\nabla f(0,0,0)$ con valore $(0,0,0)$. Verifichiamo che in questo caso f è differenziabile nell'origine calcolando il seguente limite

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - \nabla f(0,0,0)\cdot(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\mu(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) - \mu(0)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \mu'(0) = 0\,.$$

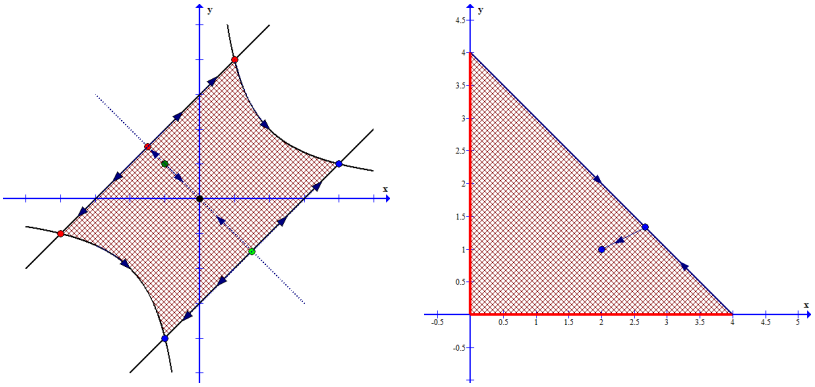


Figura 5: Vedi Esercizio 2.36 a sinistra. Vedi Esercizio 2.37 a destra.

Successivamente, notiamo che su $[0,+\infty$ la funzione μ presenta un minimo assoluto in 0 con valore -1 e un massimo assoluto in 4 con valore 1. Quindi la funzione f ha minimo assoluto -1 nell'origine e massimo assoluto 1 sulla sfera di raggio 4 centrata nell'origine.

Esercizio 2.35. *Determinare massimo e minimo della funzione* $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ *nell'insieme*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 - x^2 + y^2 - 5 = 0\}.$$

Per risolvere questo esercizio impostiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} 4x = \lambda(4x^3 - 2x) \\ 2y = \lambda 2y \\ x^4 - x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

dopo aver notato che $\nabla F(x,y) = (0,0)$, ovvero non ha rango massimo, nei punti $(0,0)$ e $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$ che non appartengono all'insieme A. Dalla seconda equazione troviamo $2y(\lambda - 1) = 0$ che ci porta a considerare i due casi $y = 0$ e $\lambda = 1$. Nel primo caso, sostituendo direttamente nel vincolo troviamo i candidati $(x_0, 0)$ dove x_0 è una soluzione dell'equazione $x^4 - x^2 - 5 = 0$. I possibili valori di x_0 sono $\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}$. In questi punti la funzione vale $1 + \sqrt{21}$ che è un numero nell'intervallo $[5,6]$.

Invece, ponendo $\lambda = 1$ troviamo nella prima equazione $4x^3 - 6x = 0$ che ha soluzioni $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3/2}$. Nel caso $x = 0$, troviamo i candidati $(0, \pm\sqrt{5})$ dove la funzione vale 5. Per gli altri valori di x troviamo $y = \pm\sqrt{17}/4$ dove la funzione vale $29/4 > 6$. Concludiamo quindi che il massimo è $29/4$ e il minimo 5.

Esercizio 2.36. *Determinare i massimi e i minimi relativi e assoluti della funzione* $f(x,y) = xye^{x-y}$ *sulla regione piana delimitata dalle curve* $|x - y| = 3$ *e* $xy = 4$.

Dopo aver calcolato il gradiente $\nabla f(x,y) = e^{x-y}\big(y(x+1), x(y-1)\big)$, andiamo a vedere dove questo si annulla risolvendo il sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ che si riduce facilmente a

$$\begin{cases} y(x+1) = 0 \\ x(y-1) = 0 \end{cases}$$

che porta come candidati i punti $(0,0)$ e $(-1,1)$. La matrice hessiana risulta

$$H_f(x,y) = e^{x-y}\begin{pmatrix} y(x+2) & (1+x)(1-y) \\ (1+x)(1-y) & x(y-2) \end{pmatrix}$$

Lo studio della matrice hessiana per il punto $(0,0)$ restituisce che l'origine è un punto di sella. Invece il punto $(-1,1)$ è un minimo locale con valore $f(-1,1) = -e^{-2}$. Studiamo il bordo della regione. Essa è costituita da un *quadrilatero* con due lati curvilinei che sono sottinsiemi della curva di livello $\{xy = 4\}$ e due segmenti sottinsiemi delle rette $y = x - 3$ e $y = x + 3$. I vertici sono nei quattro punti $(1,4)$, $(4,1)$, $(-1,-4)$, $(-4,-1)$ con valori

$f(1,4) = 4e^{-3}$, $f(4,1) = 4e^{3}$, $f(-1,-4) = 4e^{3}$, $f(-4,-1) = 4e^{-3}$ che sono automaticamente candidati estremi locali.

Sui pezzi di curva di livello $\{xy = 4\}$ la funzione ha valori $f(x,y) = xye^{x-y} = 4e^{x-y}$. Osservando le equazioni delle due rette $x - y = \pm 3$, si può notare che il valore dell'esponente varia nell'intervallo $[-3,3]$ e concludere che la funzione f varia in maniera monotona lungo questi insiemi. Quindi non abbiamo estremi in questa zona da aggiungere ai candidati già introdotti. Sui segmenti contenuti nelle rette $x - y = \pm 3$ la funzione assume valori $f(x,y) = xye^{\pm 3}$. La funzione lungo tali segmenti assume il valore massimo agli estremi e valore minimo nel punto di intersezione con la bisettrice $y = -x$. Verificare per esercizio questa affermazione sia con calcolo diretto, sia mediante uno studio degli insiemi di livello della funzione $g(x,y) = xy$. Troviamo quindi dei possibili punti di estremo nei punti $(\pm\frac{3}{2}, \mp\frac{3}{2})$. Essi sono minimi locali per la funzione f ristretta ai suddetti segmenti. I valori sono $f(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = -\frac{9}{4}e^{-3}$ e $f(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{9}{4}e^{3}$. Dobbiamo analizzare ora se preservano questa proprietà anche per la funzione f ristretta alla regione piana richiesta nell'esercizio. Il punto $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ è il punto di minimo assoluto. Per quanto riguarda il punto $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ è possibile mostrare che non si tratta di un punto di minimo locale studiando il comportamento di f sulla bisettrice $y = -x$ su cui assume i valori $-x^2e^{2x}$. La funzione infatti è decrescente nell'intervallo $[-\frac{3}{2}, -1]$.

Infine studiando i valori di f lungo il bordo della regione deduciamo che $(4,1)$ e $(-1,-4)$ sono punti di massimo assoluto, mentre gli altri due non sono punti di estremo.

Esercizio 2.37. *Sia A il dominio della funzione $a(x,y) = \sqrt{4 - x - y}$ e sia B il dominio della funzione $b(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt{y}$. Disegna $A \cap B$.*

Classifica tutti i punti critici della funzione $f(x,y) = x^2ye^{-(x+y)}$. Calcola massimo e minimo, se esistono, della funzione f nell'insieme $A \cap B$.

Dallo studio dei dominio delle funzioni a e b deduciamo le richieste $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 4$. Quindi $A \cap B$ è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,0)$. Inoltre la funzione si annulla sugli assi coordinati e ha lo stesso segno di y. In particolare $f \geq 0$ su $A \cap B$ con minimo zero raggiunto sui due lati contenuti negli assi. Potremmo a questo punto già dedurre un massimo locale per f ristretta al lato obliquo contenuto nella retta $y = 4 - x$. In particolare studiando la funzione $h(x) = f(x, 4-x) = x^2(4-x)e^{-4}$ nell'intervallo $[0,4]$ troviamo che la derivata di h risulta $h'(x) = e^{-4}(8x - 3x^2)$ che si annulla in $x = 0$ e $x = 8/3$. Troviamo come candidato il punto $P = (\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$ con valore $f(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}) = 2^8e^{-4}/27$.

Studiamo ora i punti critici della funzione f su tutto $\mathbb{R}^2$. Possiamo calcolare il gradiente

$$\nabla f(x,y) = \left(xy(x-2)\,,\, x^2(y-1)\right)e^{-(x+y)}$$

e la matrice Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y(x^2-4x+2) & x(x-2)(y-1) \\ x(x-2)(y-1) & x^2(y-2) \end{pmatrix} e^{-(x+y)}\,.$$

Il gradiente si annulla nel punto $(2,1) \in A \cap B$ e in tutti i punti dell'asse $x = 0$. Possiamo calcolare

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} e^{-3} \quad e \quad H_f(0,y) = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-y}\,.$$

Da quanto sopra deduciamo che il punto $(2,1)$ è di massimo locale con valore $f(2,1) = 4e^{-3}$. Per quanto riguarda i punti dell'asse y non possiamo determinare nulla dallo studio della matrice hessiana. Tuttavia lo studio del segno della funzione f assicura che i punti $(0,y)$ con $y > 0$ sono minimi locali, quelli con $y < 0$ sono massimi locali mentre l'origine non è un punto di estremo locale.

Dal fatto che la funzione tende a zero per $\|(x,y)\| \to +\infty$ se restiamo nel primo quadrante potremmo dedurre che il punto $(2,1)$ è punto di massimo assoluto su tutto il primo quadrante. In alternativa possiamo notare che $f(2,1) = 4e^{-3} > 2^8e^{-4}/27 = f(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$. Infatti moltiplicando i valori per $e^4/4$ troviamo $e > 64/27$ che è vera essendo $e > 2.5 = 67.5/27 > 64/27$.

Esercizio 2.38. *Dopo averne stabilito l'esistenza, trovare tutti i punti di massimo/minimo relativo e assoluti della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2$ sull'insieme*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y^2 - x^2 \geq z^2\,, |y| \leq 2\}\,.$$

Accenno di risoluzione. Dopo aver notato che l'origine appartiene all'insieme, possiamo concludere che la funzione ha minimo assoluto zero sull'insieme richiesto. L'insieme E risulta avere la forma di un doppio cono disposto orizzontalmente. La funzione f ha solo l'origine come punto critico, quindi non ci sono candidati nell'interno di E. Eventuali massimi e minimi locali sono raggiunti sulla frontiera. Sulle basi descritte dalle equazioni $y = \pm 2$ e $x^2 + z^2 \leq 12$ la funzione assume valori $x^2 + z^2 + 12$. Quindi i massimi sono raggiunti sul bordo della base circolare con valore 24. Per quanto riguarda i punti sulla superficie laterale del doppio cono, descritta dalle equazioni $|y| \leq 2$ e $x^2 + z^2 = 3y^2$, notiamo che la funzione assume valori $6y^2$ e quindi anche in questo caso i valori massimi sono raggiunti alla quota $y = \pm 2$ e il minimo, nell'origine.

Esercizio 2.39. *Dopo averne stabilito l'esistenza, trovare il minimo e il massimo della funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x, y) = x^2y^2 + z^2$ *sull'insieme*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\,,\, |z - 1| \leq 4\}\,.$$

Specificare i punti in cui viene raggiunto il minimo e i punti in cui viene raggiunto il massimo.

2.7 A.A. 2024/2025

Esercizio 2.40. *Discuti l'esistenza di massimi e minimi della funzione* $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ *sull'insieme* $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$.

L'insieme E è un piano, quindi un insieme illimitato. La funzione è coerciva, quindi ammetterà minimo e sarà superiormente illimitata. Tale proprietà si può dedurre osservando che

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 \geq x^2 + y^2 + z^2 = \|(x, y, z)\|^2$$

e quindi dal teorema del confronto è facile concludere che

$$\lim_{\|(x,y,z)\| \to +\infty} f(x, y, z) = +\infty\,.$$

A questo punto usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per trovare il minimo impostando il sistema $\nabla f = \lambda \nabla F$ con il vincolo $F(x, y, z) = 1$ dove $F(x, y, z) = x + y + z$. Il sistema risulta

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ 4y = \lambda \\ 6z = \lambda \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda/2 \\ y = \lambda/4 \\ z = \lambda/6 \\ \frac{11}{12}\lambda = 1 \end{cases}$$

da cui deduciamo il punto di minimo $(\frac{6}{11}\,,\, \frac{3}{11}\,,\, \frac{3}{11})$ con minimo $f(\frac{6}{11}\,,\, \frac{3}{11}\,,\, \frac{2}{11}) = \frac{1}{121}(36 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 4) = \frac{66}{121}$.

Esercizio 2.41. *Discuti l'esistenza di massimi e minimi della funzione* $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$ *sull'insieme* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq 3x \leq 12\}$.

Esercizio 2.42. *Considerare la funzione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

e dire se è continua nell'origine, se ammette derivate parziali nell'origine, se è differenziabile nell'origine. Come si può motivare l'affermazione

≪ se $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, allora f è differenziabile in (x_0, y_0, z_0)? ≫
senza eseguire i calcoli?

Esercizio 2.43. *Dato l'insieme* $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3(x^2 + y^2) - 2y^2 = 0\}$, *verificare che il punto* $P = (1, 1)$ *appartiene all'insieme. Spiegare perché in un intorno di questo punto è possibile vedere* V *come il grafico di una funzione* $y = h(x)$ *e calcolare la retta tangente a tale grafico nel punto* P.

Esercizio 2.44. *Si consideri la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$F(x,y) = e^{-y}(y+1)(x^2+x-2)\,.$$

Determinare, se esistono, eventuali punti critici di F *e discuterne la natura. Nei punti di massimo e minimo relativo di* F*, scrivere i polinomi di Taylor di* F *di ordine 2 centrati in questi punti. Determina estremo inferiore ed estremo superiore di* F*.*

Esercizio 2.45. *Discuti continuità e differenziabilità della funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

2.8 A.A. 2025/2026

Esercizio 2.46. *Classifica i punti critici della funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come* $f(x,y) = x^4 - y^4 - x^2 + y^2$*. Scrivi il polinomio di Taylor di grado 2 che approssima la funzione* f *nel punto* $P_1 = (x_1, y_1) = (-1, 2)$*. Scrivi il polinomio di Taylor di grado 3 che approssima la funzione* f *nel punto* $P_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$*.*

Esercizio 2.47. *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

dire in quali punti è continua, in quali punti è differenziabile. Scrivi il gradiente di f *nei punti in cui esiste. Inoltre calcolare massimo e minimo della funzione sulla frontiera della palla chiusa di raggio 1 centrata nell'origine.*

Esercizio 2.48. *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 > 0\,, \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 = 0\,, \end{cases}$$

dire in quali punti è continua e in quali punti è differenziabile.

Suggerimento: la funzione può essere vista come $f(x,y,z) = zg(x,y)$ dove g è una funzione studiata durante il corso come esempio di funzione non continua nell'origine (ma limitata). I punti per cui non è possibile determinare la continuità e differenziabilità in modo immediato usando il teorema del differenziale totale sono i punti del tipo $(0,0,z)$, ovvero l'asse z. La funzione sarà continua ma non differenziabile nell'origine. La funzione non sarà continua negli altri punti dell'asse z.

Esercizio 2.49. *Determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione* $f(x,y,z) = x + y + z$ *nell'insieme* $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2\,,\ x + z - 1 = 0\}$*.*

3 Integrazione

3.1 A.A. 2018/2019

Esercizio 3.1. *Calcolare l'integrale* $\iiint_V y\,dxdydz$ *dove*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le z \le 2x\,,\; y \ge x\}\,.$$

Possiamo descrivere l'insieme V nel seguente modo, intuendo la possibilità di integrare per fili:

$$\begin{aligned} V =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in U\,,\; x^2+y^2 \le z \le 2x\}\,,\\ U =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 2x\,,\; y \ge x\}\,. \end{aligned}$$

Quindi avremo

$$I = \iiint_V y\,dxdydz = \iint_U \left(\int_{x^2+y^2}^{2x} y\,dz\right) dxdy = \iint_U y(2x-x^2-y^2)\,dxdy\,.$$

L'insieme U può essere visualizzato in coordinate polari come

$$U_{pol} = \{(\rho,\theta) \mid \theta \in [\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{2}]\,,\; \rho \in [0, 2\cos\theta]\}\,.$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} \rho\,\rho\sin\theta(2\rho\cos\theta-\rho^2)\,d\rho\right) d\theta\\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left(\int_0^{2\cos\theta} 2\rho^3\cos\theta - \rho^4\,d\rho\right) d\theta\\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left[2\,\frac{\rho^4}{4}\cos\theta - \frac{\rho^5}{5}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta\\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left[8\cos^5\theta - \frac{32}{5}\cos^5\theta\right] d\theta\\ &= \frac{8}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^5\theta\,d\theta = \frac{8}{5}\left[-\frac{1}{6}\cos^6\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{5}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{8} = \frac{1}{30}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3.2. *Calcolare l'integrale* $\iiint_E \frac{z}{xy}\,dxdydz$ *dove*

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y \le x \le z^2 \le 4y\,,\; x^2 \le y \le 2x^2\,,\; z \ge 0\right\}.$$

Possiamo descrivere l'insieme E nel seguente modo, intuendo la possibilità di integrare per fili:

$$\begin{aligned} E =& \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in F\,,\; \sqrt{x} \le z \le 2\sqrt{y}\}\,,\\ F =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \le x \le 4y\,,\; x^2 \le y \le 2x^2\}\,. \end{aligned}$$

Quindi avremo

$$\begin{aligned} I &= \iiint_E \frac{z}{xy}\,dxdydz = \iint_F \frac{1}{xy}\left(\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{y}} z\,dz\right) dxdy\\ &= \iint_F \frac{1}{xy}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{y}} dxdy = \frac{1}{2}\iint_F \frac{4y-x}{xy}\,dxdy\,. \end{aligned}$$

A questo punto notiamo che, introducendo le variabili

$$m = y/x\,, \quad a = y/x^2$$

possiamo riscrivere l'insieme $F \setminus \{(0,0)\}$ nel seguente modo qualora adottassimo tale *cambio di variabili*:

$$\widetilde{F} = \{(m,a) \mid m \in [\tfrac{1}{4},1]\,,\ a \in [1,2]\}\,.$$

Cerchiamo il diffeomorfismo inverso $\Phi(m,a) = (x,y)$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x^2}{y}\,\dfrac{y}{x} = \dfrac{m}{a} \\ y = \dfrac{y^2}{x^2}\,\dfrac{x^2}{y} = \dfrac{m^2}{a} \end{cases}$$

di cui calcoliamo lo Jacobiano e il valore assoluto del determinante:

$$J_\Phi(m,a) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{m}{a^2} \\ \dfrac{2m}{a} & -\dfrac{m^2}{a^2} \end{pmatrix}, \qquad |\det J_\Phi(m,a)| = \frac{m^2}{a^3}\,.$$

Quindi, con il cambio di variabili otteniamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\iint_{[\frac{1}{4},1]\times[1,2]} \frac{4\frac{m^2}{a} - \frac{m}{a}}{\frac{m^3}{a^2}}\,\frac{m^2}{a^3}\,dmda \\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}}^{1}(4m-1)\,dm\int_1^2 a^{-2}\,da = \frac{1}{2}\left[2m^2-m\right]_{\frac{1}{4}}^{1}\left[a^{-1}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\,\frac{9}{8}\,\frac{1}{2} = \frac{9}{32}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3.3. *Calcolare il baricentro del corpo C, avente densità costante $\rho = 2$, che si ottiene ruotando l'insieme*

$$F = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le z\,,\, y^2+z^2 \le 2y\right\}$$

di un angolo di 2π attorno all'asse y.

Scambiando le coordinate y e z possiamo riformulare l'esercizio come
Calcolare il baricentro del corpo C, avente densità costante $\rho = 2$, che si ottiene ruotando l'insieme

$$\widetilde{F} = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le z \le y\,,\, y^2+z^2 \le 2z\right\}$$

di un angolo di 2π attorno all'asse z.

L'insieme C può essere scritto in coordinate cilindriche come

$$C_{cil} = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \theta \in [0,2\pi]\,,\ (r,z) \in \widetilde{F}\right\},$$

quindi avremo

$$\begin{aligned} M &= \iiint_C dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \iint_{\widetilde{F}} r\,drdz = 2\pi \iint_{\widetilde{F}} r\,drdz\,, \\ M_z &= \iiint_C z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \iint_{\widetilde{F}} rz\,drdy = 2\pi \iint_{\widetilde{F}} rz\,drdz\,. \end{aligned}$$

Il baricentro sarà il punto $\widetilde{G} = (0,0,z_G)$ dove $z_G = M_z/M$, dove le prime coordinate saranno nulle data la simmetria cilindrica dell'insieme.

Secondo il testo originale invece sarà $G = (0,z_G,0)$, ricordando che inizialmente avevamo scambiato le variabili y e z.

L'insieme $\widetilde{F}$ può essere visto in coordinate polari

$$\widetilde{F}_{pol} = \left\{(\rho,\theta) \mid \theta \in [0,\tfrac{\pi}{4}]\,,\ \rho \in [0, 2\sin\theta]\right\}.$$

Possiamo quindi calcolare

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{2\sin\theta} d\rho\,\rho\,\rho\cos\theta\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\sin\theta}\cos\theta d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta = \frac{2}{3}\left[\sin^4(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{6}\,, \end{aligned}$$

Il secondo integrale risulta

$$\begin{aligned} M_z &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\cos\theta} d\rho\, \rho\, \rho \cos\theta\, \rho \sin\theta \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos\theta \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{2\sin\theta} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5\theta\cos\theta\, d\theta \\ &= \frac{2}{3} \left[\sin^6\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}\frac{1}{8} = \frac{1}{12}\,. \end{aligned}$$

Quindi concludiamo che

$$z_G = \frac{M_z}{M} = \frac{1}{12} \cdot 6 = \frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 3.4. *Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'azze z del solido, avente densità costante $\rho = 1$, definito come segue*

$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le z\,, 0 \le y \le 1 - z \right\}.$$

L'integrale può essere risolto per fili osservando che

$$\begin{aligned} F &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,z) \in E\,,\, 0 \le y \le 1 - z \right\}, \\ E &= \left\{ (x,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le z \le 1 \right\} \end{aligned}$$

(sono possibili altre risoluzioni per fili, questa non è l'unica scelta).

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_F x^2 + y^2 \, dxdydz \\ &= \iint_E \left(\int_0^{1-z} x^2 + y^2 \, dy \right) dxdz \\ &= \iint_E \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-z} dxdz = \iint_E x^2(1-z) + \frac{1}{3}(1-z)^3 \, dxdz \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}(1-z) + \frac{1}{3}(1-z)^3 x \right]_0^z dz \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 z^3(1-z) + (1-z)^3 z \, dz\,. \end{aligned}$$

Notiamo, effettuando la sostituzione $s = 1 - z$ che

$$\int_0^1 z^3(1-z)\, dz = \int_0^1 (1-s)^3 s \, ds\,,$$

ottenendo quindi

$$I_z = \frac{2}{3} \int_0^1 z^3(1-z)\, dz = \frac{2}{3} \int_0^1 z^3 - z^4 \, dz = \frac{2}{3} \left[\frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{3}\frac{1}{20} = \frac{1}{30}\,.$$

Esercizio 3.5. *Calcolare*

$$\int_F \mathrm{e}^z \, dxdydz$$

dove

$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \le x^2 + y^2 \le 1 - z^2\,,\, -\sqrt{3}\, y \le x \le y \right\}.$$

Possiamo scrivere in coordinate sferiche (θ, φ, ρ) l'insieme F come

$$F_{sf} = \left[\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{5}{6}\pi \right] \times \left[\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{3}{4}\pi \right] \times [0,1]\,,$$

ottenendo quindi

$$\begin{aligned} I &= \iiint_F \mathrm{e}^z \, dxdydz \\ &= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} d\theta \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \, \rho^2 \sin\varphi \, \mathrm{e}^{\rho\cos\varphi} \\ &= \pi\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right) \int_0^1 \rho \left[-\mathrm{e}^{\rho\cos\varphi}\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} d\rho \\ &= \frac{7}{12}\pi \int_0^1 \rho \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\rho} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\rho}\right) d\rho \\ &= \frac{7}{6}\pi \int_0^1 \rho \, \sinh(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho) \, d\rho \end{aligned}$$

che possiamo integrare per parti ottenendo

$$\begin{aligned} I &= \frac{7}{6}\pi \left(\left[\rho\sqrt{2}\,\cosh(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho)\right]_0^1 - \sqrt{2}\int_0^1 \cosh(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho) d\rho \right) \\ &= \frac{7}{6}\pi \left[\rho\sqrt{2}\,\cosh(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho) - 2\sinh(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho)\right]_0^1 \\ &= \frac{7}{6}\pi \left[\sqrt{2}\,\cosh(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) - 2\sinh(\tfrac{1}{\sqrt{2}})\right]. \end{aligned}$$

Esercizio 3.6. *Calcolare*

$$\int_F \frac{x^2+y^2}{z^2}\, dxdydz$$

dove

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z \le x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \le 5z \,,\, 3z \le x^2+y^2 \le 4z\right\}.$$

Possiamo vedere l'insieme F in coordinate cilindriche come

$$\begin{aligned} F_{cil} &= \left\{(r,\theta,z) \mid (r,z) \in E \,,\, \theta \in [0,2\pi]\right\}, \\ E &= \left\{(r,z) \in |2z \le r^4 \le 5z \,,\, 3z \le r^2 \le 4z\right\}, \end{aligned}$$

così da ottenere

$$I = \iiint_F \frac{x^2+y^2}{z^2}\, dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_E r\,\frac{r^2}{z^2}\, drdz = 2\pi \iint_E r\,\frac{r^2}{z^2}\, drdz\,.$$

Mediante il cambio di variabili

$$a = \rho^4/z\,, \qquad b = \rho^2/z\,,$$

possiamo vedere l'insieme E nelle nuove variabili come

$$\widetilde{E} = \{(a,b) \mid 2 \le a \le 5 \,,\, 3 \le b \le 4\}.$$

Calcoliamo il diffeomorfismo inverso

$$\begin{cases} z = \frac{r^4}{z}\,\frac{z^2}{r^4} = \frac{a}{b^2} \\ r^2 = \frac{r^4}{z}\,\frac{z}{r^2} = \frac{a}{b} \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad (z,r) = \Phi(a,b) = (ab^{-2}\,,\, a^{1/2}b^{-1/2})\,,$$

la matrice jacobiana e il suo determinante

$$J_\Phi(a,b) = \begin{pmatrix} b^{-2} & -2ab^{-3} \\ \frac{1}{2}a^{-1/2}b^{-1/2} & -\frac{1}{2}a^{1/2}b^{-3/2} \end{pmatrix}, \quad |\det J_\Phi(a,b)| = \frac{1}{2}a^{1/2}b^{-7/2}\,.$$

Quindi otteniamo

$$I = 2\pi \int_2^5 da \int_3^4 db \frac{a^{3/2}b^{-3/2}}{a^2b^{-4}}\,\frac{1}{2}a^{1/2}b^{-7/2} = \pi \int_2^5 da \int_3^4 b^{-1}\, db = 3\pi \ln\tfrac{4}{3}\,.$$

3.2 A.A. 2019/2020

Esercizio 3.7. *Determinare il baricentro del corpo a densità costante $\mu = 2$ che occupa la porzione di spazio*

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} - z\right\}.$$

Il risultato non cambia se prendiamo $\mu = 1$. Usando coordinate sferiche l'equazione che descrive l'insieme C diventa $\rho^2 \le \rho(1-\cos\varphi)$, quindi $0 \le \rho \le 1-\cos\varphi$. Le coordinate angolari non hanno restrizioni: $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0,\pi]$. La simmetria cilindrica dell'insieme ci suggerisce le prime due coordinate del baricentro: $G = (0,0,z_G)$ con

$$z_G = \frac{\iiint_C z\,dxdydz}{\iiint_C dxdydz}.$$

Calcoliamo i due integrali:

$$\begin{aligned}
\iiint_C dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{1-\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} d\varphi \sin\varphi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{1-\cos\varphi} \\
&= \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi} (1-\cos\varphi)^3 \sin\varphi\, d\varphi \\
&= \frac{2}{3}\pi \left[\frac{1}{4}(1-\cos\varphi)^4\right]_0^{\pi} = \frac{1}{6}\pi\, 2^4 = \frac{8}{3}\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_C z\,dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{1-\cos\varphi} \rho^3 \sin\varphi\cos\varphi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} d\varphi \sin\varphi\cos\varphi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{1-\cos\varphi} \\
&= \frac{1}{2}\pi \int_0^{\pi} d\varphi \sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\varphi)^4 \qquad (s = 1-\cos\varphi) \\
&= \frac{1}{2}\pi \int_0^{2} (1-s)s^4\, ds = \frac{1}{2}\pi \left[\tfrac{1}{5}s^5 - \tfrac{1}{6}s^6\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\pi \left[\tfrac{1}{5}2^5 - \tfrac{1}{6}2^6\right] = -\frac{32}{15}\pi.
\end{aligned}$$

Quindi troviamo

$$z_G = -\frac{32\pi}{15}\frac{3}{8\pi} = -\frac{4}{5}.$$

Esercizio 3.8. *Calcolare* $\displaystyle\iint_E \frac{\sin(2x)}{y^2}\,dxdy$ *dove*

$$E = \left\{(x,y) \in [0,\pi/2] \times \mathbb{R} \,:\, y \le \sin x \le 2y\,;\, y \le \cos x \le 3y\right\}.$$

L'integrale si risolve impostando il cambio di variabili

$$\begin{cases} A = \frac{\sin x}{y} \\ B = \frac{\cos x}{y} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{A}{B} = \tan x \\ 1 = \cos^2 x + \sin^2 x = (Ay)^2 + (By)^2 \end{cases}$$

da cui troviamo

$$\begin{cases} x = \arctan\frac{A}{B} \\ y = (A^2+B^2)^{-1/2} \end{cases}$$

che ha matrice jacobiana

$$\begin{aligned}
J_\Phi(A,B) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\frac{A^2}{B^2}} \cdot \frac{1}{B} & \frac{1}{1+\frac{A^2}{B^2}} \cdot \frac{-A}{B^2} \\ (A^2+B^2)^{-1/2}\cdot(-A) & (A^2+B^2)^{-1/2}\cdot(-B) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A^2+B^2)^{-1}B & (A^2+B^2)^{-1}(-A) \\ (A^2+B^2)^{-3/2}(-A) & (A^2+B^2)^{-3/2}(-B) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

tale che

$$|\det J_\Phi(A,B)| = (A^2+B^2)^{-3/2}\,.$$

In alternativa possiamo calcolare

$$J_{\Phi^{-1}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\cos x}{y} & -\frac{\sin x}{y^2} \\ -\frac{\sin x}{y} & -\frac{\cos x}{y^2} \end{pmatrix} \quad |\det J_{\Phi^{-1}}(x,y)| = y^{-3} = (A^2+B^2)^{-3/2}$$

dove per il passaggio finale dobbiamo comunque riuscire ad esprimere y rispetto ad A e B.

Quindi l'integrale richiesto si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned} I &= \iint_E \frac{\sin(2x)}{y^2}\,dxdy = \iint_E 2\frac{\sin x}{y}\frac{\cos x}{y}\,dxdy \\ &= \int_1^2 dA \int_1^3 dB\, 2AB(A^2+B^2)^{-3/2} \\ &= \int_1^2 dA\, A\left[(A^2+B^2)^{-1/2}(-2)\right]_1^3 \\ &= -\int_1^2 2A\left[(A^2+9)^{-1/2} - (A^2+1)^{-1/2}\right] dA \\ &= -2\left[(A^2+9)^{1/2} - (A^2+1)^{1/2}\right]_1^2 \\ &= -2\left[\sqrt{13}-\sqrt{5}-\sqrt{10}+\sqrt{2}\right] = 2\left[\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{13}\right] \end{aligned}$$

Verificare per esercizio che l'argomento della parentesi quadra è positivo.

Esercizio 3.9. *Calcola il momento d'inerzia rispetto all'asse z del corpo di densità di massa $\mu(x,y,z) = x^{-3}$ che occupa la regione di spazio*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le y \le z \le x \le x^2+y^2 \le 1\}\,.$$

L'insieme E può essere riscritto come

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \widetilde{E}\,, \le y \le z \le x\} \\ \widetilde{E} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x \le x^2+y^2 \le 1\}\,. \end{aligned}$$

Tale possibilità ci suggerisce di integrare per fili

$$\begin{aligned} I &= \iiint_E \frac{x^2+y^2}{x^3}\,dxdydz = \iint_{\widetilde{E}} \left(\int_y^x \frac{x^2+y^2}{x^3}\,dz\right) dxdy \\ &= \iint_{\widetilde{E}} \frac{x^2+y^2}{x^3}\left(\int_y^x dz\right) dxdy = \iint_{\widetilde{E}} \frac{x^2+y^2}{x^3}(x-y)\,dxdy \end{aligned}$$

L'insieme $\widetilde{E}$ può essere visto in coordinate polari come

$$\widetilde{E}_{pol} = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos\theta \le \rho \le 1\,,\ \theta \in [0, \tfrac{\pi}{4}]\}\,.$$

Quindi l'integrale sarà

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\cos\theta}^1 \rho \, d\rho \right) \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos^3\theta} \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\rho^2\right]_{\cos\theta}^1 \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos^3\theta} \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos\theta - \sin\theta)(1 - \cos^2\theta)}{\cos^3\theta} \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 - \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \left[\tan\theta - \theta - \frac{(\cos\theta)^{-2}}{2} - \ln|\cos\theta| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2}\ln 2 - 0 + 0 + \frac{1}{2} - 0 \right] \\
&= \frac{1}{8}(2\ln 2 + 2 - \pi) \, .
\end{aligned}$$

Esercizio 3.10. *Calcolare il baricentro del seguente corpo planare di densità costante*

$$F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \sqrt[3]{x^2} - 1 \le y \le \frac{1 - |x|}{2} \right\} .$$

Disegna F.

Data la simmetria dell'insieme avremo che il baricentro sarà $G = (0, y_G)$ con $y_G = \mathcal{I}_y / \mathcal{I}$ che, sempre usando la simmetria dell'insieme, possono essere calcolati su $F^+ = \{(x,y) \in F \, : \, x \ge 0\}$:

$$\mathcal{I}_y = \iint_{F^+} y \, dxdy \, , \qquad \mathcal{I} = \iint_{F^+} dxdy \, .$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_y &= \iint_{F^+} y \, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^{\frac{2}{3}} - 1}^{\frac{1-x}{2}} y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{4} \left(\frac{1-x}{2} \right)^2 - \left(x^{\frac{2}{3}} - 1 \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{8} \left[x + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^1 - \frac{1}{2} \left[\frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + x - \frac{6}{5} x^{\frac{5}{3}} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} - \frac{3}{7} - \frac{1}{5} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \iint_{F^+} dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^{\frac{2}{3}} - 1}^{\frac{1-x}{2}} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{2} \right) - \left(x^{\frac{2}{3}} - 1 \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + x \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{5}{2} - \frac{6}{5} \right]
\end{aligned}$$

Quindi otteniamo

$$y_G = \frac{\frac{1}{12} - \frac{3}{7} - \frac{1}{5}}{\frac{5}{2} - \frac{6}{5}}$$

(poiché in sede d'esame non è permesso l'uso della calcolatrice, la risposta può essere data in questa forma).

Esercizio 3.11. *Calcola* $\iiint_E z \, dxdydz$ *dove*

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + 3z^2 \le 9 \, , z \ge y\} \, .$$

Mediante il cambio di variabile

$$\Phi : \begin{cases} x = a/2 \\ y = b \\ z = c/\sqrt{3} \end{cases} \qquad |\det J_\Phi| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

possiamo trasformare l'integrale su F nell'integrale

$$\mathcal{I} = \iiint_E z\,dxdydz = \iiint_E \frac{c}{\sqrt{3}}\frac{1}{2\sqrt{3}}\,dadbdc = \frac{1}{6}\iiint_E c\,dadbdc$$

dove

$$E = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a^2+b^2+c^2 \le 9\,,\; c \ge b\sqrt{3}\}\,.$$

A questo punto è conveniente il seguente riordinamento delle variabili $(a,b,c) = (Z,X,Y)$:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{6}\iiint_E Y\,dXdYdZ$$

dove

$$E = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, X^2+Y^2+Z^2 \le 9\,,\; Y \ge X\sqrt{3}\}\,.$$

Passando in coordinate sferiche abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{1}{6}\int_{\pi/3}^{4\pi/3} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^3 d\rho\; \rho^2\sin\varphi\;\rho\sin\varphi\sin\theta\\ &= \frac{1}{6}\int_{\pi/3}^{4\pi/3} \sin\theta\,d\theta \int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^3\rho^3\,d\rho\\ &= \frac{1}{6}\left[-\cos\theta\right]_{\pi/3}^{4\pi/3}\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^3 = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3^4}{4} = \frac{27}{16}\pi\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3.12. *Data una sfera di raggio R e centro $O = (0,0,0)$, di densità $\mu(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1}$, calcolarne il momento di inerzia rispetto ad una retta passante per il suo centro. Esprimere il risultato in funzione di massa e raggio.*

Calcoliamo il momento di inerzia in coordinate sferiche

$$\begin{aligned}I_z &= \iiint_{B_R(0)} \mu(x,y,z)x^2+y^2\,dxdydz\\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R d\rho\;\rho^2\sin\varphi\;\frac{1}{\rho^2}\;\rho^2\sin^2\varphi\\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi\int_0^R\rho^2\,d\rho\\ &= 2\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{8\pi R^3}{9}\end{aligned}$$

dove abbiamo calcolato

$$\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi}\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\,d\varphi = \left[-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi} = 1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\,.$$

Quindi dobbiamo calcolare la massa della sfera

$$\begin{aligned}M &= \iiint_{B_R(0)}\mu(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R d\rho\;\rho^2\sin\varphi\;\frac{1}{\rho^2}\\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^R d\rho = 2\pi\cdot 2\cdot R = 4\pi R\,.\end{aligned}$$

Quindi concludiamo che

$$I_z = \frac{8\pi R^3}{9} = \frac{2}{9}MR^2\,.$$

Esercizio 3.13. *Calcola il baricentro della semisfera di raggio R centrata in $O = (0,0,0)$ e contenuta nel semispazio $z \ge 0$ (* emisfero nord *) di densità $\mu(x,y,z) = z^2$.*

Il baricentro sarà $G = (0, 0, z_G)$ in ragione delle simmetrie della semisfera S (e della simmetria della funzione densità!). Calcoleremo quindi $z_G = \mathcal{I}_z/\mathcal{I}$ introducendo le coordinate sferiche.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_z &= \iiint_S \mu(x,y,z) z \, dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R d\rho \; \rho^2 \sin\varphi \; \rho^3 \cos^3\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos^3\varphi \int_0^R \rho^5 \, d\rho \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{4}\cos^4\varphi \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{6}\rho^6 \right]_0^R = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} R^6 = \frac{\pi}{12} R^6 \,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \iiint_S \mu(x,y,z) \, dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R d\rho \; \rho^2 \sin\varphi \; \rho^2 \cos^2\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos^2\varphi \int_0^R \rho^4 \, d\rho \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3}\cos^3\varphi \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{5}\rho^5 \right]_0^R = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} R^5 = \frac{2\pi}{15} R^5 \,.\end{aligned}$$

Concludiamo che

$$z_G = \frac{\frac{\pi}{12} R^6}{\frac{2\pi}{15} R^5} = \frac{5}{8} R \,.$$

Esercizio 3.14. *Determina, applicando il teorema del cambio di variabile, il valore del seguente integrale:*

$$\iint_E \frac{\mathrm{e}^x}{y} \, dxdy \,,$$

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \mathrm{e}^{2x} \le y \le 2\mathrm{e}^x \,,\, \mathrm{e}^x \le y \le 2\mathrm{e}^{2x}\} \,.$$

Possiamo riscrivere l'insieme E nel modo seguente:

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \mathrm{e}^{2x} \le y \le 2\mathrm{e}^{2x} \,,\, \mathrm{e}^x \le y \le 2\mathrm{e}^x\} \,.$$

Dalle disequazione possiamo ottenere

$$1 \le y\mathrm{e}^{-2x} \le 2 \,, \qquad 1 \le y\mathrm{e}^{-x} \le 2 \,.$$

Scegliendo il cambio di variabile

$$u = y\mathrm{e}^{-2x} \,, \qquad v = y\mathrm{e}^{-x} \,,$$

potremmo riscrivere l'insieme E nel modo seguente

$$\widetilde{E} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u \in [1,2] \,, v \in [1,2]\} \,.$$

Isolando x e y otteniamo (dettagli per esercizio)

$$x = \ln\frac{v}{u} = \ln v - \ln u \,, \qquad y = \frac{v^2}{u} \,,$$

con associata la matrice Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{u} & \dfrac{1}{v} \\ -\dfrac{v^2}{u^2} & 2\dfrac{v}{u} \end{pmatrix} ,$$

con $|\det J| = \dfrac{v}{u^2}$. Siamo pronti per la sostituzione nell'integrale

$$\iint_E \frac{\mathrm{e}^x}{y} \, dxdy = \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{v}{u^2} \, \frac{v}{u} \, \frac{u}{v^2} \, du \right) dv = \left(\int_1^2 \frac{1}{u^2} \, du \right) \left(\int_1^2 1 \, dv \right) = \frac{1}{2} \,.$$

Esercizio 3.15. *Calcolare il baricentro del corpo di densità costante che occupa la seguente prozione di spazio*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}\,.$$

Essendo il corpo a densità costante, possiamo scrivere le formule per il calcolo delle coordinate del baricentro (ovvero del centroide) nel modo seguente. Denotiamo con $x_G(F)$ la coordinata x del baricentro (o centroide) e con $|F|$ la misura di F. Otteniamo

$$x_G(F) = \frac{1}{|F|}\iiint_F x\,dxdydz \qquad \Rightarrow \qquad x_G(F)\cdot|F| = \iiint_F x\,dxdydz\,.$$

Nel nostro caso l'insieme E si può scrivere come $E = B_2(0,0,0) \setminus B_1(1,0,0)$ dove abbiamo denotato con $B_r(x,y,z)$ la palla di raggio r centrata in (x,y,z). Poiché $B_1(1,0,0) \subset B_2(0,0,0)$ abbiamo

$$\begin{aligned} x_G(E)\cdot|E| &= \iiint_E x\,dxdydz \\ &= \iiint_{B_2(0,0,0)} x\,dxdydz - \iiint_{B_1(1,0,0)} x\,dxdydz \\ &= x_G(B_2(0,0,0))\cdot|B_2(0,0,0)| - x_G(B_1(1,0,0))\cdot|B_1(1,0,0)| \end{aligned}$$

A questo punto sappiamo che il baricentro (o centroide) della palla $B_r(x,y,z)$ ha coordinate (x,y,z), mentre la misura è il noto $\frac{4}{3}\pi r^3$. Quindi otteniamo

$$x_G(E)\cdot\frac{4}{3}\pi(2^3-1^2) = 0\cdot\frac{4}{3}\pi 2^3 - 1\cdot\frac{4}{3}\pi 1^3 \quad \Rightarrow \quad x_G(E) = -\frac{1}{7}\,.$$

Anche senza accorgerci della simmetria dell'insieme E, possiamo ricavare $y_G(E) = z_G(E) = 0$. Quindi il baricentro risulta

$$G = \left(-\frac{1}{7},0,0\right)\,.$$

In alternativa possiamo scrivere

$$\begin{aligned} x_G(E) &= \frac{\iiint_E x\,dxdydz}{\iiint_E 1\,dxdydz} \\ &= \frac{\iiint_{B_2(0,0,0)} x\,dxdydz - \iiint_{B_1(1,0,0)} x\,dxdydz}{\iiint_{B_2(0,0,0)} 1\,dxdydz - \iiint_{B_1(1,0,0)} 1\,dxdydz} \\ &= \frac{\iiint_{B_2(0,0,0)} x\,dxdydz - \iiint_{B_1(1,0,0)} x\,dxdydz}{\frac{4}{3}\pi 2^3 - \frac{4}{3}\pi 1^3} \end{aligned}$$

Nel secondo integrale possiamo introdurre un cambio di variabile $(x,y,z) = (X+1,y,z)$ e ottenere

$$\begin{aligned} x_G(E) &= \frac{\iiint_{B_2(0,0,0)} x\,dxdydz - \iiint_{B_1(0,0,0)} (X+1)\,dXdydz}{7\,\frac{4}{3}\pi} \\ &= \frac{\iiint_{B_2(0,0,0)} x\,dxdydz - \iiint_{B_1(0,0,0)} X\,dXdydz - \iiint_{B_1(0,0,0)} 1\,dXdydz}{7\,\frac{4}{3}\pi}\,. \end{aligned}$$

I primi due integrali danno zero come risultato (dettagli per esercizio), mentre il terzo restituisce la misura della palla unitaria, ovvero $\frac{4}{3}\pi$.

3.3 A.A. 2020/2021

Esercizio 3.16. *Calcolare* $\iiint_E (x-1)\,dxdydz$, *dove*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le 1\,,\ 0 \le z \le y \le 1-x\}\,.$$

Osserviamo che $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in F\,,\ 0 \le z \le y\}$ dove

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\,,\ 0 \le y \le 1 - x\}\,.$$

L'insieme F è costituito da un quarto di cerchio nel secondo quadrante e un triangolo nel primo quadrante: $F = F_1 \cup F_2$ dove

$$F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\,,\ x \le 0\,, y \ge 0\}\,,$$
$$F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0\,, y \le 1 - x\}\,.$$

Quindi

$$\iiint_E (x-1)\,dxdydz = \iint_F \left(\int_0^y (x-1)dz\right) dxdy = \iint_F (x-1)y\,dxdy$$
$$\iint_F (x-1)y\,dxdy = \iint_{F_1} (x-1)y\,dxdy + \iint_{F_2} (x-1)y\,dxdy\,.$$

In particolare

$$\begin{aligned}\iint_{F_1} (x-1)y\,dxdy &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^1 \rho(\rho\cos\theta - 1)\rho\sin\theta\,d\rho\right) d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^1 \frac{1}{2}\rho^3\sin(2\theta) - \rho^2\sin\theta\,d\rho\right) d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{8}\sin(2\theta) - \frac{1}{3}\sin\theta\,d\theta \\ &= \left[-\frac{\cos(2\theta)}{16} + \frac{\cos\theta}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{1}{16} - \frac{1}{3} - \frac{1}{16} + 0 = -\frac{11}{24}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{F_2} (x-1)y\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x-1)y\,dy\right) dx = \int_0^1 (x-1)\frac{(1-x)^2}{2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(x-1)^3\,dx = \left[\frac{1}{8}(x-1)^4\right]_0^1 = -\frac{1}{8}\,.\end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$\iiint_E (x-1)\,dxdydz = -\frac{11}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{7}{12}\,.$$

Per esercizio risolvere l'integrale su F vedendo l'insieme come dominio normale

$$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{1-y^2} \le x \le 1 - y\,,\ y \in [0,1]\right\}\,.$$

Esercizio 3.17. *Calcolare il baricentro del corpo a densità costante che occupa la porzione di spazio*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 \le y^2 + z^2 \le 3 - x^2\,,\ yz \le 0\,,\ z \ge |y|\}\,.$$

Possiamo riscrivere, *cambiando i nomi alle variabili*, l'insieme come

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3z^2 \le x^2 + y^2 \le 3 - z^2\,,\ xy \le 0\,,\ y \ge |x|\}\,.$$

Inoltre possiamo scrivere

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in F\,,\ 3z^2 \le x^2 + y^2\,,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 3\}\,.$$

dove

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \le 0\,,\ y \ge |x|\}\,.$$

Notando la simmetria nella z concludiamo subito che avremo un baricentro $G = (x_G, y_G, z_G) = (x_G, y_G, 0)$. Le condizioni che descrivono E ci danno le seguenti limitazioni in coordinate sferiche: $\rho \in [0, \sqrt{3}]$ e $\varphi \in [\pi/3, 2\pi/3]$.

Le disequazioni che descrivono F ci danno $\theta \in [\pi/2, 3\pi/4]$. In coordinate sferiche, E è rappresentato da un rettangolo. Possiamo partire con i calcoli:

$$\iiint_E 1\,dxdydz = \int_0^{\sqrt{3}} d\rho \int_{\pi/3}^{2\pi/3} d\varphi \int_{\pi/2}^{3\pi/4} d\theta\ \rho^2 \sin\varphi$$
$$= \left(\int_0^{\sqrt{3}} \rho^2\,d\rho\right)\left(\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_{\pi/2}^{3\pi/4} 1\,d\theta\right) = \sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\sqrt{3}$$

$$\iiint_E x\,dxdydz = \int_0^{\sqrt{3}} d\rho \int_{\pi/3}^{2\pi/3} d\varphi \int_{\pi/2}^{3\pi/4} d\theta\ \rho^2 \sin\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cos\theta$$
$$= \left(\int_0^{\sqrt{3}} \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin^2\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \cos\theta\,d\theta\right) = \frac{9}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$$

$$\iiint_E y\,dxdydz = \int_0^{\sqrt{3}} d\rho \int_{\pi/3}^{2\pi/3} d\varphi \int_{\pi/2}^{3\pi/4} d\theta\ \rho^2 \sin\varphi\cdot\rho\sin\varphi\sin\theta$$
$$= \left(\int_0^{\sqrt{3}} \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin^2\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin\theta\,d\theta\right) = \frac{9}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si noti che

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin^2\varphi\,d\varphi = \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} = \frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\,.$$

Concludiamo quindi che

$$x_G = \frac{\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)}{\frac{\pi}{4}\sqrt{3}}\,, \qquad y_G = \frac{\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}\sqrt{3}}\,, \qquad z_G = 0\,.$$

Non occorre moltiplicare le parentesi, la risposta va bene così oppure si può semplificare un po' la frazione.

Esercizio 3.18. *Calcolare il momento d'inerzia I_z rispetto all'asse z del corpo solido di densità costante δ che occupa la porzione di spazio*

$$E = \{\boldsymbol{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{x}\|_\infty \le R\}\,.$$

Dare la risposta in termini di massa M dell'oggetto e del valore R.

Ricordando che per ogni $\boldsymbol{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le R \iff |x| \le R\,,\ |y| \le R\,,\ |z| \le R\,,$$

abbiamo

$$I_z = \iiint_{[-R,R]^3} \delta(x^2+y^2)\,dxdydz = \delta\int_{-R}^{R}\left(\int_{-R}^{R}\left(\int_{-R}^{R} x^2+y^2\,dz\right)dy\right)dx$$
$$= 2R\delta\int_{-R}^{R}\left(\int_{-R}^{R} x^2+y^2 dy\right)dx = 2R\delta\int_{-R}^{R}\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{-R}^{R}dx$$
$$= 4R\delta\int_{-R}^{R} Rx^2+\frac{1}{3}R^3dx = 4R\delta\left[\frac{1}{3}Rx^3+\frac{1}{3}xR^3\right]_{-R}^{R} = 4R\delta\cdot\frac{4}{3}R^4 = \frac{16}{3}\delta R^5\,.$$

La massa di un cubo di lato $2R$ e densità δ è $M = 8\delta R^3$, quindi abbiamo $I_z = \frac{2}{3}MR^2$.

Esercizio 3.19. *Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z del corpo solido di densità $\delta(x,y,z) = z$ che occupa la porzione di spazio*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2 \le 1-2z\,,\ |z-2| \le 2\}.$$

L'insieme E si può scrivere come

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le (z-1)^2,\ z \in [0,4]\}.$$

Quindi, usando le coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} I_z = \int_E z(x^2+y^2)\,dxdydz &= \int_0^4 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{|z-1|} z\rho^3\,d\rho \right) dz \\ &= 2\pi \int_0^4 \left(\int_0^{|z-1|} \rho^3\,d\rho \right) z\,dz = 2\pi \int_0^4 \frac{1}{4} z(z-1)^4\,dz = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^3 s^5 + s^4\,ds \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{6}s^6 - \frac{1}{5}s^5\right]_{-1}^3 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3^6-1}{6} + \frac{3^5+1}{5}\right). \end{aligned}$$

Esercizio 3.20. *Calcolare*

$$\iiint_E x^2 z\,dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 4,\, x^2+y^2 \le z^2,\, 0 \le z \le 5,\, y \ge 0\right\}.$$

Esercizio 3.21. *Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z del corpo solido a densità costante d che occupa la parte di spazio*

$$E = \left\{\vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x}\|_2 > R,\, \|\vec{x}\|_\infty < 2R,\, y > |x|\right\}.$$

3.4 A.A. 2021/2022

Esercizio 3.22. *Data una lunghezza $\ell > 0$, si consideri il triangolo $T \subset \mathbb{R}^3$ avente i vertici nei punti*

$$A = (0,0,2\ell), \quad B = (0,0,\ell), \quad C = (0,\ell,0).$$

Un solido di rotazione S è ottenuto ruotando di un angolo di 2π attorno all'asse z il triangolo T. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z del corpo solido a densità costante ρ che occupa la parte di spazio individuata da S. Esprimere il risultato in termini della massa M del solido e della lunghezza ℓ.

Esercizio 3.23. *Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x,y) = \begin{cases} y\sin x & \text{se } x^2+y^2 \le 1, \\ 1 & \text{se } x^2+y^2 > 1, \end{cases}$$

calcolare l'integrale di f sull'insieme $E = [0,1]\times[0,1]$, dopo aver spiegato perché la funzione f risulta integrabile su E.

Possiamo decomporre E in due sottoinsiemi, ovvero possiamo scrivere $E = E_1 \cup E_2$, dove

$$E_1 = \{(x,y) \in E \mid x^2+y^2 \le 1\}, \quad E_2 = \{(x,y) \in E \mid x^2+y^2 > 1\},$$

e quindi calcolare

$$\int_E f(x,y)\,dxdy = \int_{E_1} f(x,y)\,dxdy + \int_{E_2} f(x,y)\,dxdy = \int_{E_1} y\sin x\,dxdy + \int_{E_2} 1\,dxdy.$$

Il secondo integrale è la misura dell'area dell'insieme E_2 che si può calcolare con la geometria elementare

$$|E_2| = \int_{E_2} 1\,dxdy = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Per il primo integrale passiamo in coordinate polari

$$\begin{aligned} \int_{E_1} y\sin x\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \rho\,\rho\sin\theta\sin(\rho\cos\theta)d\theta \right) d\rho \\ &= \int_0^1 \left[\rho\cos(\rho\cos\theta)\right]_0^{\pi/2}\,d\rho \\ &= \int_0^1 \rho(1-\cos\rho)\,d\rho = \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \rho\sin\rho - \cos\rho\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} - \sin 1 - \cos 1 \end{aligned}$$

Esercizio 3.24. *Determina il valore di* $\iint_E xy\,dxdy$, *dove* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - \pi x - \pi y \le 0\}$.

L'insieme E è la circonferenza di centro $C = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ passante per l'origine, quindi di raggio $R = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}$. Risolvere l'esercizio impostando il cambio di variabile che porta C nell'origine

$$\begin{cases} x = X + \frac{\pi}{2}\,, \\ y = Y + \frac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

Dovremo quindi calcolare l'integrale

$$\iint_F \left(X + \frac{\pi}{2}\right)\left(Y + \frac{\pi}{2}\right) dXdY$$

con F la circonferenza di raggio $R = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}$ e centro l'origine.

Esercizio 3.25. *Determina il valore di*

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy\,,$$

dove

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 9\,,\ |x| + y \le 0\}\,.$$

e $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y$.

In coordinate polari l'insieme E è descritto come un rettangolo di coordinate (ρ,θ) con $\rho \in [0,3]$ e $\theta \in [\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]$. Quindi dobbiamo calcolare

$$\int_0^3 \left(\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} [\rho^3(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2\rho^2 \sin\theta]\,d\theta \right) d\rho\,.$$

Il resto dei calcoli sono lasciati come esercizio.

Esercizio 3.26. *Calcolare*

$$\int_E (2x + y)\,dxdy$$

dove E *è la regione di piano delimitata dalle circonferenze* $x^2 + y^2 = 1$ *e* $x^2 + y^2 = 9$ *e dalle rette di equazioni* $y = x$ *e* $y = -\sqrt{3}x$, *nel semipiano* $y \ge 0$.

Dalla descrizione, notiamo che l'insieme può essere descritto in coordinate polari con un rettangolo dove $\rho \in [1,3]$ e $\theta \in [\pi/4\,,\, 2\pi/3]$. Otteniamo quindi che l'integrale, passando in coordinate polari, risulta

$$\int_E (2x + y)\,dxdy = \left(\int_0^3 \rho^2\,d\rho \right)\left(\int_{\pi/4}^{2\pi/3} (2\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta \right) = \cdots$$

La prosecuzione del calcolo è semplice.

Esercizio 3.27. *Calcolare*

$$I = \iint_D \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] e^{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge y \ge 0\,,\, \frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 1\}\,.$$

Anche in questo caso possiamo introdurre le coordinate polari e ottenere

$$I = \left(\int_{1/2}^1 e^{\rho^2} \rho\,d\rho \right)\left(\int_0^{\pi/4} \sin^2(\tan\theta)(1 + \tan^2\theta)\,d\theta \right) = \left(\int_{1/2}^1 e^{\rho^2} \rho\,d\rho \right)\left(\int_0^1 \sin^2(m)\,dm \right) = \cdots$$

La prosecuzione del calcolo è semplice.

Per esercizio impostare l'esercizio introducendo il seguente cambio di variabile

$$\begin{cases} m = y/x \\ r = x^2 + y^2 \end{cases}$$

dove $m \in [0,1]$ e $r \in [1/4, 1]$.

3.5 A.A. 2022/2023

Esercizio 3.28. *Determina il valore di* $\iint_E |x+y|\,dxdy$, *dove* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le 0 \le y\,, 2 \le x^2+y^2 \le 3\}$. *Poi determina il valore di* $\iint_F |x+y|\,dxdy$, *dove* $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \le 0\,, 2 \le x^2+y^2 \le 3\}$

Il primo integrale in coordinate polari diventa

$$\begin{aligned}\iint_E |x+y|\,dxdy &= \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \rho|\rho\cos\theta+\rho\sin\theta|\right)d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \rho^2|\cos\theta+\sin\theta|\right)d\theta \\ &= \left(\int_{\pi/2}^{\pi}|\cos\theta+\sin\theta|\,d\theta\right)\left(\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\rho^2\right) = \left(\int_{\pi/2}^{\pi}|\cos\theta+\sin\theta|\,d\theta\right)\left(\frac{3^{3/2}-2^{3/2}}{3}\right)\end{aligned}$$

Quindi calcoliamo

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi}|\cos\theta+\sin\theta|\,d\theta &= \int_{\pi/2}^{3\pi/4}\cos\theta+\sin\theta\,d\theta - \int_{3\pi/4}^{\pi}\cos\theta+\sin\theta\,d\theta \\ &= [\sin\theta-\cos\theta]_{\pi/2}^{3\pi/4} - [\sin\theta-\cos\theta]_{3\pi/4}^{\pi} \\ &= \cdots = 2\sqrt{2}-2.\end{aligned}$$

Otteniamo

$$\iint_E |x+y|\,dxdy = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(3^{3/2}-2^{3/2}\right)$$

Per il secondo integrale osserviamo che l'insieme è simmetrico rispetto all'origine e la funzione $f(x,y) = |x+y|$ soddisfa $f(x,y) = f(-x,-y)$. Quindi

$$\iint_F |x+y|\,dxdy = 2\iint_E |x+y|\,dxdy = \frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(3^{3/2}-2^{3/2}\right).$$

In alternativa si può procedere come per il primo integrale

$$\begin{aligned}\iint_F |x+y|\,dxdy &= \int_{[\pi/2,\pi]\cup[3\pi/2,2\pi]}\left(\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\rho|\rho\cos\theta+\rho\sin\theta|\right)d\theta \\ &= \left(\frac{3^{3/2}-2^{3/2}}{3}\right)\left(\int_{\pi/2}^{\pi}|\cos\theta+\sin\theta|\,d\theta + \int_{3\pi/2}^{2\pi}|\cos\theta+\sin\theta|\,d\theta\right) = \ldots\end{aligned}$$

e procedere in modo analogo.

Esercizio 3.29. *Calcola il volume dell'insieme*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \le 1+4x^2+y^2 \le 10\}.$$

Definito l'insieme

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2 \le 9\},$$

troviamo

$$|E| = \int_E 1\,dxdydz = \int_F\left(\int_{-(1+4x^2+y^2)}^{1+4x^2+y^2} 1\,dz\right)dxdy = 2\int_F(1+4x^2+y^2)\,dxdy.$$

Quindi impostiamo il cambio di variabile (o equivalentemente possiamo fare due successivi cambi di variabile)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}X \\ y = Y \end{cases} \quad \text{e poi} \quad \begin{cases} X = \rho\cos\theta \\ Y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

La matrice Jacobiana associata al primo cambio di variabile è

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta & -\frac{1}{2}\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\det J| = \tfrac{1}{2}\rho$$

quindi abbiamo

$$|E| = 2\int_0^3\left(\int_0^{2\pi}(1+\rho^2)\tfrac{1}{2}\rho\,d\theta\right)d\rho = \pi\int_0^3 2\rho(1+\rho^2)d\rho = \left[(1+\rho^2)^2\right]_0^3 = 99\pi.$$

Esercizio 3.30. *Calcola*

$$\int_E \frac{x^2 z - y^2 z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz$$

dove

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 2x\,,\ |z-1| \le 1\}\,.$$

Esercizio 3.31. *Calcolare il momento di inerzia di una palla di raggio* 3 *centrata nell'origine avente densità* radialmente variabile *descritta dalla seguente funzione*

$$\delta(r) = \begin{cases} r & r \le 1 \\ r^{-1} & r > 1 \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

L'esercizio chiede il calcolo del seguente calcolo

$$\int_{B_3(0)} \delta(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x^2+y^2)\, dxdydz$$

che impostato in coordinate sferiche diventa

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^3 \delta(\rho)\rho^2\sin^2\varphi\,\rho^2\sin\varphi d\rho\right)d\varphi\right)d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^3 \delta(\rho)\rho^4 d\rho\right)$$

Da cui troviamo (scrivere esplicitamente il calcolo dell'integrale nella variabile φ), spezzando in due addendi l'integrale rispetto alla variabile ρ,

$$2\pi\cdot\frac{4}{3}\left[\int_0^1 \rho^5 d\rho + \int_1^3 \rho^3 d\rho\right] = \cdots = \frac{8}{3}\pi\left(\frac{1}{6}+\frac{81}{4}-\frac{1}{3}\right) = \frac{484}{9}\pi\,.$$

Esercizio 3.32. *Fissata una* lunghezza $\ell > 0$*, Calcola la massa* M *e il momento d'inerzia* I_z *del corpo a densità costante* $\rho = 3$ *che occupa la porzione di spazio*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\,,\ x^2+y^2 \le 2\ell y\}\,.$$

Esprimi il valore di I_z *in termini di massa* M *e* ℓ*.*

Calcoliamo la massa e il momento d'inerzia come

$$M = \int_E \rho\, dxdydz = \int_E 3\, dxdydz = \int_F 3r\, drd\theta dz\,, \qquad I_z = \int_E \rho(x^2+y^2)\, dxdydz = \int_F 3r^3\, drd\theta dz\,,$$

dove F è la rappresentazione di E in coordinate cilindriche

$$F = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \theta \le \pi\,, 0 \le r \le 2\ell\sin\theta\,, 0 \le z \le r\}\,.$$

La massa quindi si calcola come

$$\begin{aligned} M &= 3\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\ell\sin\theta}\left(\int_0^r r\, dz\right)d\rho\right)d\theta = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\ell\sin\theta} 3r^2 d\rho\right)d\theta \\ &= \int_0^{\pi}(2\ell\sin\theta)^3 d\theta = 8\ell^3\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta = \frac{2^5}{3}\ell^3 \end{aligned}$$

dove abbiamo calcolato

$$\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta = \int_0^{\pi}\sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta = \int_{-1}^{1}(1-s^2)ds = 2\left[s-\tfrac{1}{3}s^3\right]_0^1 = \frac{4}{3}\,.$$

Poi calcoliamo

$$\begin{aligned} I_z &= 3\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\ell\sin\theta}\left(\int_0^r r^3\, dz\right)d\rho\right)d\theta = 3\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\ell\sin\theta} r^4 d\rho\right)d\theta \\ &= \frac{3}{5}\int_0^{\pi}(2\ell\sin\theta)^5 d\theta = \frac{3}{5}\cdot 2^5\ell^5\int_0^{\pi}\sin^5\theta d\theta = \frac{2^9}{5^2}\ell^5 \end{aligned}$$

dove abbiamo calcolato

$$\int_0^\pi \sin^5\theta d\theta = \int_0^\pi \sin\theta(1-\cos^2\theta)^2 d\theta = \int_{-1}^1 (1-s^2)^2 ds = 2\int_0^1 (1-2s^2+s^4)ds = 2\left[s-\tfrac{2}{3}s^3+\tfrac{1}{5}s^5\right]_0^1 = \frac{16}{15}\,.$$

Mettendo assieme le due grandezze otteniamo $I_z = \frac{48}{25}M\ell^2$.

Esercizio 3.33. *Dato $a>0$, determina le coordinate del baricentro del solido che occupa la porzione di spazio individuata dall'insieme*

$$B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 2az\}$$

e avente densità di massa inversamente proporzionale alla distanza dall'origine.

La densità è $\delta(x,y,z) = k(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ con $k>0$ costante reale. Possiamo calcolare la massa del corpo usando le coordinate sferiche come

$$M = \int_B \delta(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2a\cos\varphi} k\rho^{-1}\rho^2\sin\varphi\right)d\varphi\right)d\theta = 2k\pi\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2a\cos\varphi}\rho\right)\sin\varphi d\varphi\,.$$

Le coordinate del baricentro, data la simmetria dell'insieme e della funzione densità saranno $G=(0,0,z_G)$ dove $z_G = I/M$ dove

$$I = \int_B \delta(x,y,z) z\,dxdydz = 2k\pi\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^2\right)\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\,.$$

Si completino i calcoli per esercizio.

3.6 A.A. 2023/2024

Esercizio 3.34. *Un solido è descritto dall'insieme $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : |z|\le x^2+y^2\le 1\}$ e la sua densità è data dalla funzione*

$$\mu(x,y,z) = \frac{\mathrm{e}^{x^2+y^2}}{x^4+2x^2y^2+y^4}\,.$$

Calcola il momento d'inerzia del solido.

Otteniamo, usando le coordinate cilindriche

$$\int_S (x^2+y^2)\cdot\frac{e^{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^2}dxdydz = \left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^1\left(\int_{-r^2}^{r^2} r\frac{e^{r^2}}{r^2}dz\right)dr\right) = 2\pi\int_0^1 2re^{r^2}dr = 2\pi(e-1)\,.$$

Esercizio 3.35. *Sia E l'insieme delimitato dai piani coordinati e dal piano $x+y+z=4$. Calcola $\int_E z\,dxdydz$.*

L'insieme E può essere descritto come

$$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\ge 0\,,\ y\ge 0\,,\ z\ge 0\,,\ x+y+z\le 4\}$$

che rimaneggiando le disuguaglianze può essere scritto come

$$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le 4-x-y\,,\ 0\le y\le 4-x\,,\ 0\le x\le 4\}$$

da cui

$$\int_E z\,dxdydz = \int_0^4\left(\int_0^{4-x}\left(\int_0^{4-x-y} z\,dz\right)dy\right)dx\,.$$

Si lascia il resto dei calcoli per esercizio. In alternativa si può anche scambiare l'ordine degli integrali descrivendo l'insieme come

$$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 4-y-z\,,\ 0\le y\le 4-z\,,\ 0\le z\le 4\}$$

da cui

$$\int_E z\,dxdydz = \int_0^4\left(\int_0^{4-z}\left(\int_0^{4-y-z} z\,dx\right)dy\right)dz\,.$$

Esercizio 3.36. *Un oggetto di densità costante μ occupa un volume $V_R \subseteq \mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando l'insieme*

$$E_R = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x \geq 0\,,\; x^2+z^2-2Rz \leq 0\}$$

di un angolo 2π attorno all'asse z. Calcola la massa M dell'insieme e il suo momento d'inerzia I_z rispetto all'asse z al variare di R. Poi esprimi il momento d'inerzia in termini di massa M e lunghezza R.

Dapprima utilizzando le coordinate cilindriche possiamo calcolare

$$M/\mu = \int_{V_R} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{F_R} r\,drdz = 2\pi \int_{F_R} x\,dxdy$$

$$I_z/\mu = \int_{V_R} (x^2+y^2)\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{F_R} r^3\,drdz = 2\pi \int_{F_R} x^3\,dxdy$$

dove

$$F_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x \geq 0\,,\; x^2+y^2-2Ry \leq 0\}\,.$$

Introducendo le usuali coordinate polari planari troviamo

$$M/\mu = 2\pi \int_{F_R} x\,dxdy = 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^{2R\sin\vartheta} \rho^2 \cos\vartheta\,d\rho \right) d\vartheta = \frac{16\pi R^3}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3\theta\cos\vartheta\,d\vartheta = \cdots = \pi R^3\,.$$

$$I_z/\mu = 2\pi \int_{F_R} x^3\,dxdy = 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^{2R\sin\vartheta} \rho^4 \cos^3\vartheta\,d\rho \right) d\vartheta = \frac{64\pi R^5}{5} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^5\theta\cos^3\vartheta\,d\vartheta$$
$$= \cdots = \cdots = \frac{11}{30}\pi R^5 = \frac{11}{30} M R^2\,.$$

Si suggerisce di provare a risolvere l'esercizio introducendo una traslazione che porti il centro della circonferenza nell'origine e spezzando l'insieme E_R in due parti: una con $z \geq 0$ e una con $z \leq 0$.

Esercizio 3.37. *Calcolare baricentro e momento d'inerzia del solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z \leq 4\,,\; z \geq 0\}$ a densità di massa costante.*

Il solido può essere descritto in coordinate cilindriche come dominio normale in due modi

$$\begin{aligned} V_{cil} &= \{(\rho,\theta,z) \mid \theta \in [0,2\pi]\,,\; z \in [0,4]\,,\; 0 \leq \rho \leq \sqrt{4-z}\} \\ &= \{(\rho,\theta,z) \mid \theta \in [0,2\pi]\,,\; \rho \in [0,2]\,,\; 0 \leq z \leq 4-\rho^2\}\,. \end{aligned}$$

Imposterò i calcoli adottando la seconda scelta, eseguire per esercizio i calcoli usando la prima alternativa. Supporremo il corpo di densità unitaria. Data la simmetria cilindrica del solido possiamo dedurre subito che il baricentro avrà coordinate $G = (0,0,z_G)$ con z_G da determinare.

$$M = \iiint_V 1\,dxdydz = 2\pi \int_0^2 \rho \left(\int_0^{4-\rho^2} 1\,dz \right) d\rho = 2\pi \int_0^2 \rho(4-\rho^2)d\rho = \cdots = 8\pi\,,$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_V z\,dxdydz = \frac{1}{4} \int_0^2 \rho \left(\int_0^{4-\rho^2} z\,dz \right) d\rho = \frac{1}{8} \int_0^2 \rho(4-\rho^2)^2 d\rho \overset{w=4-\rho^2}{=} \frac{1}{16} \int_0^4 w^2\,dw = \frac{4}{3}$$

$$I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz = 2\pi \int_0^2 \rho^3 \left(\int_0^{4-\rho^2} 1\,dz \right) d\rho = 2\pi \int_0^2 \rho^3(4-\rho^2)d\rho = \cdots = \frac{32}{3}\pi\,.$$

Esercizio 3.38. *Calcola la massa di un oggetto solido di densità $\rho(x,y,z) = |z|$ che occupa la porzione di spazio*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4\,,\; x^2+y^2 \leq 1\}\,.$$

3.7 A.A. 2024/2025

Esercizio 3.39. *Una sfera di raggio $2R$ centrata nell'origine ha densità di massa $\mu(x,y,z) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ dove*

$$f(t) = \begin{cases} R & \text{se } t \le R \\ t & \text{se } t > R \end{cases}$$

Calcola il momento di inerzia della sfera (che ruota attorno ad un asse passante per il suo centro) ed esprimilo in termini della sua massa M e del valore R.

Data la simmetria sferica del problema l'asse di rotazione può essere liberamente scelto: optiamo per l'asse z. Impostiamo i calcoli in coordinate polari e otteniamo, dopo aver notato la possibilità di separare le variabili,

$$\begin{aligned} M &= \iiint \mu(x,y,z)\,dxdydz \\ &= \left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^{2R} f(\rho) r^2 d\rho\right) \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \left(\int_0^{R} R r^2 d\rho + \int_R^{2R} r^3 d\rho\right) \\ &= 4\pi\left(\frac{1}{3} + \frac{16-1}{4}\right) R^4 = \frac{49}{3}\pi R^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint \mu(x,y,z)(x^2+y^2)\,dxdydz \\ &= \left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^{2R} f(\rho) r^4 d\rho\right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\int_0^{R} R r^4 d\rho + \int_R^{2R} r^5 d\rho\right) \\ &= \frac{8}{3}\pi\left(\frac{1}{5} + \frac{64-1}{6}\right) R^6 == \frac{8}{3}\pi\left(\frac{1}{5} + \frac{21}{2}\right) R^6 = \frac{8}{3}\frac{107}{10}\pi R^6 . \end{aligned}$$

Da ciò deduciamo che

$$I_z = \frac{8 \cdot 107}{490} M R^2 .$$

Esercizio 3.40. *Calcola il momento d'inerzia rispetto all'asse z del solido a densità costante che occupa la regione di spazio $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le z,\ z \in [0,h]\}$. Esprimere il risultato in termini di massa M dell'oggetto e distanza h.*

Nota: non è un cono!

Esercizio 3.41. *Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z e il baricentro del solido a densità costante che occupa la parte di spazio*

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2, z \le 0\} .$$

Dare le risposte in termini di massa M e raggio R del solido.

Esercizio 3.42. *L'insieme E ha come frontiera l'unione dei seguenti insiemi*

$$\begin{aligned} \partial E_1 &= \{-1\} \times [-1,1] , \\ \partial E_2 &= [-1,1] \times \{-1\} , \\ \partial E_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, |x| \le 1\} , \\ \partial E_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x = 0, x \ge 1\} . \end{aligned}$$

Disegna E e calcola $\int_E xy\,dxdy$.

Esercizio 3.43. *Sia $T \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo di vertici $A = (-2, 4)$, $B = (2, 0)$, e $C = (-2, -4)$. Sia $D = \{(x, y) \in T \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$. Calcolare $\iint_D x^2 \, dxdy$.*

Esercizio 3.44. *Calcola $\int_E y \, dxdydz$ dove*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \times [-2, 2] \times \mathbb{R} : x^2 + z^2 \leq y \leq 1 + x^2 + z^2\}$$

3.8 A.A. 2025/2026

Esercizio 3.45. *Calcola il momento di inerzia del solido a densità $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ che occupa la regione di spazio $E = E_1 \cup E_2$ dove*

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \beta \, , \, z \in [0, 3\sqrt{\beta}]\} \, ,$$
$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq \beta\} \, .$$

Esercizio 3.46. *Calcola l'integrale $\int_E xy^2 \, dxdy$ dove*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x \leq y \leq 3x \, , 1 < xy < 2\} \, .$$

Disegna E specificando opportunamente quali punti di ∂E appartengono (o non appartengono) all'insieme.

Nota: l'insieme è nel quarto quadrante.

Esercizio 3.47. *Calcola il momento di inerzia del solido a densità costante unitaria delimitato dalla superficie di equazione $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.*

Esercizio 3.48. *Calcolare il baricentro (densità unitaria) del solido*

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

4 Equazioni differenziali

4.1 A.A. 2018/2019

Esercizio 4.1. *Risolvere il seguente problema di Cauchy e determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} y' = y\cos^3 x - (y\cos x)^3 \\ y(\pi/2) = -1/2 \end{cases}$$

Questa equazione differenziale può essere risolta in diversi modi. Essa può essere scritta a variabili separabili

$$y' = (y - y^3)\cos^3 x$$

o essere vista come un'equazione di Bernoulli. Nel primo caso dovremo calcolare le seguenti primitive

$$\int \frac{1}{y - y^3}\,dx = \int \frac{1}{y^3(y^{-2} - 1)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|y^{-2} + 1| + c\,,$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)\cos x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$$

(la prima delle due primitive si può trovare anche mediante l'usuale scomposizione in fratti semplici). Troviamo quindi

$$-\frac{1}{2}\ln|y^{-2} - 1| = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c\,.$$

Sostituendo i dati iniziali del problema di Cauchy troviamo

$$-\frac{1}{2}\ln|4 - 1| = 1 - \frac{1}{3} + c \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln 3\,.$$

Dai calcoli precedenti notiamo che, in un intorno dell'istante iniziale $x_0 = \pi/2$ la funzione y assumerà valori tali che l'argomento del valore assoluto assumerà valori positivi, quindi avremo

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\ln(y(x)^{-2} - 1) &= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln 3 \\ \ln(y(x)^{-2} - 1) &= -2\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln 3\right) \\ y(x)^{-2} &= 1 + \mathrm{e}^{-2\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln 3\right)} \\ y(x) &= -\left[1 + \mathrm{e}^{-2\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln 3\right)}\right]^{-1/2}\,, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio è importante ricordare il segno meno suggerito dal valore della y.

In alternativa possiamo risolvere l'equazione differenziale come un'equazione di Bernoulli

$$\frac{y'}{y^3} = \frac{1}{y^2}\cos^3 x - \cos^3 x \quad \Rightarrow \quad z' = -2z\cos^3 x + 2\cos^3 x$$

dove abbiamo usato la sostituzione $z = y^{-2}$ (a questo punto si potrebbe notare che, anche in questo caso potremmo proseguire mediante separazione delle variabili, provare questa strada per esercizio). Risolviamo l'equazione lineare in z trovando le primitive

$$A(x) = \int -2\cos^3 x\,dx = -2\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right),$$

$$B(x) = \int \mathrm{e}^{-A(x)}\,2\cos^3 x\,dx = \mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{2\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)},$$

dove la seconda primitiva è un *integrale immediato* sapendo dal calcolo precedente chi sia la derivata di A. La soluzione sarà del tipo

$$z(x) = \mathrm{e}^{A(x)}(\mathrm{e}^{-A(x)} + C) = 1 + C\mathrm{e}^{A(x)} = 1 + C\mathrm{e}^{-2\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)},$$

con costante C da determinare tramite le condizioni iziali:

$$4 = 1 + C\mathrm{e}^{-2\,\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad C = 3\mathrm{e}^{4/3}\,.$$

Arriviamo quindi alla soluzione

$$z(x) = 1 + 3\mathrm{e}^{4/3}\,\mathrm{e}^{-2\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)}\,,$$

e, tramite la sostituzione, troviamo

$$y(x) = -\left[1 + 3\mathrm{e}^{4/3}\,\mathrm{e}^{-2\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)}\right]^{-1/2}\,.$$

Possiamo notare che le due soluzioni trovate con i due metodi sono le stesse con un semplice calcolo:

$$\mathrm{e}^{-2\left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln 3\right)} = 3\mathrm{e}^{4/3}\,.$$

La soluzione così trovata ha intervallo massimale di esistenza su $\mathbb{R}$. A questo risultato si può pervenire senza fare calcoli, ma adottando un approccio puramente teorico: l'equazione a variabili separabili ammette le tre soluzioni costanti $y \equiv 1$, $y \equiv 0$ e $y \equiv -1$; per il teorema di unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy ogni soluzione con dato iniziale $y(x_0) = y_0$ con $y_0 \in (-1, 0)$ sarà tale che $y(t) \in (-1, 0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, similmente se $y_0 \in (0, 1)$ avremo $y(t) \in (0, 1)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Formalizzare per esercizio la precedente trattazione.

Esercizio 4.2. *Risolvere il seguente problema di Cauchy e determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 6\cos^2 x\,, \\ y(0) = -\dfrac{11}{52}\,, \qquad y'(0) = -\dfrac{3}{26}\,. \end{cases}$$

La soluzione generica dell'equazione omogenea $y'' - y' - 6y = 0$ è

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{3x}\,,$$

avendo il polinomio caratteristico $\lambda^2 - \lambda - 6$ le radici -2 e 3. Ricordando le formule di duplicazione del coseno troviamo che

$$2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)\,,$$

rendendo così l'equazione assegnata affrontabile mediante il metodo della somiglianza (saremmo altrimenti costretti ad adottare il metodo di variazione delle costanti):

$$y'' - y' - 6y = 3 + 3\cos(2x)\,.$$

Considereremo quindi le due funzioni test $y_1(x) = K$ e $y_2(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$. Sostituendole entrambe nel membro destro dell'equazione troviamo:

$$\begin{aligned} &y_0'' - y_0' - 6y_0 = 0 + 0 - 6K = 3 \quad \Rightarrow \quad K = -\tfrac{1}{2}\,, \\ &y_1'' - y_1' - 6y_1 = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) - 2A\cos(2x) + 2B\sin(2x) \\ &\qquad\qquad - 6A\sin(2x) - 6B\cos(2x) = 3\cos(2x) \\ &\Rightarrow \begin{cases} -4A + 2B - 6A = 0 \\ -4B - 2A - 6B = 3 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} B = 5A \\ -52A = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow A = -\frac{3}{52}\,,\ B = -\frac{15}{52}\,. \end{aligned}$$

L'integrale generale dell'equazione è quindi

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{2} - \frac{3}{52}\sin(2x) - \frac{15}{52}\cos(2x)\,,$$

con derivata

$$y'(x) = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x} - \frac{3}{26}\cos(2x) + \frac{15}{26}\sin(2x)\,.$$

Sostituendo i dati iniziali troviamo

$$\begin{cases} \frac{11}{52} = y(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{2} - \frac{15}{52} \\ -\frac{3}{26} = -2c_1 + 3c_2 - \frac{3}{26} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 = 3c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{3}{5}\,,\ c_2 = \frac{2}{5}$$

e quindi la soluzione (con intervallo massimale $\mathbb{R}$)

$$y(x) = \frac{3}{5}e^{-2x} + \frac{2}{5}e^{3x} - \frac{1}{2} - \frac{3}{52}\sin(2x) - \frac{15}{52}\cos(2x)\,.$$

Esercizio 4.3. *Risolvere il seguente problema di Cauchy e determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^x + e^{-x}\,, \\ y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

La soluzione generica dell'equazione omogenea $y'' + 3y' + 2y = 0$ è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}\,,$$

avendo il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 3\lambda + 2$ le radici -1 e -2. Considereremo quindi le due funzioni test $y_1(x) = Ae^x$ e $y_2(x) = Bxe^{-x}$. Sostituendole entrambe nel membro destro dell'equazione troviamo:

$$\begin{aligned} y_1'' + 3y_1' + 2y_1 &= 6Ae^x = e^x \quad \Rightarrow A = \tfrac{1}{6} \\ y_2'' + 3y_2' + 2y_2 &= -2Be^{-x} + Bxe^{-x} + eBe^{-x} - 3Bxe^{-x} + 2Bxe^{-x} \\ &= Be^{-x} = e^{-x} \quad \Rightarrow B = 1 \end{aligned}$$

L'integrale generale dell'equazione è quindi

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}e^x + xe^{-x}\,,$$

con derivata

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}e^x + e^{-x} - xe^{-x}\,.$$

Sostituendo i dati iniziali troviamo

$$\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{6} \\ 0 = y'(0) = -c_1 - 2c_2 + \frac{1}{6} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{1}{6} \\ c_1 + 2c_2 = \frac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow c_1 = -\frac{3}{2}\,,\ c_2 = \frac{4}{3}$$

e quindi la soluzione (con intervallo massimale $\mathbb{R}$)

$$y(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + \frac{4}{3}e^{-2x} + \frac{1}{6}e^x + xe^{-x}\,,$$

Esercizio 4.4. *Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali*

$$y'' - 2y' + 5y = \sin x \cos x\,, \qquad y'' - 2y' + 5y = 10\sin(2x)\,.$$

e risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = \sin x \cos x\,, \\ y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

La soluzione generica dell'equazione omogenea $y'' - 2y' + 5y = 0$ è

$$y(x) = c_1 e^x \sin(2x) + c_2 e^x \cos(2x)\,,$$

avendo il polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ le radici $1 \pm 2i$. Cerchiamo una soluzione particolare per la seconda equazione differenziale mediante la funzione test $y_0(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$, trovando

$$\begin{aligned} y_0'' - 2y_0' + 5y_0 &= -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) - 4A\cos(2x) + 4B\sin(2x) \\ &\quad + 5A\sin(2x) + 5B\cos(2x) = 10\sin(2x) \\ &\Rightarrow \begin{cases} -4A + 4B + 5A = 10 \\ -4B - 4A + 5B \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A + 4B = 10 \\ B = 4A \end{cases} \\ &\Rightarrow A = \frac{10}{17}\,,\ B = \frac{40}{17}\,. \end{aligned}$$

L'integrale generale dell'equazione $y'' - 2y' + 5y = 10\sin(2x)$ è quindi

$$y(x) = c_1 e^x \sin(2x) + c_2 e^x \cos(2x) + \frac{10}{17}\sin(2x) + \frac{40}{17}\cos(2x)\,.$$

Per l'equazione $y'' - 2y' + 5y = \sin x \cos x$, essendo $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$, basta divide per 20 la soluzione particolare dell'altra equazione:

$$y(x) = c_1 e^x \sin(2x) + c_2 e^x \cos(2x) + \frac{1}{34}\sin(2x) + \frac{2}{17}\cos(2x)\,,$$

con derivata

$$y'(x) = c_1 e^x \sin(2x) + 2c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \cos(2x) - 2c_2 e^x \sin(2x) + \frac{1}{17}\cos(2x) - \frac{4}{17}\sin(2x)\,.$$

Per risolvere il problema di Cauchy, sostituiamo alle precedenti i dati iniziali:

$$\begin{cases} y(0) = 0 = c_2 + \frac{2}{17} \\ y'(0) = 0 = 2c_1 + c_2 - \frac{1}{17} \end{cases} \quad \Rightarrow c_1 = \frac{1}{34}\,,\ c_2 = -\frac{2}{17}\,,$$

ottenendo la soluzione del problema di Cauchy (con intervallo massimale $\mathbb{R}$)

$$y(x) = \frac{1}{34}e^x \sin(2x) + -\frac{2}{17}e^x \cos(2x) + \frac{1}{34}\sin(2x) + \frac{2}{17}\cos(2x)\,,$$

Esercizio 4.5. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y''' - y' = 2\sin x\,, \\ y(0) = 1\,, \\ y'(0) = 0\,, \\ y''(0) = 1\,. \end{cases}$$

La soluzione generica dell'equazione omogenea $y''' - y' = 0$ è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}\,,$$

avendo il polinomio caratteristico $\lambda^3 - \lambda$ le radici $0, 1, -1$. Cerchiamo una soluzione particolare mediante la funzione test $y_0(x) = A\sin x + B\cos x$, trovando

$$\begin{aligned} y_0''' - y_0' &= -A\cos x + B\sin x - A\cos x + B\sin x = 2\sin x \\ &\Rightarrow A = 0\,,\ B = 1\,. \end{aligned}$$

L'integrale generale dell'equazione è quindi

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \cos x\,,\ .$$

con derivate

$$y'(x) = c_2 e^x - c_3 e^{-x} - \sin x\,,$$
$$y''(x) = c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \cos x\,.$$

Per risolvere il problema di Cauchy, sostituiamo alle precedenti i dati iniziali:

$$\begin{cases} y(0) = 1 = c_1 + c_2 + c_3 + 1 \\ y'(0) = 0 = c_2 - c_3 \\ y''(0) = 1 = c_2 + c_3 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 = c_3 \\ c_2 + c_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

ottenendo la soluzione del problema di Cauchy (con intervallo massimale $\mathbb{R}$)

$$y(x) = -2 + e^x + e^{-x} + \cos x\,.$$

Esercizio 4.6. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} (1+x^2)y' - (1+y^2)x = 0\,, \\ y(\sqrt{e^\pi - 1}) = 1\,. \end{cases}$$

L'equazione può essere vista come equazione a variabili separabili:

$$\frac{y'}{1+y^2} = \frac{x}{1+x^2}\,,$$

e calcolando le primitive membro a membro troviamo

$$\arctan y(x) = \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\,,$$

da cui, sostituendo i dati iniziali troviamo il valore della costante

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln(1+e^\pi - 1) + c \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{\pi}{4}\,.$$

La soluzione, isolando la funzione y risulta

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\pi}{4}\right).$$

Passiamo ora a studiare l'intervallo massimale di esistenza. Per poter eliminare al membro sinistro l'arcotangente nei passaggi precedenti, dobbiamo chiedere

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

dove la prima disequazione è sempre valida essendo il logaritmo sempre positivo. Studiando la seconda troviamo:

$$\ln(1+x^2) < \frac{3}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad x^2 < e^{\frac{3}{2}\pi} - 1$$

e quindi l'intervallo massimale di esistenza della soluzione

$$\left(-\sqrt{e^{\frac{3}{2}\pi} - 1}\,,\ \sqrt{e^{\frac{3}{2}\pi} - 1}\right).$$

4.2 A.A. 2019/2020

Esercizio 4.7. *Risolvi il seguente problema di Cauchy al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x'' + 4x = \sin(2t + \alpha)\,, \\ x(0) = 1\,, \\ x'(0) = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata $x'' + 4x = 0$ ha soluzione generica $x(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$, avendo il polinomio caratteristico le soluzioni $\lambda = \pm 2i$. Notiamo che il forzante $\sin(2t + \alpha)$ è soluzione dell'equazione omogenea, quindi cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$x_0(t) = At \sin(2t + \alpha) + Bt \cos(2t + \alpha)$$

con derivate

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= A \sin(2t + \alpha) + 2At \cos(2t + \alpha) + B \cos(2t + \alpha) - 2Bt \sin(2t + \alpha)\,, \\ x_0''(t) &= 4A \cos(2t + \alpha) - 4At \sin(2t + \alpha) - 4B \sin(2t + \alpha) - 4Bt \cos(2t + \alpha)\,. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$x_0''(t) + 4x_0(t) = 4A \cos(2t + \alpha) - 4B \sin(2t + \alpha) = \sin(2t + \alpha)\,,$$

da cui concludiamo che $A = 0$ e $B = -\frac{1}{4}$. L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea assegnata è quindi

$$x(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) - \tfrac{1}{4} t \cos(2t + \alpha)\,.$$

con derivata

$$x'(t) = 2c_1 \cos(2t) - 2c_2 \sin(2t) - \tfrac{1}{4} \cos(2t + \alpha) + \tfrac{1}{2} t \sin(2t + \alpha)\,.$$

Sostituendo i dati iniziali troviamo

$$\begin{cases} 1 = x(0) = c_2 \\ 0 = x'(0) = 2c_1 - \frac{1}{4} \cos\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = \frac{1}{8} \cos\alpha \end{cases}$$

e quindi la soluzione richiesta (definita sull'intervallo massimale $\mathbb{R}$):

$$x(t) = \tfrac{1}{8} \cos\alpha \sin(2t) + \cos(2t) - \tfrac{1}{4} t \cos(2t + \alpha)\,.$$

Alternativa: si poteva usare la formula della somma

$$\sin(2t + \alpha) = \sin(2t) \cos(\alpha) + \cos(2t) \sin(\alpha)$$

e cercare una soluzione particolare del tipo $a \sin(2t) + b \cos(2t)$.

Esercizio 4.8. *Risolvi il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} x' = |x| \cos t - x \sin t\,, \\ x(0) = 1\,. \end{cases}$$

Notiamo che il membro destro è una funzione Lipschitziana rispetto alla variabile x e che $x = 0$ è una soluzione dell'equazione differenziale data. Quindi la soluzione del problema di Cauchy sarà sempre positiva (spiegare come esercizio di teoria il perché). Possiamo allora ignorare il valore assoluto. Notiamo inoltre che vale

$$|x \cos t - x \sin t| \le 2|x| + 0\,,$$

quindi abbiamo l'esistenza globale delle soluzioni dell'equazione differenziale, che quindi saranno definite su $\mathbb{R}$. Il problema di Cauchy da risolvere è quindi

$$\begin{cases} x' = x(\cos t - \sin t)\,, \\ x(0) = 1\,. \end{cases}$$

che si può risolvere facilmente essendo l'equazione differenziale a variabili separabili

$$\begin{aligned}\frac{x'(t)}{x(t)} &= \cos t - \sin t\\ \Rightarrow \ln(x(t)) &= \sin t + \cos t + c\\ \Rightarrow x(t) &= \mathrm{e}^{\sin t+\cos t+c}\,.\end{aligned}$$

Sostituendo i dati iniziali troviamo $c = -1$, quindi la soluzione risulta:

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sin t+\cos t-1}\,.$$

Esercizio 4.9. *Risolvi il seguente problema di Cauchy, sia con il metodo dell'Ansatz (detto anche metodo della somiglianza) che con il metodo di variazione delle costanti:*

$$\begin{cases} x'' - 8x' + 12x = e^{3t}\,,\\ x(0) = \frac{2}{3}\,,\\ x'(0) = -3\,. \end{cases}$$

L'equazione lineare omogenea associata ha integrale generale

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2\mathrm{e}^{6t}\,,$$

essendo 2 e 6 le soluzioni del polinomio caratteristico $\lambda^2 - 8\lambda + 12$ associato.

Tecnica dell'Ansatz: Proviamo a trovare una soluzione particolare dell'equazione lineare non omogenea con la funzione test $x_0(t) = A\mathrm{e}^{3t}$. Troviamo

$$x_0''(t) - 8x_0'(t) + 12x_0(t) = 9e^{3t} - 8\cdot 3e^{3t} + 12e^{3t} = -3Ae^{3t} = e^{3t}\,,$$

da cui deduciamo $A = -\frac{1}{3}$ e quindi la soluzione generica dell'equazione lineare non omogenea

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2\mathrm{e}^{6t} - \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\,.$$

Variazione delle costanti: Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1'\, e^{2t} + c_2'\, e^{6t} = 0\\ 2c_1'\, e^{2t} + 6c_2'\, e^{6t} = e^{3t} \end{cases}$$

che risolviamo usando il teorema di Cramer

$$D = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{6t}\\ 2e^{2t} & 6e^{6t}\end{vmatrix} = 4e^{8t} \qquad D_x = \begin{vmatrix} 0 & e^{3t}\\ 2e^{2t} & 6e^{6t}\end{vmatrix} = -\mathrm{e}^{9t} \qquad D_y = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{6t}\\ 0 & \mathrm{e}^{3t}\end{vmatrix} = e^{5t}$$

$$c_1'(t) = \frac{D_x}{D} = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{t} \quad \Rightarrow \quad c_1(t) = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{t} + d_1\,,$$

$$c_2'(t) = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3t} \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = -\frac{1}{12}\mathrm{e}^{-3t} + d_2\,.$$

Quindi abbiamo la soluzione

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(-\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{t} + d_1\right)\mathrm{e}^{2t} + \left(-\tfrac{1}{12}\mathrm{e}^{-3t} + d_2\right)\mathrm{e}^{2t}\\ &= d_1\mathrm{e}^{2t} + d_2\mathrm{e}^{6t} - \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\,.\end{aligned}$$

Una volta notato che l'integrale generale trovato con i due metodi è lo stesso, possiamo risolvere il problema di Cauchy. Dapprima calcoliamo la derivata della soluzione generica

$$x'(t) = 2c_1\mathrm{e}^{2t} + 6c_2\mathrm{e}^{6t} - \mathrm{e}^{3t}\,.$$

Quindi sostituendo i dati iniziali troviamo

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ x'(0) = 2c_1 + 6c_2 - 1 = -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + 6c_2 = -2 \end{cases}$$

da cui troviamo la soluzione $c_1 = 2$, $c_2 = -1$. La soluzione cercata (con intervallo massimale di esistenza $\mathbb{R}$) è quindi

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{6t} - \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\,.$$

Esercizio 4.10. *Risolvi il problema di Cauchy e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:*

$$\begin{cases} x' - \dfrac{1}{3}x = -2\mathrm{e}^t x^4\,, \\ x(0) = 1\,. \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli che si risolve dividendo per x^4 l'equazione differenziale e sostituendo quindi $y = x^{-3}$:

$$-3\frac{x'}{x^4} + \frac{1}{x^3} = 6e^t \qquad \overset{y=x^{-3}}{\Longrightarrow} \qquad y' + y = 6e^t\,.$$

La formula risolutiva ci dà

$$y(t) = e^{-t}\left[\int e^t \cdot 6e^t\,dt + c\right] = ce^{-t} + 3e^t\,.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = x(0)^{-3} = 1$ e troviamo $1 = y(0) = c + 3$ quindi $c = -2$ che dà la soluzione

$$y(t) = 3e^t - 2e^{-t}\,,$$

che porta a

$$x(t) = \left(3e^t - 2e^{-t}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

La soluzione ha intervallo massimale $I = (\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}, +\infty)$. A tale risultato si arriva individuando il dominio della soluzione e considerando l'intervallo aperto più grande contenuto nel dominio che contiene il punto $t = 0$.

Esercizio 4.11. *Risolvi il seguente problema di Cauchy e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:*

$$\begin{cases} x' + tx = \frac{t^3}{x}\,, \\ x(0) = -2\,. \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli che si risolve moltiplicando per x l'equazione differenziale e sostituendo quindi $y = x^2$:

$$x\,x' + tx^2 = t^3 \qquad \overset{y=x^2}{\Longrightarrow} \qquad y' = -2ty + 2t^3\,.$$

La formula risolutiva ci dà

$$y(t) = e^{-t^2}\left[\int e^{t^2} \cdot 2t^3\,dt + c\right] = e^{-t^2}\left[t^2e^{t^2} - e^{t^2} + c\right] = t^2 - 1 + ce^{-t^2}\,.$$

(svolgere i calcoli per esercizio). Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = x(0)^2 = 4$ e troviamo $c = 5$ che dà la soluzione

$$y(t) = t^2 - 1 + 5e^{-t^2}\,,$$

che porta a

$$x(t) = -\sqrt{t^2 - 1 + 5e^{-t^2}}$$

La soluzione ha intervallo massimale $I = \mathbb{R}$. Infatti l'argomento della radice è sempre positivo: infatti, se $|x| \le 1$ allora $5e^{-t^2} + t^2 \ge 5e^{-t^2} \ge 5e^{-1} > 1$, mentre se $|x| > 1$ allora $t^2 + 5e^{-t^2} > t^2 > 1$.

Esercizio 4.12. *Risolvi il problema di Cauchy e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x'' - x' + x = t\,, \\ x(0) = 4\,, \qquad x'(0) = 8\,. \end{cases}$$

Innanzitutto è conveniente riscrivere l'equazione differenziale come $x'' - 2x' + 2x = 2t$. Troviamo il polinomio caratteristico associato $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ che ha soluzioni $1 \pm i$. Quindi le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono

$$c_1 e^t \sin t + c_2 e^t \cos t\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Cerchiamo la soluzione particolare come un polinomio di primo grado del tipo $x(t) = At + B$ con derivate $x'(t) = A$ e $x''(t) = 0$. Sostituendo queste funzioni nell'equazione differenziale troviamo

$$x'' - 2x' + 2x = -2A + 2At + B = 2t$$

da cui deduciamo che $A = B = 1$. L'integrale generale risulta quindi

$$x(t) = 1 + t + c_1 e^t \sin t + c_2 e^t \cos t\,,$$

con derivata

$$x'(t) = 1 + c_1 e^t (\sin t + \cos t) + c_2 e^t (\cos t - \sin t)\,.$$

Sostituendo i dati iniziali troviamo le identità

$$4 = x(0) = c_2 + 1\,, \quad 8 = x'(0) = c_1 + c_2 + 1\,,$$

che portano alla soluzione $c_1 = 4$, $c_2 = 3$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = 1 + t + 3e^t \sin t + 4e^t \cos t\,.$$

Infine, l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è ovviamente $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.13. *Risolvi il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+t}}\,, \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

e determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione. Disegna l'insieme su cui è ben definita l'equazione differenziale.

L'equazione differenziale è ben definita per

$$\frac{1+x}{1+t} \geq 0$$

ovvero nell'insieme

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : (t > -1 \wedge x \geq -1) \vee (t < -1 \wedge x \leq -1)\}\,.$$

L'equazione differenziale è a variabili separabili e, notato che $t_0 = 0 > -1$ e $x(t_0) = 3 \geq -1$ si risolve nel modo seguente

$$\begin{aligned} \frac{x'}{\sqrt{1+x}} &= \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,, \\ \tfrac{1}{2}\sqrt{1+x} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{1+t} + d\,, \\ \sqrt{1+x} &= \sqrt{1+t} + c\,, \qquad (c = 2d)\,. \end{aligned}$$

Sostituendo i dati iniziali troviamo l'identità $2 = 1 + c$ che ci porta a $c = 1$. Isoliamo ora la variabile x ottenendo la soluzione

$$x(t) = \left(\sqrt{1+t} + 1\right)^2 - 1$$

definita sull'intervallo massimale $I = (-1, +\infty)$ (deve essere aperto! Infatti in -1 la funzione non risulta derivabile).

Esercizio 4.14. *Risolvi i seguenti problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = t^{-1} + \mathrm{e}^{-x} \\ x(1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -t^{-1} + \mathrm{e}^{-x} \\ x(1) = -2\ln 2 \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza.

Suggerimento: Introdurre la funzione $y(t) = \mathrm{e}^{x(t)}$, quindi esprimere y' in funzione di y e t, usando l'equazione differenziale data. Si otterrà un'equazione differenziale lineare nella variabile y.

Notiamo innanzitutto che, nei due casi,

$$y'(t) = \mathrm{e}^{x(t)}x'(t) = \mathrm{e}^{x(t)}\left(t^{-1} + \mathrm{e}^{-x(t)}\right) = \frac{y(t)}{t} + 1\,,$$

$$y'(t) = \mathrm{e}^{x(t)}x'(t) = \mathrm{e}^{x(t)}\left(-t^{-1} + \mathrm{e}^{-x(t)}\right) = -\frac{y(t)}{t} + 1\,,$$

mentre i dati iniziali diventano $y(1) = 1$ e $y(1) = \frac{1}{4}$. Quindi dobbiamo risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t} + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = -\frac{y}{t} + 1 \\ y(1) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Notiamo che il problema non è definito per $t = 0$, quindi la soluzione sarà definita in un sottinsieme di $\mathbb{R}^+$. Ci concentreremo solo su "tempi positivi" nei prossimi passaggi.

Data un'equazione lineare del tipo $y' = a(t)y + b(t)$ la soluzione è data da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}[B(t) + c]\,, \quad A(t) = \int a(t)\,dt\,, \quad B(t) = \int \mathrm{e}^{-A(t)}b(t)\,dt\,.$$

Primo problema di Cauchy. In questo caso troviamo $A(t) = \ln t$ da cui $\mathrm{e}^{A(t)} = t$, $\mathrm{e}^{-A(t)}b(t) = \frac{1}{t}$ e infine $B(t) = \ln t$. Quindi la soluzione è del tipo

$$y(t) = t(\ln t + c)$$

Sostituendo i dati inziali abbiamo $1 = y(1) = 1(0 + c)$ quindi $c = 1$. Ritornando alla variabile x abbiamo la soluzione

$$x(t) = \ln\left(t(\ln t + 1)\right)$$

che è ben definita quando l'argomento del logaritmo è positivo. Ricordando che abbiamo già notato che dobbiamo prendere $t > 0$ concludiamo che dobbiamo chiedere anche $\ln t + 1 > 0$ ovvero $t > \mathrm{e}^{-1}$. Quindi l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è $I = (\mathrm{e}^{-1}, +\infty)$.

Secondo problema di Cauchy. In questo caso troviamo $A(t) = -\ln t$ da cui $\mathrm{e}^{A(t)} = \frac{1}{t}$, $\mathrm{e}^{-A(t)}b(t) = t$ e infine $B(t) = t^2/2$. Quindi la soluzione è del tipo

$$y(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)$$

Sostituendo i dati inziali abbiamo $\frac{1}{4} = y(1) = 1(\frac{1}{2} + c)$ quindi $c = -\frac{1}{4}$. Ritornando alla variabile x abbiamo la soluzione

$$x(t) = \ln\left(\frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\frac{1}{t}\right)$$

che è ben definita quando l'argomento del logaritmo è positivo. Ricordando che abbiamo già notato che dobbiamo prendere $t > 0$ concludiamo che dobbiamo chiedere anche $t^2 - \frac{1}{2} > 0$, che si traduce in $t > 2^{-1/2}$. Quindi l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è $I = (2^{-1/2}, +\infty)$.

Esercizio 4.15. *Risolvi il seguente problema di Cauchy, al variare di $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{cases} x'' + 3x' + 2x = \mathrm{e}^{-t} \\ x(0) = x_0\,, \quad x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Determinare i valori (x_0, v_0) per cui si ha $x(\pi) = 0$ e $x'(\pi) = 0$.

Scriviamo il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea $x''+3x'+2x=0$: $\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)$, troviamo le soluzioni $\lambda=-1,-2$, quindi l'equazione omogenea ha soluzioni del tipo $x(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}$. Il forzante è esso stesso una soluzione dell'omogenea, quindi dobbiamo usare la funzione $x(t)=Cte^{-t}$ per il metodo della somiglianza. Otteniamo, sostituendola nell'equazione differenziale

$$(-2Ce^{-t}+Cte^{-t})+3(Ce^{-t}-Cte^{-t})+2Cte^{-t}=e^{-t}$$

da cui abbiamo troviamo $C=1$. La soluzione generica di $x''+3x'+2x=e^{-t}$ è quindi

$$x(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}+te^{-t}$$

con derivata

$$x'(t)=-Ae^{-t}-2Be^{-2t}+e^{-t}-te^{-t}\,.$$

Sostituendo i dati iniziali abbiamo il sistema

$$x_0=A+B\,,v_0=-A-2B+1$$

da cui otteniamo

$$A=2x_0+v_0-1\,,\quad B=1-x_0-v_0\,.$$

Quindi la soluzione sarà

$$x(t)=(2x_0+v_0-1)e^{-t}+(1-x_0-v_0)e^{-2t}+te^{-t} \tag{7}$$

$$x'(t)=-(2x_0+v_0-1)e^{-t}-2(1-x_0-v_0)e^{-2t}+e^{-t}-te^{-t}\,. \tag{8}$$

Valutando in $t=\pi$ queste funzioni troviamo, mantenendo le notazioni con A,B, dopo aver moltiplicato tutto per e^{π},

$$0=A+Be^{-\pi}+\pi\,,\qquad 0=-A-2Be^{-\pi}+1-\pi$$

da cui troviamo $B=e^{\pi}$ e $A=-\pi-1$. Quindi

$$x(t)=-(\pi+1)e^{-t}+e^{\pi}e^{-2t}+te^{-t}$$

$$x'(t)=(\pi+1)e^{-t}-2e^{\pi}e^{-2t}+e^{-t}-te^{-t}\,.$$

Valutando in zero, troviamo $x_0=e^{\pi}-\pi-1$ e $v_0=\pi+2-2e^{\pi}$. Valutare le formule (7) and (8) in $t=\pi$ per poi risolvere il sistema può essere un'alternativa possibile.

4.3 A.A. 2020/2021

Esercizio 4.16. *Risolvi il seguente problema di Cauchy, al variare di $x_0\in\mathbb{R}^+,y_0\in\mathbb{R}^+$,*

$$\begin{cases}x''+(x')^3=0\\ x(0)=x_0\,,\quad x'(0)=-v_0\end{cases}$$

Qual è l'intervallo massimale di esistenza della soluzione?
Determinare, se esistono, gli istanti $\tau>0$ in cui si ha $x(\tau)=0$.

Poniamo $y=x'$ e troviamo che l'equazione differenziale risulta $y'=-y^3$. Poiché il dato iniziale $x'(0)=y(0)=-v_0\neq 0$ possiamo risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases}y'=-y^3\\ y(0)=-v_0\end{cases}$$

usando il metodo di separazione delle variabili e ottenere

$$-\frac{y'(t)}{[y(t)]^3}=1\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{[y(t)]^2}=2t+c$$

da cui si ottiene, sostituendo il dato iniziale

$$c=\frac{1}{v_0^2}\,.$$

Ricordando che la funzione cercata sarà negativa (essendo negativa all'istante iniziale) troviamo

$$x'(t) = y(t) = -(2t + \tfrac{1}{v_0^2})^{-1/2}\,, \quad \forall t \in I = (-\tfrac{1}{2v_0^2}, +\infty)$$

dove I è l'intervallo massimale di esistenza. Calcoliamo quindi

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)\,ds = x_0 - \int_0^t (2s + \tfrac{1}{v_0^2})^{-1/2}\,ds = x_0 - \sqrt{2t + \tfrac{1}{v_0^2}} + \tfrac{1}{v_0}$$

anch'essa definita sull'intervallo massimale $I = (-\frac{1}{2v_0^2}, +\infty)$. Cerchiamo ora gli istanti τ richiesti ponendo

$$0 = x(\tau) = x_0 - \sqrt{2\tau + \tfrac{1}{v_0^2}} + \tfrac{1}{v_0}$$

che porta a

$$2\tau + \tfrac{1}{v_0^2} = \left(x_0 + \tfrac{1}{v_0}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \tfrac{x_0^2}{2} + \tfrac{x_0}{v_0}\,.$$

Esercizio 4.17. *Risolvi i seguenti problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \cos^2 x\ \sin^2 t\,, \\ x(\pi) = \pi\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = [\sin(t+x) + \sin(t-x)]^2\,, \\ x(\pi) = \pi\,. \end{cases}$$

Quali sono gli intervalli massimali di esistenza delle soluzioni?

Osserviamo innanzitutto che il primo problema può essere riscritto come

$$\sin(t+x) + \sin(t-x) = 2\sin t \cos x$$

cosicché il secondo problema diventerà

$$\begin{cases} x' = 4\cos^2 x\ \sin^2 t\,, \\ x(\pi) = \pi\,. \end{cases}$$

Dalla teoria sappiamo già che l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni sarà $\mathbb{R}$ (perché?). Consideriamo l'equazione differenziale

$$x' = \alpha \cos^2 x\ \sin^2 t$$

dove nel nostro caso avremo $\alpha = 1$ oppure $\alpha = 4$ nei due casi. Poiché $\cos\pi = -1 \neq 0$, possiamo scrivere

$$\frac{x'(t)}{\cos^2(x(t))} = \alpha \sin^2 t$$

da cui, calcolando le primitive, otteniamo

$$\tan(x(t)) = \alpha\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t) + c\right)$$

e sostituendo i dati iniziali

$$0 = \tan\pi = \alpha\left(\frac{\pi}{2} + 0 + c\right),$$

quindi $c = -\frac{\pi}{2}$ e otteniamo la soluzione

$$x(t) = \arctan\left(\alpha(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}\sin(2t) - \tfrac{\pi}{2})\right) + \pi$$

facendo attenzione che dobbiamo invertire la tangente nell'intervallo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$:

$$y = \tan x \quad \Rightarrow \quad x = \arctan y + \pi\,.$$

Si noti che se dimenticassimo di aggiungere π troveremmo $x(\pi) = 0$ e non $x(\pi) = \pi$ come richiesto.

Esercizio 4.18. *Data l'equazione differenziale* $x' = (x^2-4)\cos(4t)$*, calcolare le soluzioni dei problemi di Cauchy (e specificare per ognuna il suo intervallo massimale di esistenza) aventi dati iniziali*

$$x(\pi) = 1\,, \qquad x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\,, \qquad x\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4\,.$$

Cominciamo a notare innanzitutto che il secondo problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = (x^2-4)\cos(4t)\,, \\ x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2 \end{cases}$$

ha per soluzione la funzione costante $x(t) = -2$ con intervallo massimale di esistenza $\mathbb{R}$. Negli altri possiamo usare il metodo di separazione delle variabili e scrivere

$$\frac{x'(t)}{[x(t)]^2-4} = \cos(4t)\,. \tag{9}$$

Calcoliamo la primitiva

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C\,.$$

Dalla (9) segue che

$$\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \sin(4t) + c \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x-2}{x+2}\right| = A\mathrm{e}^{\sin(4t)} \qquad (A = \mathrm{e}^c)$$

Sostituendo il dato iniziale $x(\pi) = 1$ troviamo

$$\frac{x-2}{x+2} = -\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\sin(4t)}$$

Invece, sostituendo il dato iniziale $x(-\pi/4) = -4$ troviamo

$$\frac{x-2}{x+2} = 3\mathrm{e}^{\sin(4t)}$$

Calcoliamo la seguente inversa

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = 2\,\frac{1+y}{1-y}$$

così da ottenere le due soluzioni nell'ordine

$$x(t) = 2\,\frac{1-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\sin(4t)}}{1+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\sin(4t)}}\,, \quad \text{condizione iniziale: } x(\pi) = 1$$

$$x(t) = 2\,\frac{1+3\mathrm{e}^{\sin(4t)}}{1-3\mathrm{e}^{\sin(4t)}}\,, \quad \text{condizione iniziale: } x(-\pi/4) = -4\,.$$

La prima ha intervallo massimale di esistenza $\mathbb{R}$. La seconda è definita nel più grande intervallo aperto contenente l'istante iniziale $-\frac{\pi}{4}$ e che non contiene soluzioni di $1 - 3\mathrm{e}^{\sin(4t)} = 0$. Notiamo però che

$$1 - 3\mathrm{e}^{\sin(4t)} < 1 - 3\mathrm{e}^{-1} < 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi, anche in questo caso, l'intervallo massimale di esistenza è $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.19. *Risolvi il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x''' + x' - 1 = 0\,, \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 1\,. \end{cases}$$

L'equazione differenziale si può riscrivere come $x''' + x' = 1$. Possiamo già afferamre che l'intervallo massimale di esistenza sarà $\mathbb{R}$. L'omogenea associata ha polinomio caratteristico $\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1)$ con soluzioni $0, \pm i$. L'equazione differenziale $x''' + x' = 0$ ha quindi soluzioni del tipo

$$A \sin t + B \cos t + C$$

con $A, B, C \in \mathbb{R}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione differenziale $x''' + x' = 1$ provando con la funzione test $\bar{x}(t) = \alpha t$. Sostituendo $\bar{x}$ nell'equazione troviamo che deve essere $\alpha = 1$. Le soluzioni di $x''' + x' = 1$ sono tutte del tipo

$$x(t) = A \sin t + B \cos t + C + t$$

e ne calcoliamo le derivate

$$x'(t) = A \cos t - B \sin t + 1\,,$$
$$x''(t) = -A \sin t - B \cos t\,.$$

Sostituiamo i dati iniziali e troviamo il sistema

$$\begin{cases} x(0) = 1 = B + C \\ x'(0) = 1 = A + 1 \\ x''(0) = 1 = -B \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C = 2 \\ A = 0 \\ B = -1 \end{cases}$$

che dà la soluzione

$$x(t) = 2 - \cos t + t\,.$$

Esercizio 4.20. *Risolvi il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'' - x = 6\mathrm{e}^t\,, \\ x(0) = 8\,, \\ x'(0) = 9\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.21. *Data l'equazione differenziale*

$$x' = t(2 + x - x^2)$$

determina le soluzioni dei problemi di Cauchy aventi condizioni iniziali

$$[a]\ x(0) = 0\,, \qquad [b]\ x(1) = -1\,, \qquad [c]\ x(0) = -2\,,$$
$$[d]\ x(-2) = 2\,, \qquad [e]\ x(0) = 3\,, \qquad [f]\ x\left(\sqrt{2\ln 2}\right) = 3\,.$$

Di ognuna di esse determina l'intervallo massimale di esistenza.

4.4 A.A. 2021/2022

Esercizio 4.22. *Data una costante $K > 0$, considera l'equazione differenziale*

$$x' = x\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Determina se essa ammette soluzioni costanti e in caso affermativo specifica quali sono. Risolvi i problemi di Cauchy associati alla precedente equazione differenziale aventi dati iniziali

$$[a]\ x(0) = \frac{K}{2}\,, \quad [b]\ x(0) = 2K\,, \quad [c]\ x(0) = -K\,.$$

Di ognuna di esse determina l'intervallo massimale di esistenza.

Esercizio 4.23. *Trova tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale e specifica per ognuna l'intervallo massimale di esistenza*

$$x'' + 3x' + 2x = \left(1 - \mathrm{e}^{2t}\right)^{-1/2}.$$

L'equazione omogenea associata $x'' + 3x' + 2x = 0$ ha polinomio caratteristico $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$ che ha radici -1 e -2. Di conseguenza essa ha soluzioni del tipo

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 \mathrm{e}^{-2t} .$$

Usiamo il metodo di variazione delle costanti per cercare una soluzione dell'equazione non omogenea. Troviamo quindi

$$c_1'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-2t} \\ \left(1 - \mathrm{e}^{2t}\right)^{-1/2} & -2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-t} & -2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}} = \frac{\frac{-\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2t}}}}{-\mathrm{e}^{-3t}} = \frac{\mathrm{e}^{t}}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2t}}}$$

$$c_2'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ -\mathrm{e}^{-t} & \left(1 - \mathrm{e}^{2t}\right)^{-1/2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-t} & -2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}} = \frac{\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2t}}}}{-\mathrm{e}^{-3t}} = -\frac{\mathrm{e}^{2t}}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2t}}}$$

di cui dobbiamo calcolare le primitive. In entrambi i casi effettueremo un cambio di variabile:

$$c_1(t) = \int \frac{\mathrm{e}^{t}}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2t}}}\, dt \overset{y=\mathrm{e}^t}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\, dy = \arcsin(y) + d_1 = \arcsin(e^t) + d_1$$

$$c_2(t) = \int -\frac{\mathrm{e}^{2t}}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2t}}}\, dt \overset{y=\mathrm{e}^{2t}}{=} -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1 - y}} = \sqrt{1 - y} + d_2 = \sqrt{1 - \mathrm{e}^{2t}} + d_2$$

Quindi le soluzioni dell'equazione differenziale sono del tipo

$$x(t) = \left(\arcsin(e^t) + d_1\right) \mathrm{e}^{-t} + \left(\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2t}} + d_2\right) \mathrm{e}^{-2t} .$$

Trattandosi di un'equazione lineare (del secondo ordine) vale il teorema di esistenza globale, quindi l'intervallo massimale di esistenza sarà suggerito dal dominio della funzione forzante

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2t}}}$$

ovvero l'insieme $I =]-\infty, 0[$.

Esercizio 4.24. *Risolvi il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' - 2tx = e^{t^2} \\ x(1) = 2e \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine $x' = a(t)x + b(t)$ con $a(t) = 2t$ e $b(t) = e^{t^2}$. Una primitiva della funzione a è $A(t) = t^2$. Successivamente calcoliamo una primitiva della funzione $e^{-A(t)}b(t) = 1$ e troviamo $B(t) = t$. Le soluzioni dell'equazione differenziale sono del tipo

$$x(t) = e^{A(t)}[B(t) + c] = e^{t^2}(t + c)$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo

$$2e = x(1) = e(1 + c) \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

e quindi la soluzione risulta

$$x(t) = e^{t^2}(t + 1) .$$

Esercizio 4.25. *Risolvi il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{3x'}{x+4} \\ x(0) = -10 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione a variabili separabile e ottenere

$$3\int \frac{x'(t)}{x(t)+4}\,dt = \int 1\,dt \quad \Rightarrow \quad 3\ln|x(t)+4| = t + c \quad \Rightarrow \quad |x(t)+4| = e^{\frac{1}{3}(t+c)}$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo

$$|-10+4| = e^{\frac{1}{3}(0+c)} \quad \Rightarrow \quad 6 = e^{\frac{c}{3}} \quad \Rightarrow \quad c = 3\ln 6\,.$$

Infine, prestando attenzione al segno

$$x(t) = -4 - e^{\frac{1}{3}(t+3\ln 6)} = -4 - 6e^{\frac{t}{3}}\,.$$

Strategia alternativa: la soluzione in un intorno di $t = 0$ assumerà valori in un intorno di $x = -10$. Quindi il denominatore nell'equazione differenziale non si annullerà e possiamo moltiplicare e trovare l'equazione differenziale lineare

$$3x' = x + 4$$

che può essere risolta come nell'esercizio precedente. Si consiglia, di impostare il calcolo anche tramite il polinomio caratteristico e il metodo della somiglianza (anche se per un'equazione lineare del primo ordine è un po' uno spreco di energie).

Esercizio 4.26. *Trova le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$x'' - 2x' = t + e^t\,.$$

Trattandosi di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine dobbiamo dapprima trovare le soluzioni dell'omogenea associata: $x'' - 2x' = 0$. Troviamo il polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2\lambda$ che ha radici 0 e 2. Quindi le soluzioni dell'omogenea sono $x_o(t) = c_1 + c_2e^{2t}$. Le soluzioni richieste saranno del tipo

$$x(t) = x_o(t) + x_1(t) + x_2(t)$$

dove x_1 è soluzione di $x'' - 2x' = t$ e x_2 è soluzione di $x'' - 2x' = e^t$. Per entrambe useremo il metodo della somiglianza.

Per la prima equazione dobbiamo provare impostando $x_1(t) = t(At+B)$, dato che *siamo in risonanza* essendo la costante 1 soluzione dell'omogenea associata. Essendo $x_1'(t) = 2At + B$ e $x_1''(t) = 2A$ troviamo

$$(2A) - 2(2At + B) = t \quad \Rightarrow \quad -4At + (2A - 2B) = t$$

da cui troviamo $A = B = -\frac{1}{4}$ ovvero $x_1(t) = -\frac{1}{4}(t^2 + t)$.

Per la seconda equazione dobbiamo provare impostando $x_2(t) = Ce^t$. Essendo $x_2'(t) = x_2''(t) = Ce^t$ troviamo

$$Ce^t - 2Ce^t = e^t \quad \Rightarrow \quad -Ce^t = e^t$$

da cui troviamo $C = -1$ ovvero $x_2(t) = -e^t$. Concludiamo quindi che le soluzioni sono del tipo

$$x(t) = c_1 + c_2e^{2t} - \frac{1}{4}(t^2 + t) - e^t\,.$$

Esercizio 4.27. *Risolvi il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = e^t\,, \\ y(0) = 0\,, \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

4.5 A.A. 2022/2023

Esercizio 4.28. *Scrivi la soluzione generale dell'equazione differenziale* $x'' + (2k+6)x' + 12kx = 0$ *al variare del parametro* $k \in \mathbb{R}$. *Poi, determina un valore del parametro* k *per cui la funzione* $x(t) = e^{t^2}$ *è una soluzione dell'equazione*

$$x'' + (2k+6)x' + 12kx = (4t^2 + 8t - 10)e^{t^2}\,.$$

Infine per tale valore di k *scrivi la soluzione del problema di Cauchy con condizioni iniziali* $x(0) = 2$ *e* $x'(0) = -4$.

Cerchiamo dapprima le soluzioni del polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + 2(k+3)\lambda + 12k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -(k+3) \pm \sqrt{(k+3)^2 - 12k} = -(k+3) \pm \sqrt{(k-3)^2} = -(k+3) \pm |k-3|$$

Se $k = 3$ troviamo -6 come soluzione doppia, quindi in questo caso le soluzioni sono del tipo $(A + Bt)\mathrm{e}^{-6t}$. Se invece $k \neq 3$ abbiamo le soluzioni -6 e $-2k$, e quindi le soluzioni sono del tipo $A\mathrm{e}^{-6t} + B\mathrm{e}^{-2kt}$.

Per la seconda parte dell'esercizio basta sostituire $x(t) = \mathrm{e}^{t^2}$ nell'equazione dove, dopo aver calcolato le derivate $x'(t) = 2t\mathrm{e}^{t^2}$ $x''(t) = (2 + 4t^2)\mathrm{e}^{t^2}$, troviamo

$$\mathrm{e}^{t^2}[(2+4t^2) + (2k+6)2t + 12k] = (4t^2 + 8t - 10)\mathrm{e}^{t^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{t^2}[t(4k+4) + (12k+12)] = 0\,.$$

Poiché l'equazione deve essere valida per ogni $t \in \mathbb{R}$, deduciamo che deve essere $k = -1$. L'equazione differenziale lineare non omogenea data per $k = -1$ ha quindi la generica soluzione

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-6t} + B\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{t^2}\,.$$

Per rispondere all'ultima parte dell'esercizio calcoliamo la derivata $x'(t) = -6A\mathrm{e}^{-6t} + 2B\mathrm{e}^{2t} + 2t\mathrm{e}^{t^2}$, e sostituiamo il valore $t = 0$ trovando le due equazioni

$$\begin{cases} 2 = x(0) = A + B + 1 \\ -4 = -6A + 2B \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A + B = 1 \\ -6A + 2B = -4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (A, B) = (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4})$$

e quindi la soluzione richiesta è

$$x(t) = \tfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-6t} + \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{t^2}\,.$$

Esercizio 4.29. *Dato il problema*

$$\begin{cases} yy'(e^{-x} + 1) - 1 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

esso ammette almeno una soluzione? Se esiste, è unica? Se esiste, determina una soluzione e il suo intervallo massimale di esistenza (può essere utile sapere che $\ln 2 \sim 0,693$*).*

Per poter affermare che la soluzione esiste ed è unica dobbiamo mostrare che è possibile mettere in forma esplicita $x' = f(t, x)$ l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{1}{y}\,\frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}\,.$$

L'equazione differenziale si risolve per separazione delle variabili

$$yy' = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = \ln(\mathrm{e}^x + 1) + c$$

essendo

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^{-x} + 1}\,dx = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = \ln(\mathrm{e}^x + 1) + c\,.$$

Possiamo sostituire già ora i dati iniziali e ottenere

$$\tfrac{1}{2}y^2 = \ln(\mathrm{e}^x + 1) + c \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2} = \ln 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = \tfrac{1}{2} - \ln 2$$

Isolando la y (e ricordando che la soluzione è negativa per $t = 0$) troviamo

$$y(t) = -\sqrt{2(\ln(e^x + 1) + \tfrac{1}{2} - \ln 2)}\,.$$

L'intervallo massimale di esistenza è suggerito dalla disequazione che rappresenta i valori per cui la radice quadrata è ben definita e derivabile

$$\ln(e^x + 1) + \tfrac{1}{2} - \ln 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(e^x + 1) > \ln 2 - \tfrac{1}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad e^x + 1 > 2e^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad x > \ln(2e^{-1/2} - 1)\,.$$

Quindi $I =]\ln(2e^{-1/2} - 1), +\infty[$.

Esercizio 4.30. *Risolvi il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'' + x' - 6x = 24 \sinh t\,, \\ x(0) = -1\,, x'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.31. *Risolvi il seguente problema di Cauchy e indica l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:*

$$\begin{cases} tx' + 3x = \dfrac{\sin t}{t^2}\,, \\ x(\pi/2) = 1\,. \end{cases}$$

Risoluzione omessa. Tuttavia si noti che, dovendo essere $t \neq 0$, possiamo scrivere l'equazione come

$$x' + 3\frac{x}{t} = \frac{\sin t}{t^3}$$

ottenendo un'equazione lineare del primo ordine risolvibile facilmente. L'intervallo massimale di esistenza è individuabile a priori grazie alla teoria senza fare calcoli: $I =]0, +\infty[$.

Esercizio 4.32. *Trova le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$x'' + 8x' + 25x = \sin t\,.$$

Quindi individua la soluzione che rispetta le condizioni iniziali $x(0) = 19/80$ e $x'(0) = -1$.

La risoluzione è omessa. Risposta:

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{-4t}\cos(3t) - \frac{1}{80}e^{-4t}\cos(3t) - \frac{1}{80}\cos(t) + \frac{3}{80}\sin(t)\,.$$

Esercizio 4.33. *Calcola la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} tx^2 + t + t^2 x x' - x x' = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale di esistenza.

L'equazione differenziale si può scrivere a variabili separabili come

$$x' = \frac{x^2 + 1}{x}\,\frac{t}{1 - t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x x'}{x^2 + 1} = \frac{t}{1 - t^2}$$

(si noti che deve valere $x \neq 0$ e $t \neq \pm 1$) da cui troviamo le primitive (possiamo porre $A = e^c$)

$$\ln(1 + x^2) = -\ln|1 - t^2| + c \quad \Rightarrow \quad 1 + x^2 = A|1 - t^2|^{-1} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \sqrt{\frac{A}{|1 - t^2|} - 1}$$

ricordando che la funzione sarà positiva visto il dato iniziale $x(0) = 1 > 0$. Sostituendo il dato iniziale otteniamo

$$1 = x(0) = \sqrt{\frac{A}{|1 - 0|} - 1} \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

e quindi

$$x(t) = \sqrt{\frac{2}{1 - t^2} - 1} = \sqrt{\frac{1 + t^2}{1 - t^2}}$$

(dove abbiamo rimosso il valore assoluto perché nell'intervallo massimale di esistenza l'argomento del valore assoluto manterrà il suo segno). L'intervallo massimale di esistenza della soluzione risulta $I =]-1, 1[$.

4.6 A.A. 2023/2024

Esercizio 4.34. *Calcola la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'' - x = 2t \\ x(0) = 4 \\ x'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.35. *Trovare la soluzione u_a del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'' + 4u = \cos(at) \\ u(0) = 0\,, \quad u'(0) = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$. Per quali valori di a la soluzione u_a non è limitata?

Si dà di seguito una traccia della risoluzione. Se $a = 2$ allora la funzione $\cos(at) = \cos(2t)$ è soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata. Per questo motivo si usa il metodo della somiglianza con la funzione test $u(t) = At\sin(2t) + Bt\cos(2t)$ per trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale. Con un po' di calcoli si arriva a trovare $A = 1/4$ e $B = 0$. Successivamente usando le condizioni iniziali si perviene alla soluzione del problema di Cauchy $u(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{4}t\sin(2t)$. In questo caso si nota che la funzione non è limitata.

Se invece $a \neq 2$ usiamo il metodo della somiglianza con la funzione test $u(t) = A\sin(at) + B\cos(at)$ per trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale. Con un po' di calcoli si arriva a trovare $A = 0$ e $B = 1/(4 - a^2)$. Successivamente usando le condizioni iniziali si perviene alla soluzione del problema di Cauchy $u(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{a^2-4}\cos(2t) + \frac{1}{4-a^2}\cos(at)$. In questo caso si nota che la funzione è limitata.

Esercizio 4.36. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u''' - u = 1 \\ u(0) = 0\,,\, u'(0) = 1\,,\, u''(0) = 0 \end{cases}$$

Con il metodo della somiglianza, cerchiamo una soluzione particolare $u_0(t)$ che sia un polinomio di grado zero (ovvero una costante). Con un calcolo facile troviamo $u_0(t) = -1$.

Essendo $\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$ il polinomio caratteristico, deduciamo che le soluzioni dell'equazione differenziale sono del tipo

$$u(t) = Ae^t + Be^{-t/2}\sin(\sqrt{3}\,t/2) + Ce^{-t/2}\cos(\sqrt{3}\,t/2) - 1\,.$$

(Durante la correzione delle prove scritte inaspettatamente abbiamo riscontrato un numero decisamente elevato di studenti convinti che questo polinomio abbia il valore 1 come radice tripla.)

Per determinare le costanti reali A, B, C calcoliamo le derivate seguenti, che poi dovremo valutare per $t = 0$,

$$u'(t) = Ae^t + B\left[-\frac{1}{2}e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}\,t/2) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}\,t/2)\right] + C\left[-\frac{1}{2}e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}\,t/2) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}\,t/2)\right]$$

e

$$u''(t) = Ae^t + B\left[-\frac{1}{2}e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}\,t/2) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}\,t/2)\right] + C\left[-\frac{1}{2}e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}\,t/2) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}\,t/2)\right].$$

Il calcolo è un po' lungo ma si possono adottare i seguenti trucchi:

1) nel calcolo della derivata seconda, dato che poi dovremo valutarla in zero, possiamo soprassedere sul calcolo preciso degli addendi che coinvolgono i seni in quanto questi daranno uno zero come fattore.

2) le funzioni $e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}\,t/2)$ e $e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}\,t/2)$ risolvono l'equazione differenziale $u'' + u' + u = 0$ (ce lo suggerisce la scomposizione del polinomio caratteristico), quindi possiamo calcolare la derivata seconda come $u'' = -u' - u$.

Valutando in zero le funzioni u, u', u'' e usando le condizioni iniziali otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ A + \frac{\sqrt{3}}{2}B - \frac{1}{2}C = 1 \\ A - \frac{\sqrt{3}}{2}B - \frac{1}{2}C = 0 \end{cases}$$

che può essere risolto iniziando col sommare e sottrarre le ultime due righe. Troviamo, ormai facilmente, i valori $(A, B, C) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Esercizio 4.37. *Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:*

$$\begin{cases} u' = u^2 - u - 2 \\ u(0) = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = u^2 - u - 2 \\ u(0) = 3 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni.

L'equazione differenziale è a variabili separabili e, dopo aver notato che la soluzione cercata non può essere una costante, si risolve nel modo seguente (alcuni calcoli sono lasciati per esercizio)

$$\begin{aligned} \frac{u'}{u^2 - u - 2} &= 1 \\ \int \frac{du}{u^2 - u - 2} &= \int 1\, dt \\ \vdots &= t + c \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{u-2}{u+1} \right| &= t + c \\ \frac{u-2}{u+1} &= Ae^{3t} \\ u(t) &= \frac{2 + Ae^{3t}}{1 - Ae^{3t}} \end{aligned}$$

Per trovare la corretta costante A, conviene sostituire i dati iniziali nella penultima equazione. Per il primo problema di Cauchy troviamo $A = 4$, per il secondo troviamo $A = 1/4$. Le soluzioni sono quindi rispettivamente

$$u(t) = \frac{2 + 4e^{3t}}{1 - 4e^{3t}} \qquad u(t) = \frac{2 + \frac{1}{4}e^{3t}}{1 - \frac{1}{4}e^{3t}}$$

I denominatori si annullano rispettivamente in $t = -\frac{2}{3}\ln 2 < 0$ e $t = \frac{2}{3}\ln 2$. Da ciò deduciamo che gli intervalli massimali di esistenza sono rispettivamente $]-\frac{2}{3}\ln 2, +\infty[$ e $]-\infty, \frac{2}{3}\ln 2[$.

Esercizio 4.38. *Calcola la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{\cos x}{\sin x}\, y' \\ y(\pi/3) = 2 \\ y'(\pi/3) = 3 \end{cases}$$

e specifica qual è il suo intervallo massimale di esistenza.

Risoluzione omessa. Suggerimento: porre $z = y'$ e ottenere un'equazione a variabili separabili in *forma standard*.

4.7 A.A. 2024/2025

Esercizio 4.39. *Calcola la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' + x = x^2 e^t \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

e specifica qual è il suo intervallo massimale di esistenza.

Esercizio 4.40. *Dimostra che la funzione* $5e^{2t}$ *è soluzione dell'equazione differenziale*

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0\,.$$

Risolvi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''' - 6x'' + 11x' - 6x = e^t, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 3/2, \quad x''(0) = 8. \end{cases}$$

Esercizio 4.41. *Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' + \dfrac{tx}{1+t^2} = 3t \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

Esercizio 4.42. *Risolvi il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} 4x'' - x = e^t\,, \\ x(0) = 1\,, x'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.43. *Risolvi il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sin t}{x^3(1+\cos^2 t)} \\ x(\pi/2) = 1 \end{cases}$$

determinando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Esercizio 4.44. *Risolvi il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'' - 4x' + 3x + 6 = 0 \\ x(0) = 4\,, x'(0) = 10 \end{cases}$$

4.8 A.A. 2025/2026

Esercizio 4.45. *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{t\sqrt{1-x^2}}{1+2t^2} \\ \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

soddisfa le condizioni di Lipschitz? Se una funzione x risolve il problema di Cauchy, è possibile determinare in quali punti essa è crescente/decrescente (debolmente o strettamente)? Fornisci una soluzione del precedente problema di Cauchy.

[Scrivere risoluzione]

Esercizio 4.46. *Trova la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'' - 2x' + 5x = 5t^2 + t\,, \\ x(0) = 1\,, \\ x'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.47. *Trova la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{t(x-1)^2}{t^2+1}\,, \\ x(0) = 2\,, \end{cases}$$

specificandone l'intervallo massimale di esistenza.

Esercizio 4.48. *Questo esercizio è stato assegnato solo ai matematici, ma è compatibile col programma per fisici. Albert ha scoperto che un fenomeno fisico può essere modellizzato tramite l'equazione differenziale*

$$x'' + 4x = \alpha + \beta \sin(2t)$$

dove α e β sono costanti reali non note. Tuttavia Albert è a conoscenza del fatto che tale fenomeno fisico non può presentare soluzioni x non limitate della precedente equazione differenziale. Quale condizione può essere dedotta da quest'ultima affermazione relativamente ai parametri α e β?

A questo punto trova tutte le soluzioni del problema che soddisfano $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$.

[Scrivere risoluzione]

Esercizio 4.49. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x = e^t \\ x(0) = 1\,,\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

5 Campi vettoriali

5.1 Primi esercizi

Esercizio 5.1. *Dato il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito come*

$$F(x,y,z) = (\, 2xz^2 + y^2 \,,\, z + 2xy \,,\, 2x^2 z + y \,),$$

dimostra che è irrotazionale. Calcola l'integrale di linea del campo F lungo la curva $\gamma : [0, \pi/4] \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$\gamma(t) = (\, \tan t \,,\, \sin t \,,\, \cos t \,).$$

Per dimostrare che F è irrotazionale, dobbiamo verificare che

$$\det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2 \,,\, \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \,,\, \partial_x F_2 - \partial_y F_1) = (0,0,0)\,.$$

I calcoli sono lasciati per esercizio. Poiché il campo è irrotazionale e definito su un insieme semplicemente connesso allora esiste una funzione Ψ tale che $\nabla \Psi = F$ (attenzione in dinamica ci va il meno e si chiama potenziale). Per ottenere Ψ calcoliamo la primitiva di F_1 rispetto alla variabile x, la primitiva di F_2 rispetto alla variabile y, e la primitiva di F_3 rispetto alla variabile z:

$$\begin{aligned}
\partial_x \Psi(x,y,z) = F_1(x,y,z) = 2xz^2 + y^2 \qquad &\Rightarrow \quad \Psi(x,y,z) = x^2 z^2 + xy^2 + \Psi_1(y,z) \\
\partial_y \Psi(x,y,z) = F_2(x,y,z) = z + 2xy \qquad &\Rightarrow \quad \Psi(x,y,z) = yz + xy^2 + \Psi_2(x,z) \\
\partial_z \Psi(x,y,z) = F_3(x,y,z) = 2x^2 z + y \qquad &\Rightarrow \quad \Psi(x,y,z) = x^2 z^2 + yz + \Psi_3(x,y)
\end{aligned}$$

In questo modo ricaviamo però solo le parti dipendenti rispettivamente rispetto alle variabili x, y, z. La funzione Ψ si ottiene unendo i vari contributi ottenuti:

$$\Psi(x,y,z) = x^2 z^2 + xy^2 + yz + c\,.$$

L'integrale di linea richiesta sarà dato da

$$\int_\gamma F \cdot ds = \Psi(\gamma(\pi/4)) - \Psi(\gamma(0)) = \Psi(1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) - \Psi(0,0,1) = \frac{3}{2}$$

(si noti che in dinamica il segno è l'opposto).

Esercizio 5.2. *Calcola il flusso del campo $F(x,y,z) = (xy^2, x^2 z, zy^2 + zx)$ uscente dalla superifice S frontiera del solido*

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 3 - x^2 - y^2 \,,\, z \le 2\}\,.$$

Ricordando il teorema della divergenza, abbiamo

$$\Phi = \int_S F \cdot dS = \int_T \mathrm{div} F \, dxdydz = \int_T 2y^2 + x \, dxdydz$$

Inoltre possiamo notare che possiamo scrivere in coordinate cilindriche il solido T nel modo seguente

$$T_{cil} = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta \in [0, 2\pi] \,,\, z \in [0,2] \,,\, 0 \le r \le \sqrt{3-z}\}\,.$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{3-z}} dr (2r^3 \sin^2\theta + r^2 \cos\theta) \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dz \; \tfrac{1}{2}(3-z)^2 \sin^2\theta + \tfrac{1}{3}(3-z)^{3/2} \cos\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta\right)\left(\int_0^2 (3-z)^2 \, dz\right) + \frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta\right)\left(\int_0^2 (3-z)^{3/2} \, dz\right) \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

Finire i calcoli per esercizio.

Esercizio 5.3. *Dato il campo vettoriale* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definito come*

$$F(x,y,z) = (xy\,,\, y^2\,,\, yz)\,,$$

calcolare il flusso di F *uscente dall'insieme*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2z^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\,,\, y \ge -x\}$$

Dal teorema della digergenza abbiamo

$$\int_{\partial V} F \cdot dS = \int_V \mathrm{div} F\, dxdydz = \int_V 4y\, dxdydz$$

in quanto

$$\mathrm{div} F(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x} F_1(x,y,z) + \frac{\partial F}{\partial y} F_2(x,y,z) + \frac{\partial F}{\partial z} F_3(x,y,z) = y + 2y + y = 4y$$

L'insieme V in coordinate sferiche è dato da

$$\rho \in [0,2]\,, \qquad \varphi \in [\pi/4, 3\pi/4]\,, \qquad \theta \in [-\pi/4, 3\pi/4]\,,$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}
\int_V 4y\, dxdydz &= \int_0^2 d\rho \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \rho^2 \sin\varphi (4\rho \sin\varphi \sin\theta) \\
&= 4\left(\int_0^2 \rho^3\, d\rho\right)\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta\, d\theta\right) \\
&= 4 \cdot \frac{2^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} \left[-\cos\theta\right]_{-\pi/4}^{3\pi/4} \\
&= 8\sqrt{2}\left[\frac{\pi}{2} + 1\right].
\end{aligned}$$

Esercizio 5.4. *Dato il campo vettoriale*

$$F(x,y,z) = (x+y\,,\, 0\,,\, x^2 z)\,,$$

determina il valore del flusso del campo attraverso la superficie

$$\begin{aligned}
\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\,,\, z \ge 0\} \\
\cup \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1\}\,.
\end{aligned}$$

L'insieme Σ è la frontiera della semisfera $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\,,\, z \ge 0\}$. Analogamente agli altri esercizi avremo

$$\int_\Sigma F dS = \int_V \mathrm{div} F\, dxdydz = \int_V (1+x^2)\, dxdydz\,.$$

Il calcolo dell'ultimo integrale è lasciato per esercizio, si consigliano le coordinate sferiche.

Esercizio 5.5. *Dato il campo vettoriale*

$$F(x,y,z) = \left(xyz\,,\, \frac{x^2y^2}{2}\,,\, \log z\right),$$

determina il suo dominio e calcolane il rotore. Si tratta di un campo conservativo? Calcola l'integrale di linea del campo lungo la curva semplice con sostegno

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2 = 1\right\}.$$

Il dominio è $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$. Per il rotore dobbiamo calcolare

$$\mathrm{rot} F(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2\,,\, \partial_z F_1 - \partial_x F_3\,,\, \partial_x F_2 - \partial_y F_1) = (0, xy, xy^2 - xz)$$

Non essendo il campo irrotazionale, allora non è conservativo. Dobbiamo calcolare esplicitamente l'integrale di linea. Dapprima parametrizziamo la curva come $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, con $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$. La curva ha derivata $\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$. Dobbiamo quindi calcolare

$$I = \int_\gamma F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} -\sin^2\theta\cos\theta + \tfrac{1}{2}\sin^2\theta\cos^3\theta\, d\theta = \cdots$$

Completare per esercizio.

Esercizio 5.6. *Dato il campo vettoriale*

$$F(x, y) = \left(\frac{y - 4x}{4x^2 + y^2}\,,\, -\frac{x + y}{4x^2 + y^2} \right),$$

determina il suo dominio e calcolane il rotore. Si tratta di un campo conservativo? Quanto vale l'integrale di linea del campo lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita come $\gamma(t) = (\cos t, 2\sin t)$?

Il dominio è $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Il rotore è dato da

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y - 4x}{4x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{x + y}{4x^2 + y^2} = \cdots =\neq 0$$

(calcoli per esercizio). Il campo quindi non è conservativo. Per il calcolo dell'integrale abbiamo

$$I = \int_\gamma F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta)\, d\theta = \cdots = \int_0^{2\pi} -2\, d\theta = -4\pi$$

5.2 A.A. 2022/2023

Esercizio 5.7. *Dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = (xz + x, yz + y, z^2)$, calcola il flusso del campo attraverso la superficie*

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4\,,\, |z| \le 3\}$$

sia con calcolo diretto, sia con l'uso del teorema della divergenza.

Impostiamo dapprima il calcolo diretto parametrizzando l'insieme Σ come

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [-3, 3] \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \Phi(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, z)\,,$$

di cui calcoliamo

$$(\Phi_\theta \wedge \Phi_z)(\theta, z) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -2\sin\theta & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)\,,$$

da cui

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma F \cdot \nu\, dS &= \int_{[0,2\pi]\times[-3,3]} \big\langle F(\Phi(\theta, z))\,,\, (\Phi_\theta \wedge \Phi_z)(\theta, z) \big\rangle\, d\theta dz \\
&= \int_{[0,2\pi]\times[-3,3]} \big\langle (2\cos\theta(z + 1)\,,\, 2\sin\theta(z + 1)\,,\, z^2)\,,\, (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0) \big\rangle\, d\theta dz \\
&= \int_{[0,2\pi]\times[-3,3]} 4(z + 1)\, d\theta dz \\
&= \left(\int_0^{2\pi} 1\, d\theta \right) \left(\int_{-3}^{3} 4(z + 1)\, dz \right) = 2\pi \left[2z^2 + 4z \right]_{-3}^{3} = 48\pi\,.
\end{aligned}$$

Ora calcoliamo lo stesso valore con il teorema della divergenza. Il cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 4\,,\, |z| \le 3\}$$

ha frontiera $\partial C = \Sigma \cup B_- \cup B_+$ costituita da superficie laterale e le due basi

$$B_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 4\,,\, z = -3\}\,, \qquad B_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 4\,,\, z = 3\}$$

Quindi dal teorema della divergenza abbiamo

$$\int_C \operatorname{div} F \, dxdydz = \int_\Sigma F \cdot \nu \, dS + \int_{B_-} F \cdot \nu \, dS + \int_{B_+} F \cdot \nu \, dS \,,$$

dove ν indica sempre il versore normale esterno. Abbiamo

$$\int_C \operatorname{div} F \, dxdydz = \int_C 4z + 2 \, dxdydz = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^2 \rho d\rho \right) \left(\int_{-3}^3 4x + 2dz \right) = 2\pi \cdot \tfrac{1}{2} 2^2 \cdot \left[2z^2 + 2z \right]_{-3}^3 = 48\pi \,.$$

Infine dobbiamo controllare i contributi delle basi.

Propongo di seguito due diversi approcci. Notare come alcuni dettagli cambino in maniera sostanziale.

Primo metodo: intuitivo. Si deduce facilmente che il versore normale esterno a C su B_+ è $\nu = (0,0,1)$, mentre su B_- è $\nu = (0,0,-1)$. Quindi abbiamo, definito l'insieme $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$, che

$$\begin{aligned} \int_{B_-} F \cdot \nu \, dS &= \int_B F(x,y,-3) \cdot (0,0,-1) \, dx \, dy = \int_B -9 \, dx \, dy \,, \\ \int_{B_+} F \cdot \nu \, dS &= \int_B F(x,y,3) \cdot (0,0,1) \, dx \, dy = \int_B 9 \, dx \, dy \,, \end{aligned}$$

da cui deduciamo che i due contributi si cancellano e concludiamo l'esercizio. Si noti come nei precedenti integrali passiamo dalla notazione $\int_{B_\pm} \cdots dS$ in cui stiamo calcolando un integrale su una superficie alla notazione $\int_B \cdots dxdy$ in cui si calcola un integrale in due dimensioni.

Secondo metodo: calcolo esplicito. Possiamo parametrizzare gli insiemi $B_\pm$ con

$$\Gamma_\pm : [0, 2\pi] \times [0,2] \to \mathbb{R}^3 \,, \qquad \Gamma_\pm(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, \pm 3)$$

In questo caso

$$(\Gamma_\rho \wedge \Gamma_\theta)(\rho, \theta) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho \sin\theta & \rho \cos\theta & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, \rho) \,.$$

Si notino i seguenti dettagli rispetto al metodo precedente: abbiamo che il vettore $(\Gamma_\rho \wedge \Gamma_\theta)(\rho,\theta) = \rho(0,0,1)$ non ha norma uno e punta sempre verso l'alto. Il coefficiente ρ include l'elemento d'area delle coordinate polari $dS = \rho \, d\rho d\theta$ che troveremmo facendo tutti i calcoli nel passo precedente passando in coordinate polari. Inoltre il vettore normale $\Gamma_\rho \wedge \Gamma_\theta$ è uscente solo dalla base B_+, mentre è entrante nella base B_-. Quindi i calcoli su B_- vanno effettuati ricordando di cambiare orientazione alla superficie (ovvero inserendo un segno meno).

$$\begin{aligned} \int_{B_+} F \cdot \nu \, dS &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left\langle F(\Gamma(\rho,\theta) \,,\, (\Gamma_\rho \wedge \Gamma_\theta)(\rho,\theta) \right\rangle d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 9\rho \, d\rho \right) d\theta = 36\pi \\ \int_{B_-} F \cdot \nu \, dS &= -\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left\langle F(\Gamma(\rho,\theta) \,,\, (\Gamma_\rho \wedge \Gamma_\theta)(\rho,\theta) \right\rangle d\rho \right) d\theta = -\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 9\rho \, d\rho \right) d\theta = -36\pi \,. \end{aligned}$$

Esercizio 5.8. *Dato il campo vettoriale*

$$F(x,y,z) = (y \sin(xy), x \sin(xy) + z \cos(yz), y \cos(yz)) \,,$$

dimostra che è irrotazionale. Calcolane un potenziale. Calcola il lavoro del campo F lungo la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = (s^2, s, -s^2)$ sia con calcolo diretto che con l'uso del potenziale.

L'esercizio può essere posto anche con il seguente linguaggio matematico.

Data la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = y \sin(xy) \, dx + [x \sin(xy) + z \cos(yz)] \, dy + y \cos(yz) \, dz \,,$$

dimostra che è chiusa. Ammette una primitiva? Calcola $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = (s^2, s, -s^2)$ sia con calcolo diretto che con l'uso della primitiva.

Si calcoli per esercizio il rotore di F e si verifichi che $\nabla \times F = 0$ (o la forma $d\omega$ e si verifichi che $d\omega = 0$). Il potenziale è una funzione U tale che $\nabla U = -F$ (o la primitiva di ω è una funzione f tale che $df = \omega$). Al risultato si arriva calcolando le seguenti primitive rispetto alle variabili via via segnalate

$$\int y\sin(xy)\,dx = -\cos(xy) + a(y,z)\,,$$
$$\int [x\sin(xy) + z\cos(yz)]\,dy = -\cos(xy) + \sin(yz) + b(x,z)\,,$$
$$\int y\cos(yz)\,dz = \sin(yz) + c(x,y)\,,$$

quindi avremo che $f = -U$ sarà tale che

$$f(x,y,z) = -U(x,y,z) = -\cos(xy) + a(y,z) = -\cos(xy) + \sin(yz) + b(x,z) = \sin(yz) + c(x,y)$$

Si noti che facendo le primitive rispetto ad una variabile, dobbiamo considerare la possibilità che ci sia una *parte rimanente* che dipende dalle altre variabili. A questo punto mettendo assieme i contributi (non sommandoli!) troviamo

$$f(x,y,z) = -\cos(xy) + \sin(yz) + h \quad \text{oppure} \quad U(x,y,z) = \cos(xy) - \sin(yz) + h\,, \qquad h \in \mathbb{R}\,.$$

Abbiamo quindi che il lavoro L lungo γ (o equivalentemente $\int_\gamma \omega$) si calcola come

$$L = \int_\gamma F\cdot\tau\,ds = U(\gamma(0)) - U(\gamma(1)) = U(0,0,0) - U(1,1,-1) = (1+h) - (\cos 1 - \sin(-1) + h) = 1 - \sin 1 - \cos 1$$
$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1,1,-1) - f(0,0,0) = -(\cos 1 + \sin(-1) + h) - (-1+h) = 1 - \sin 1 - \cos 1$$

Esercizio 5.9. *Fissata la terna di valori $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ è dato il campo vettoriale*

$$F(x,y,z) = (axy + 3yz, x^2 + 3xz + by^2z, bxy + cy^3)\,,$$

Determina per quale terna (a,b,c) è possibile calcolare il lavoro del campo F lungo una curva γ di cui si conosce solo il punto iniziale $(0,1,-1)$ e il punto finale $(2,1,1)$. Quanto vale il lavoro in questo caso?

Possiamo calcolare l'integrale richiesto solo se il campo risulta conservativo. Essendo il dominio del campo semplicemente connesso, è sufficiente vedere per quali valori della terna esso risulta irrotazionale. Per esercizio verificare che la terna corretta è $(a,b,c) = (2,3,1)$. A questo punto per calcolare l'integrale è sufficiente ricavare una primitiva Φ del campo. Verificare che la primitiva (per il potenziale U si cambia il segno)

$$\Phi(x,y,z) = -U(x,y,z) = x^2y + 3xyz + y^3z + cost.$$

da cui il valore dell'integrale (o equivalentemente il lavoro)

$$I = L = \Phi(2,1,1) - \Phi(0,1,-1) = -U(2,1,1) + U(0,1,-1) = (4+6+1) - (0+0-1) = 12\,.$$

Esercizio 5.10. *Calcola l'integrale*

$$\int_\sigma 2ydx + xdy + 2dz$$

dove σ è la curva che parametrizza il sottoinsieme

$$\Sigma \subseteq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y^2\,,\ y = 2x\}$$

di estremi l'origine $O = (0,0,0)$ e il punto $P = (2,4,18)$.

Con linguaggio fisico: calcola l'integrale del campo $G(x,y,z) = (2y,x,2)$ lungo la curva che parametrizza il sottoinsieme

$$\Sigma \subseteq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y^2\,,\ y = 2x\}$$

di estremi l'origine $O = (0,0,0)$ e il punto $P = (2,4,18)$.

Dalle richieste si deduce che possiamo definire

$$\sigma : [0,2] \to \mathbb{R}^3 \, , \sigma(x) = (x, 2x, x + 4x^2) \, ,$$

la cui velocità è $\sigma'(x) = (1, 2, 1 + 8t)$ da cui si calcola l'integrale

$$L = \int_0^2 \langle G(\sigma(s)) \, , \, \sigma'(s) \rangle \, ds = \int_0^2 \langle (4s, s, 2) \, , \, (1, 2, 1 + 8s) \rangle \, ds$$
$$= \int_0^2 (4s + 2s + 2 + 16s) \, ds = \int_0^2 (22s + 2) \, ds = \left[11s^2 + 2s \right]_0^2 = 48 \, .$$

Esercizio 5.11. *Data la costante $h > 0$, calcolare l'integrale del campo $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ sul bordo dell'insieme*

$$U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2 \, , \, 0 \leq z \leq h \} \, .$$

Dal teorema della divergenza è sufficiente calcolare l'integrale di $\mathrm{div} F(x, y, z) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$ sull'insieme U. Tale integrale si può calcolare in coordinate cilindriche come

$$\int_U 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dxdydz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^h \left(\int_0^z 3(\rho^2 + z^2) \rho \, d\rho \right) dz \right) d\theta \, .$$

Completare per esercizio.

5.3 A.A. 2023/2024

Esercizio 5.12. *Dato il campo vettoriale $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito come*

$$F(x, y, z) = \frac{(2x, 1, 4z)}{x^2 + y + 2z^2 + 1}$$

e la curva $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ definita come $\gamma(t) = (t, t^3, t^2)$. Spiegare perché è possibile calcolare l'integrale del campo F lungo la curva γ sebbene il suo dominio Ω non coincida con tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$ (scrivere chi è Ω). Calcolare quindi tale integrale.

Esercizio 5.13. *Sia V la regione di spazio delimitata dai piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + 2y + z = 4$ e Σ il suo bordo. Dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = (2x^2 - 3z, -2xy, -4x)$ calcolare il flusso del campo uscente da Σ.*

Usando il teorema della divergenza ci riduciamo a calcolare $\int_V 2x \, dxdydz$. Poi si prosegue come nell'Esercizio 3.35.

Esercizio 5.14. *L'insieme $\Sigma = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z = 4 \, , \, z \geq 0 \}$ è il sostegno di una superficie. Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (y^2 - 4z, 4z - y^2, zx^2 + zy^2)$ attraverso questa superficie.*

Usando il teorema della divergenza troviamo

$$\iiint_V \mathrm{div} F(x, y, z) \, dxdydz = \int_\sigma F \cdot \nu \, dS + \int_\psi F \cdot \nu \, dS$$

dove $V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z \leq 4 \, , \, z \geq 0 \}$, σ è la superficie con sostegno Σ e ψ è la superficie con sostegno $\Psi = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \}$. Infatti il solido V ha come frontiera anche il disco Ψ e non solo la *faccia laterale* Σ. Il vettore normale alla superficie ψ risulta $(0, 0, -1)$ mentre il campo F valutato sui punti di Ψ risulta $F(x, y, z) = (y^2, -y^2, 0)$ da cui deduciamo subito che il prodotto scalare darà contributo zero. Quindi $\int_\psi F \cdot \nu \, dS = 0$. A questo punto resta da calcolare il valore

$$\iiint_V (x^2 + y^2 - 2y) \, dxdydz \, .$$

Si rimanda all'Esercizio 3.37 per la risoluzione, notando che avremo

$$\iiint_V 2y \, dxdydz = 0$$

una volta impostate le coordinate cilindriche iniziando con l'integrare per prima la variabile angolare.

Esercizio 5.15. *Trova una parametrizzazione dell'insieme*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 1\}$$

come superficie e calcola il flusso del rotore del campo $F(x, y, z) = (y^2 z, xz^2, x^2 y)$ *attraverso questa superficie.*

Risoluzione da scrivere.

Esercizio 5.16. *Dato il campo vettoriale* $F(x, y) = (3x + y^2, 2xy + y^3)$ *calcola il lavoro del campo* F *lungo la curva* $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ *definita come* $\gamma(\theta) = (\, e^{\sin\theta}\,, \ln(2 + \cos\theta)\,)$.

Risoluzione omessa. Suggerimento: siete sicuri di voler impostare il calcolo dell'integrale di linea?

5.4 A.A. 2024/2025 e successivi

Esercizio 5.17. *Sia dato il campo vettoriale* $F(x, y, z) = (x, y, z^2)$. *Calcolare il flusso di* F *attraverso una superficie avente come sostegno l'insieme* $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\,,\ z \in [0, 1]\}$.

Esercizio 5.18. *Calcola l'integrale del campo*

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{(1 + x)^2}\,, -\frac{1}{(1 + y)^2} \right)$$

lungo la spezzata aperta che collega, nell'ordine i punti $(1, 0)$, $(0, 0)$ *e* $(0, 1)$ *mediante il calcolo diretto dell'integrale. [Con spezzata aperta si intende che la curva <u>non</u> torna al punto di partenza]*

Definire un dominio per il campo F *che contenga la spezzata e dire se esso ammette un potenziale. In caso affermativo scrivere un potenziale di* F *su tale dominio e spiegare come il precedente integrale possa essere stimato per altra via.*

[Scrivere nota sulla seconda parte dell'esercizio]

Esercizio 5.19. *Calcolare il flusso del campo vettoriale* $\vec{F}(x, y, z) = (x+y^2, \sin(x)-y, z^2)$ *uscente dalla superficie chiusa* Σ *che costituisce la frontiera del solido* $V \subset \mathbb{R}^3$ *definito da:*

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

6 Pensati per i matematici

In questa parte compaiono solo esercizi, senza riferimento all'appello in cui sono stati assegnati.

Esercizio 6.1. *Data la curva* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ *definita come* $\gamma(t) = (t^2, t, -t^2)$ *e data la forma differenziale* $\omega(x,y,z) = (2y + yz)\,dx + (2x + xz)\,dy + xy\,dz$ *calcolare l'integrale* $\int_\gamma \omega$ *eseguendo esplicitamente i calcoli.*

In un secondo momento, verifica che $d\omega = 0$ *e calcola una primitiva di* ω*. A questo punto utilizza un secondo metodo per calcolare il precedente integrale.*

Esercizio 6.2. *Calcola l'integrale* $\int_\varphi \omega$ *dove*

$$\omega(x,y,z,w) = xy\,dxdw + y\,dydz - w\,dxdz$$
$$\varphi : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}^4\,, \qquad \varphi(u,v) = (u^2, uv, u+v, 2uv^2)\,.$$

Calcoliamo dapprima la matrice Jacobiana associata a φ

$$J_\varphi(uv) = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ v & u \\ 1 & 1 \\ 2v^2 & 4uv \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi calcolare l'integrale come

$$\begin{aligned}\int_\varphi \omega &= \int_{[0,1]\times[0,2]} \left[(u^2)(uv)\det\begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 2v^2 & 4uv \end{pmatrix} + (uv)\det\begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (2uv^2)\det\begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] dudv \\ &= \int_{[0,1]\times[0,2]} \left[8u^5v^2 + uv^2 - u^2v - 4u^2v^2 \right] dudv\end{aligned}$$

A questo punto usando la linearità dell'integrale e l'integrazioni per funzioni a variabili separabili abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\varphi \omega &= 8\left[\frac{u^6}{6}\right]_0^1\left[\frac{v^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1\left[\frac{v^3}{3}\right]_0^2 - \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^2 - 4\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1\left[\frac{v^3}{3}\right]_0^2 \\ &= \frac{8\cdot 8 + 3\cdot 8 - 3\cdot 4 - 8\cdot 8}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Esercizio 6.3. *Trova le soluzioni del sistema di equazioni differenziali lineare* $z' = Az$ *con* $z = (x,y)$ *e* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Prima alternativa. *Trova una matrice diagonale* D *e una matrice invertibile* P *tale che* $A = P^{-1}DP$*. Effettua la sostituzione* $w = Pz$ *in modo da ottenere un sistema lineare* $w' = Bw$*. Chi è la matrice* B*? Trova tutte le soluzioni del sistema* $w' = Bw$*. Usa queste soluzioni per scrivere le soluzioni del sistema originale.*

Seconda alternativa. *Trasforma il sistema in un'equazione differenziale del secondo ordine manipolando in maniera opportuna le equazioni differenziali che costituiscono il sistema, trova le soluzioni di quest'ultima e da queste ricava le soluzioni del sistema lineare.*

Prima alternativa. Con metodi appresi nel corso di geometria, possiamo trovare che la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è tale che $P^{-1}AP = D$ (o equivalentemente $PDP^{-1} = A$) dove $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Infatti il vettore $(1,1)$ è autovettore di autovalore 2 e il vettore $(0,1)$ è autovettore di autovalore 1. Quindi impostando il cambio di variabili

$$w = P^{-1}z \qquad \rightleftharpoons \qquad \begin{cases} u = y\,, \\ v = x - y\,, \end{cases}$$

essendo $z' = Az = PDP^{-1}z$, troviamo

$$w' = Dw \qquad \rightleftharpoons \qquad \begin{cases} u' = 2u\,, \\ v' = v\,, \end{cases}$$

a cui possiamo pervenire anche col seguente calcolo

$$\begin{cases} u' = y' = 2y = 2u\,, \\ v' = (x-y)' = x' - y' = x + y - 2y = x - y = v\,. \end{cases}$$

A questo punto il sistema $w' = Dw$ è facile da risolvere e ha soluzioni

$$w(t) = (u_0 \mathrm{e}^{2t}\,,\, v_0 \mathrm{e}^{t})\,, \qquad (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Ritornando alle variabili originali troviamo

$$z(t) = Pw(t) = (u_0 \mathrm{e}^{2t} + v_0 \mathrm{e}^{t}\,,\, u_0 \mathrm{e}^{2t}) \qquad (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2\,,$$

concludendo l'esercizio.

Si consiglia di risolvere l'esercizio nel caso $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Seconda alternativa. In realtà il sistema dato si può risolvere senza ulteriori manipolazioni, infatti essendo

$$z' = Az \qquad \rightleftharpoons \qquad \begin{cases} x' = x + y\,, \\ y' = 2z\,, \end{cases}$$

possiamo già risolvere la seconda equazione e ottenere la famiglia di soluzioni $y(t) = y_0 \mathrm{e}^{2t}$, con $y_0 \in \mathbb{R}$. A questo punto possiamo sostituire la forma generica della soluzione y nella prima equaizone e trovare

$$x' = x + y_0 \mathrm{e}^{2t}\,.$$

che porta (calcoli lasciati per esercizio) alla soluzione $x(t) = x_0 \mathrm{e}^{t} + y_0 \mathrm{e}^{2t}$, con $x_0 \in \mathbb{R}$. Quindi concludiamo scrivendo la soluzione del sistema dato come

$$z(t) = (x_0 \mathrm{e}^{t} + y_0 \mathrm{e}^{2t}\,,\, y_0 \mathrm{e}^{2t})\,, \qquad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Si suggerisce anche in questo caso di effettuare i calcoli nel caso $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Qui sarà necessaria una vera manipolazione del sistema, che in realtà nasconde calcoli analoghi a quelli necessari per diagonalizzare la matrice.

Esercizio 6.4. *Date le forme differenziali definite su* $\mathbb{R}^4$

$$\omega(x,y,z,w) = (xy)dx \wedge dz + (y^2 w)dy \wedge dz + (xz)dx \wedge dw$$

$$\tilde{\omega}(x,y,z,w) = y\ dx + z\ dy + w\ dz + x\ dw$$

calcola $\gamma = \omega \wedge \tilde{\omega} + d\omega$. *Infine calcola* $\eta = \gamma \wedge \omega$. *Scrivere il risultato come combinazione lineare degli elementi della base canonica dello spazio appropriato.*

Dapprima calcoliamo (solo in questo esercizio intenzionalmente si elencano tutti gli addendi a scopo illustrativo, gli elementi cancellati con una barra sono uguali a zero per la proprietà di alternanza e non è necessario scriverli in sede d'esame)

$$\begin{aligned} \omega \wedge \tilde{\omega} = & \cancel{(xyy)dx \wedge dx \wedge dz} + (y^3 w)dx \wedge dy \wedge dz + \cancel{(xyz)dx \wedge dx \wedge dw} \\ & + (xyz)dy \wedge dx \wedge dz + \cancel{(y^2 wz)dy \wedge dy \wedge dz} + (xz^2)dy \wedge dx \wedge dw \\ & + \cancel{(xyw)dz \wedge dx \wedge dz} + \cancel{(y^2 w^2)dz \wedge dy \wedge dz} + (xwz)dz \wedge dx \wedge dw \\ & + (x^2 y)dw \wedge dx \wedge dz + (xy^2 w)dw \wedge dy \wedge dz + \cancel{(x^2 z)dw \wedge dx \wedge dw}\,. \end{aligned}$$

A questo punto raccogliamo i termini analoghi ricordando la proprietà di antisimmetria

$$\omega \wedge \tilde{\omega} = (y^3 w - xyz)dx \wedge dy \wedge dz + (-xz^2)dx \wedge dy \wedge dw + (x^2 y - xwz)dx \wedge dz \wedge dw + (xy^2 w)dy \wedge dz \wedge dw\,.$$

Ora calcoliamo il secondo addendo (anche qui intenzionalmente si elencano tutti gli addendi a scopo illustrativo, gli elementi cancellati con una barra sono uguali a zero per la proprietà di alternanza oppure perché la derivata parziale che calcoliamo è nulla. Non è necessario scriverli in sede d'esame)

$$\begin{aligned} d\omega =& \cancel{ydx\wedge dx\wedge dz} + xdy\wedge dx\wedge dz + \cancel{0dz\wedge dx\wedge dz} + \cancel{0dw\wedge dx\wedge dz} \\ &+ \cancel{0dx\wedge dy\wedge dz} + \cancel{(2yw)dy\wedge dy\wedge dz} + \cancel{0dz\wedge dy\wedge dz} + (y^2)dw\wedge dy\wedge dz \\ &+ \cancel{(z)dx\wedge dx\wedge dw} + \cancel{0dy\wedge dx\wedge dw} + (x)dz\wedge dx\wedge dw + \cancel{0dw\wedge dx\wedge dw}\,. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo semplicemente

$$d\omega = (-x)dx\wedge dy\wedge dz + (-x)dx\wedge dz\wedge dw + (y^2)dy\wedge dz\wedge dw\,.$$

A questo punto basta sommare i due contributi

$$\begin{aligned} \gamma = \omega\wedge\tilde{\omega} + d\omega =& (y^3w - xyz - x)dx\wedge dy\wedge dz + (-xz^2)dx\wedge dy\wedge dw \\ &+ (x^2y - xwz - x)dx\wedge dz\wedge dw + (xy^2w + y^2)dy\wedge dz\wedge dw\,. \end{aligned}$$

Il calcolo di $\eta = \gamma\wedge\omega$ è banale: tutte le 5-forme su $\mathbb{R}^4$ sono banali, quindi $\eta = 0$.

Esercizio 6.5. *Fissato $x_0 = (-1,-1,-1,-1)$, considerare la forma differenziale $\omega : U \to \Omega_2(\mathbb{R}^4)$ definita sull'insieme $U = \{x\in\mathbb{R}^4 : \|x - x_0\|_2 > 1\}$ come*

$$\omega(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_2 - x_1x_4)dx_1\wedge dx_2 + (x_3 - x_1x_2)dx_1\wedge dx_4 + (x_1)dx_3\wedge dx_4\,.$$

È chiusa? La forma differenziale soddisfa le ipotesi del teorema di Poincaré? È esatta? Calcolare l'integrale $\int_\sigma\omega$ dove $\sigma : [0,1]\times[0,2]\to\mathbb{R}^4$ è definita come

$$\sigma(u,v) = (u, u+v, u^2, v)\,.$$

La forma è chiusa se e solo se $d\omega = 0$, quindi calcoliamo

$$\begin{aligned} d\omega =& (-x_1)dx_4\wedge dx_1\wedge dx_2 + (-x_1)dx_2\wedge dx_1\wedge dx_4 + 1dx_3\wedge dx_1\wedge dx_4 + 1dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4 \\ =& (x_1 - x_1)dx_4\wedge dx_1\wedge dx_2 + (1-1)dx_3\wedge dx_1\wedge dx_4 = 0\,. \end{aligned}$$

La forma differenziale non soddisfa le ipotesi del teorema di Poincaré in quanto è definita sull'insieme U che non è stellato. Per quanto sia *ovvio* che il complementare di una palla non sia stellato diamone una dimostrazione. Dobbiamo mostrare che per ogni punto $u_0\in U$ esiste un secondo punto $u_1\in U$ tale che il segmento che congiunge i due punti non è contenuto in U. Si arriva alla conclusione scegliendo u_1 come il punto simmetrico a u_0 nella simmetria centrale di centro x_0, ovvero $u_1 = 2x_0 - u_0$.

La forma differenziale tuttavia è esatta. Possiamo infatti estendere ω in modo banale ad una forma differenziale $\tilde{\omega} : \mathbb{R}^4\to\Omega_2(\mathbb{R}^4)$, in quanto le funzioni che descrivono le componenti di ω sono ben definite su $\mathbb{R}^4$. Il teorema di Poincaré si applica quindi a $\tilde{\omega}$ trovando una forma $\tilde{\gamma} : \mathbb{R}^4\to\Omega_1(\mathbb{R}^4)$ tale che $d\tilde{\omega} = \tilde{\gamma}$. Prendendo semplicemente $\gamma : U\to\Omega_1(\mathbb{R}^4)$ come restrizione di $\tilde{\gamma}$ concludiamo la dimostrazione: $d\gamma = \omega$, quindi ω è esatta. A questo punto, abbiamo due alternative.

Se calcoliamo esplicitamente γ possiamo concludere che $\int_\sigma\omega = \int_\sigma d\gamma = \int_{\partial\sigma}\gamma$, ma ciò porterebbe ad una notevole quantità di calcoli (che per esercizio lo studente potrebbe comunque fare). In questo caso è meglio effettuare il calcolo esplicito dell'integrale.

$$\begin{aligned} \int_\sigma\omega &= \int_{[0,1]\times[0,2]}\left((u+v-uv)\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix} + (-uv)\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} + (u)\begin{vmatrix}2u&0\\0&1\end{vmatrix}\right)dudv \\ &= \int_{[0,1]\times[0,2]}\left((u+v-uv)1 + (-uv)1 + (u)(2u)\right)dudv \\ &= \int_{[0,1]\times[0,2]}(u+v-2uv+2u^2)dudv \\ &= \int_0^2\left[\tfrac{1}{2}u^2 + uv - u^2v + \tfrac{2}{3}u^3\right]_{u=0}^{u=1}dv = \int_0^2\tfrac{7}{6}\,dv = \tfrac{7}{3}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 6.6. *Data la forma differenziale*

$$\omega(x,y,z,w) = y\,dxdydz + zw\,dxdydw + y\,dxdzdw - x\,dydzdw\,,$$

calcolare $\int_\sigma \omega$ *dove* $\sigma : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$ *è definita come*

$$\sigma(r,s,t) = (rs+t\,,\, r+s\,,\, st\,,\, r)\,.$$

Calcoliamo la matrice Jacobiana

$$\sigma'(r,s,t) = \begin{pmatrix} s & r & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & s \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e impostiamo l'integrale

$$\begin{aligned}
\int_\sigma \omega &= \int_{[0,1]^3} \left((r+s) \begin{vmatrix} s & r & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & s \end{vmatrix} + rst \begin{vmatrix} s & r & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (r+s) \begin{vmatrix} s & r & 1 \\ 0 & t & s \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (rs+t) \begin{vmatrix} s & r & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & s \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) drdsdt \\
&= \int_{[0,1]^3} \left((r+s)(s^2+t-rs) + rst(-1) + (r+s)(rs-t) + (rs+t)s \right) drdsdt \\
&= \int_{[0,1]^3} \left((r+s)s^2 - rst + (rs+t)s \right) drdsdt \\
&= \int_{[0,1]^3} 2rs^2 + s^3 - rst + st\,drdsdt
\end{aligned}$$

A questo punto si prosegue con calcoli semplici

$$\begin{aligned}
\int_\sigma \omega &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(2rs^2 + s^3 - rst + st \right) dr \right) dt \right) ds \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\left[r^2s^2 + rs^3 - \tfrac{1}{2}r^2st + rst \right]_{r=0}^{r=1} \right) dt \right) ds \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(s^2 + s^3 - \tfrac{1}{2}st + st \right) dt \right) ds \\
&= \int_0^1 \left(\left[s^2t + s^3t - \tfrac{1}{4}st^2 + \tfrac{1}{2}st^2 \right]_{t=0}^{t=1} \right) ds \\
&= \int_0^1 \left(s^2 + s^3 - \tfrac{1}{4}s + \tfrac{1}{2}s \right) ds \\
&= \left[\tfrac{1}{3}s^3 + \tfrac{1}{4}s^4 - \tfrac{1}{8}s^2 + \tfrac{1}{4}s^2 \right]_0^1 = \tfrac{17}{24}
\end{aligned}$$

Esercizio 6.7. *Dato l'insieme*

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z\,,\, z \in [0,2] \right\}$$

fornisci una sua 3*-parametrizzazione* σ *e abbozzane un disegno, dopo aver disegnato l'insieme*

$$S = \{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,0,z) \in V \}\,.$$

Quindi calcola esplicitamente il bordo orientato $\partial\sigma$ *a partire dalla parametrizzazione fornita. Disegna il sostegno delle* 2*-superfici che costituiscono il bordo e specifica in quale modo esse concorrono nel calcolo di un integrale* $\int_{\partial\sigma} \omega$ *dove* ω *è una forma differenziale. Specifica chi è il codominio di* ω *in questo caso.*

Il disegno si S e la parte grafica dell'esercizio sono lasciati per esercizio. Possiamo già dire che il codominio di ω sarà $\Omega_2(\mathbb{R}^3)$. Prima di dare una risoluzione a questo esercizio, illustro dei casi più semplici trattati a voce in classe o assegnati per esercizio. Si consideri il triangolo

$$T = \{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le z\,,\, z \in [0,2] \}$$

Esso si può parametrizzare come

$$\Phi : [0,1] \times [0,2] \to T\,, \qquad \Phi(r,z) = (rz, z)\,.$$

Analogamente, l'insieme

$$T = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le k(z)\,,\ z \in [0,2]\}$$

dove k è una funzione data, si può parametrizzare come

$$\Phi : [0,1] \times [0,2] \to T\,, \qquad \Phi(r,z) = (rk(z), z)\,.$$

Veniamo all'insieme assegnato. Possiamo interpretare V come l'insieme che otterremmo da

$$\widetilde{T} = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le f(z)\,,\ z \in [0,2]\}$$

nel caso $f(z) = \sqrt{z}$ aggiungendo una rotazione completa dell'insieme rispetto all'asse z. Quindi con l'introduzione di coordinate polari, otteniamo

$$\Phi : [0,1] \times [0,2] \times [0,2\pi] \to T\,, \qquad \Phi(r,z,\theta) = (\sqrt{z}r\cos\theta\,,\ \sqrt{z}r\sin\theta\,,\ z)\,,$$

oppure possiamo scrivere, sostituendo $s = \sqrt{z}$,

$$\Phi : [0,1] \times [0,\sqrt{2}] \times [0,2\pi] \to T\,, \qquad \Phi(r,s,\theta) = (sr\cos\theta\,,\ sr\sin\theta\,,\ s^2)\,.$$

Il bordo orientato sarà l'incollamento delle seguenti 2-superifici.

$$\begin{aligned}
\alpha_1^- &: [0,\sqrt{2}] \times [0,2\pi] \to T\,, & \alpha_1^-(s,\theta) &= \Phi(0,s,2\pi-\theta) = (0\,,\,0\,,\,s^2)\,,\\
\beta_1^+ &: [0,\sqrt{2}] \times [0,2\pi] \to T\,, & \beta_1^+(s,\theta) &= \Phi(1,s,\theta) = (s\cos\theta\,,\,s\sin\theta\,,\,s^2)\,,\\
\alpha_2^+ &: [0,1] \times [0,2\pi] \to T\,, & \alpha_2^+(r,\theta) &= \Phi(r,0,\theta) = (0\,,\,0\,,\,0)\,,\\
\beta_2^- &: [0,1] \times [0,2\pi] \to T\,, & \beta_2^-(r,\theta) &= \Phi(r,\sqrt{2},2\pi-\theta) = (\sqrt{2}r\cos\theta\,,\,-\sqrt{2}r\sin\theta\,,\,2)\,,\\
\alpha_3^- &: [0,1] \times [0,\sqrt{2}] \to T\,, & \alpha_3^-(r,s) &= \Phi(1-r,s,0) = (s(1-r)\,,\,0\,,\,s^2)\,,\\
\beta_3^+ &: [0,1] \times [0,\sqrt{2}] \to T\,, & \beta_3^+(r,s) &= \Phi(r,s,2\pi) = (sr\,,\,0\,,\,s^2)\,.
\end{aligned}$$

La 2-superficie α_1^- ha come sostegno un sottoinsieme dell'asse z, mentre α_2^+ ha come sostegno il solo origine. Quindi avremo $\int_{\alpha_1^-}\omega = \int_{\alpha_2^+}\omega = 0$ per ogni $\omega \in \Omega_2(\mathbb{R}^3)$. Invece le parametrizzazioni α_3^- e β_3^+ hanno entrambe lo stesso sostegno: una sezione del solido V. Tuttavia hanno orientazioni opposte, quindi avremo $\int_{\alpha_3^-}\omega + \int_{\beta_3^+}\omega = 0$ per ogni $\omega \in \Omega_2(\mathbb{R}^3)$. Quindi il calcolo richiesto si semplifica in

$$\int_{\partial\sigma}\omega = \int_{\beta_1^+}\omega + \int_{\beta_2^-}\omega\,,$$

per ogni $\omega \in \Omega_2(\mathbb{R}^3)$. In particolare β_1^+ ha come sostegno la superficie *laterale* del solido, mentre β_2^- parametrizza la base superiore del solido.

Esercizio 6.8. *Dato l'insieme*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \le \sin^2 x\,, x \in [0,\pi]\right\}$$

fornisci una sua 3-parametrizzazione σ e abbozzane un disegno. Quindi calcola esplicitamente il bordo orientato $\partial\sigma$ a partire dalla parametrizzazione fornita. Disegna il sostegno delle 2-superfici che costituiscono il bordo e specifica in quale modo esse concorrono nel calcolo di un integrale $\displaystyle\int_{\partial\sigma}\omega$ dove ω è una forma differenziale.

L'esercizio è simile al precedente. Il disegno si S e la parte grafica dell'esercizio sono lasciati per esercizio. Anche in questo caso il codominio di ω sarà $\Omega_2(\mathbb{R}^3)$. Notiamo che in questo caso V si ottiene da una rotazione completa attorno all'asse x dell'insieme

$$S = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le \sin x\,,\ x \in [0,\pi]\}\,.$$

In modo simile all'esercizio precedente, otteniamo

$$\Phi : [0,1] \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to T\,, \qquad \Phi(r,s,\theta) = (s, r\cos\theta\,\sin s\,,\, r\sin\theta\,\sin s)\,.$$

Il bordo orientato sarà l'incollamento delle seguenti 2-superifici.

$$\begin{aligned}
\alpha_1^- &: [0,\pi] \times [0,2\pi] \to T\,, & \alpha_1^-(s,\theta) &= \Phi(0,s,2\pi-\theta) = (s\,,\,0\,,\,0)\,,\\
\beta_1^+ &: [0,\pi] \times [0,2\pi] \to T\,, & \beta_1^+(s,\theta) &= \Phi(1,s,\theta) = (s, \cos\theta\,\sin s\,,\, \sin\theta\,\sin s)\,,\\
\alpha_2^+ &: [0,1] \times [0,2\pi] \to T\,, & \alpha_2^+(r,\theta) &= \Phi(r,0,\theta) = (0\,,\,0\,,\,0)\,,\\
\beta_2^- &: [0,1] \times [0,2\pi] \to T\,, & \beta_2^-(r,\theta) &= \Phi(r,\pi,2\pi-\theta) = (\pi\,,\,0\,,\,0)\,,\\
\alpha_3^- &: [0,1] \times [0,\pi] \to T\,, & \alpha_3^-(r,s) &= \Phi(1-r,s,0) = (s, (1-r)\,\sin s\,,\, 0)\,,\\
\beta_3^+ &: [0,1] \times [0,\pi] \to T\,, & \beta_3^+(r,s) &= \Phi(r,s,2\pi) = (s, r\,\sin s\,,\, 0)\,.
\end{aligned}$$

La 2-superficie α_1^- ha come sostegno un sottoinsieme dell'asse x, mentre α_2^+ e β_2^- hanno come sostegno un solo punto. Quindi avremo $\int_{\alpha_1^-}\omega = \int_{\alpha_2^+}\omega = \int_{\beta_2^-}\omega = 0$ per ogni $\omega \in \Omega_2(\mathbb{R}^3)$. Invece le parametrizzazioni α_3^- e β_3^+ hanno entrambe lo stesso sostegno: una sezione del solido V. Tuttavia hanno orientazioni opposte, quindi avremo $\int_{\alpha_3^-}\omega + \int_{\beta_3^+}\omega = 0$ per ogni $\omega \in \Omega_2(\mathbb{R}^3)$. Quindi il calcolo richiesto si semplifica in

$$\int_{\partial\sigma}\omega = \int_{\beta_1^+}\omega\,,$$

per ogni $\omega \in \Omega_2(\mathbb{R}^3)$. In parole povere β_1^+ ha come sostegno tutta la frontiera ∂V.

Esercizio 6.9. *Data la forma differenziale*

$$\omega(x,y,z) = y\,dxdy + z dxdz\,,$$

calcolare $\int_\sigma \omega$ *dove* $\sigma : [0,1]\times[0,2] \to \mathbb{R}^3$ *è definita come*

$$\sigma(r,s) = (r^2 s\,,\, r+s\,,\, rs)\,.$$

Dopo aver calcolato la matrice Jacobiana

$$\sigma'(r,s) = \begin{pmatrix} 2rs & r^2 \\ 1 & 1 \\ s & r \end{pmatrix}$$

Quindi avremo

$$\begin{aligned}
\int_\sigma \omega &= \int_{[0,1]\times[0,2]} \left((r+s) \begin{vmatrix} 2rs & r^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (rs) \begin{vmatrix} 2rs & r^2 \\ s & r \end{vmatrix} \right) drds\\
&= \int_{[0,1]\times[0,2]} \left((r+s)(2rs - r^2) + rs(r^2 s) \right) drds\\
&= \int_{[0,1]\times[0,2]} \left(r^2 s + 2rs^2 - r^3 + r^3 s^2 \right) drds\\
&= \int_0^2 \left[\tfrac{1}{3} r^3 s + r^2 s^2 - \tfrac{1}{4} r^4 + \tfrac{1}{4} r^4 s^2 \right]_{r=0}^{r=1} ds\\
&= \int_0^2 \tfrac{1}{3} s + s^2 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} s^2\, ds\\
&= \left[\tfrac{1}{6} s^2 + \tfrac{1}{3} s^3 - \tfrac{1}{4} s + \tfrac{1}{12} s^3 \right]_0^2 = \tfrac{2}{3} + \tfrac{8}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} = 4 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{7}{2}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 6.10. *Calcola* $\int_\sigma \omega$ *dove*

$$\omega(p,q,r,s,t) = t\,dpds + \sin(pq)e^r\,dpdt + q\,dqds$$

e $\sigma : [0,1]\times[0,2] \to \mathbb{R}^5$ *è definita come*

$$\sigma(x,y) = (x^2\,,\, y^2 + x\,,\, \cos(xy^2)x^2\,,\, 3x - 2y\,,\, x^3)\,.$$

In questo esercizio alcuni calcoli non servono nel seguito, quindi sono segnati con $\star\star\star$. Calcoliamo la matrice Jacobiana

$$\sigma'(u,v) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 2x \\ \star\star\star & \star\star\star \\ 3 & -2 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

e impostiamo come al solito il calcolo

$$\begin{aligned}
\int_\sigma \omega &= \int_{[0,1]\times[0,2]} \left(x^3 \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \star\star\star \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 3x^2 & 0 \end{vmatrix} + (y^2+x) \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) dxdy \\
&= \int_{[0,1]\times[0,2]} \left(x^3(-4x) + (y^2+x)(-2-6x) \right) dxdy \\
&= \int_{[0,1]\times[0,2]} \left(-4x^4 - 2y^2 - 2x - 6xy^2 - 6x^2 \right) dxdy \\
&= -\int_0^2 \left[\tfrac{4}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^3 + x^2 + 3x^2y^2 + 2x^2 \right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= -\int_0^2 \tfrac{4}{5} + \tfrac{2}{3} + 1 + 3y^2 + 2\, dy = -\int_0^2 \tfrac{22}{15} + 3 + +3y^2\, dy \\
&= -\left[\left(\tfrac{7}{15} + 4 \right) y + y^3 \right]_0^2 = \tfrac{14}{15} + 16\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 6.11. *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *e la funzione* $b(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}$*, considerare il sistema differenziale lineare* $z'(t) = Az(t) + b(t)$*. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del sistema omogeneo, ovvero i valori* λ_1, λ_2 *e le soluzioni* z_1, z_2 *tali che* $z_i' = Az_i = \lambda_i z_i$*. Scrivi quindi la matrice fondamentale* $\Phi(t)$ *associata e trova la soluzione del sistema non omogeneo tale che* $z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$*.*

Al fine di risolvere l'esercizio può essere utile ricordare che la matrice inversa di $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è la matrice $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ e la formula risolutiva $z(t) = \Phi(t)\left(\Phi(t_0)^{-1}z(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}b(s)\,ds\,.\right)$

Il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 3e^{2t} \\ y' = 2x + 3y + 3e^{3t} \end{cases}$$

è rappresentato da una matrice avente autovalori 4 e 1 con autovettori rispettivamente $(1,2)^T$ e $(1,-1)^T$. Da ciò deduciamo due autofunzioni che generano lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato

$$z_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}\,, \qquad z_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}\,.$$

Una possibile matrice fondamentale è quindi data da

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{t} \\ 2e^{4t} & -e^{t} \end{pmatrix}$$

avente inversa

$$\Phi(t)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-4t} & e^{-4t} \\ 2e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

Applicando la formula

$$z(t) = \Phi(t)\left(\Phi(t_0)^{-1}z(0) + \int_0^t \Phi(s)^{-1}b(s)\,ds\,.\right)$$

sopra otteniamo quindi la soluzione

$$z(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{3}{2}e^{3t} + \frac{3}{2}e^{4t} \\ \frac{1}{2}e^t - 3e^{2t} - \frac{3}{2}e^{3t} + 3e^{4t} \end{pmatrix}$$

(effettuare tutti i calcoli per esercizio).

Esercizio 6.12. *Trova le soluzioni del seguente sistema di equazioni*

$$\begin{cases} x' + 4x + y' = 1\,, \\ x' - 2x + y = t^2\,. \end{cases}$$

Derivando la seconda equazione troviamo $x'' - 2x' + y' = 2t$ da cui $y' = 2t - x'' + 2x'$. Sostituiamo questa identità nella prima equazione e abbiamo

$$x' + 4x + 2t - x'' + 2x' = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x'' - 3x' - 4x = 2t - 1\,.$$

La soluzione di questa equazione differenziale scalare del secondo ordine è (calcoli lasciati per esercizio)

$$x(t) = Ae^{-t} + Be^{4t} - \frac{1}{2}t + \frac{5}{8}\,.$$

A questo punto, isolando y nella seconda equazione abbiamo

$$y(t) = t^2 - x'(t) + 2x(t) = \cdots$$

(calcoli lasciati per esercizio).

Esercizio 6.13. *Data la forma differenziale $\omega = x^2 s\, dxdydz + y^2 z dydzds$ e l'insieme*

$$E = \{(x, y, z, s) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 \le 1\,, z^2 + s^2 \le 4\}$$

calcola $\int_E d\omega$.

Dopo aver calcolato esplicitamente la 4-forma differenziale

$$d\omega(x, y, z, s) = -x^2\, dxdydzds\,,$$

e parametrizzato l'insieme E come

$$\Phi : D = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, 2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^4\,, \qquad \Phi(r, \theta, R, \phi) = (r\cos\theta, r\sin\theta, R\cos\phi, R\sin\phi)\,.$$

Dopo aver calcolato la matrice Jacobiana

$$\Phi'(r, \theta, R, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -R\sin\phi \\ 0 & 0 & \sin\phi & R\cos\phi \end{pmatrix}$$

che ha come determinante rR. Impostiamo il calcolo come

$$\int_\Phi d\omega = -\int_D r^2\cos^2\theta\, rR\, drd\theta dRd\phi = -\int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^2 R\, dR \int_0^{2\pi} d\phi = -\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2\cdot 2\pi = -\pi^2\,.$$

Esercizio 6.14. *Data la forma differenziale*

$$\omega(x, y, z, t) = xt\, dxdy + xy\, dxdz + xy\, dzdt\,.$$

calcola $\int_\sigma \omega$ dove σ è una parametrizzazione dell'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + z^2 = y^2 + 4t^2 = 4\}\,.$$

Possiamo parametrizzare Σ con

$$\sigma : D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^4 , \quad \sigma(\theta, \phi) = (\cos\theta, 2\cos\phi, \sin\theta, \sin\phi) .$$

con matrice jacobiana

$$\sigma'(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ 0 & -2\sin\phi \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

da cui

$$\int_\sigma \omega = \int_D 2\cos\theta\sin\phi \cdot 2\sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta\cos\phi \cdot 0 + 2\cos\theta\cos\phi \cdot \cos\theta\cos\phi \, d\theta d\phi = 2\pi^2 ,$$

in cui i primi due addendi danno contributo nullo.

Esercizio 6.15. *Scrivi tutte le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 4x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Trova la soluzione tale che $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ che descrive il sistema lineare ha autovalore -1 con autovettore $(2, -1)$ e autovalore 3 con autovettore $(2, 1)$. Da ciò deduciamo le soluzioni come

$$x(t) = (2\alpha e^{-t} + 2\beta e^{3t} , -\alpha e^{-t} + \beta e^{3t}) .$$

A questo punto, è facile concludere l'esercizio.

Esercizio 6.16. *Considerare l'equazione differenziale* $\Delta u + u^3 = 0$, *dove* $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. *Di questa equazione differenziale si cercano soluzioni* $u : D \to \mathbb{R}$ *con* $D \subset \mathbb{R}^4$. *Assumiamo che* u *sia soluzione della precedente equazione differenziale e valga* $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = v\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\right)$, *dove* $v : I \to \mathbb{R}$ *con* $I \subset \mathbb{R}$. *Quale equazione differenziale del secondo ordine risolve* $v = v(r)$*? [Suggerimento: la risposta è del tipo:* $v'' + \frac{\alpha}{r} v' + v^\beta = 0$ *dove* α *e* β *sono costanti che lo studente deve individuare]*

Scriveremo r al posto di $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ per semplicità di notazione. Calcoliamo dapprima la derivata

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} v\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1} v(r) = v'(r) \frac{\partial r}{\partial x_1} = v'(r) \frac{x_1}{r}$$

e successivamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(v'(r) \frac{x_1}{r} \right) = v''(r) \frac{x_1^2}{r^2} + v'(r) \frac{1}{r} - v'(r) \frac{x_1^2}{r^3} .$$

Le altre derivate secondo si calcolano in modo identico e otteniamo sommandole

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = v''(r) + 4v'(r) \frac{1}{r} - v'(r) \frac{1}{r} = v''(r) + v'(r) \frac{3}{r}.$$

La risposta quindi è $v'' + v' \frac{3}{r} + v^3 = 0$.

Esercizio 6.17. *Considerare l'equazione differenziale* $v'' + \dfrac{3}{r} v' + v^3 = 0$, *dove la variabile* r *è definita nell'intervallo* $]0, +\infty[$. *Data una soluzione* $v = v(r)$ *della precedente equazione, definire le funzioni* $x(t) = v(e^t)e^t$ *e* $y(t) = x'(t)$. *Quale sistema di equazioni differenziali del tipo*

$$\begin{cases} x' = p(x, y) , \\ y' = q(x, y) \end{cases}$$

risolve la coppia di funzioni (x, y)*? Trova una funzione non costante* H *tale che* $\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = 0$ *per ogni soluzione del precedente sistema.*

Chiaramente avremo $p(x,y) = y$. Per trovare q calcoliamo

$$x' = \frac{d}{dt}\left(v(e^t)e^t\right) = v'(e^t)e^{2t} + v(e^t)e^t$$

e poi

$$x'' = v''(e^t)e^{3t} + 2v'(e^t)e^{2t} + v'(e^t)e^{2t} + v(e^t)e^t = v''(e^t)e^{3t} + 3v'(e^t)e^{2t} + v(e^t)e^t$$

Usando che $v'' = -v'\frac{3}{r} - v^3$ otteniamo

$$y' = x'' = \left(-v'(e^t)\frac{3}{e^t} - v(e^t)^3\right)e^{3t} + 3v'(e^t)e^{2t} + v(e^t)e^t = -v(e^t)^3e^{3t} + v(e^t)e^t = -x^3 + x$$

da cui $p(x,y) = x - x^3$. Otteniamo quindi il sistema di equazioni

$$x' = y\,, \quad y' = x - x^3$$

da cui ricaviamo $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ essendo

$$\frac{d}{dt}H((x(t),y(t)) = yy' + (x^3 - x)x' = 0\,.$$

Esercizio 6.18. *Trovare una parametrizzazione σ dell'insieme*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\,,\ x \le 0\,,\ y \le 0\}\,.$$

Calcolare l'integrale su $\partial\sigma$ della forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = 4z^2\,dy \wedge dz + 3y^3\,dz \wedge dx + 2x^2 dx \wedge dy\,.$$

Possiamo usare le usuali coordinate sferiche coi seguenti vincoli: $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi$, $\pi \le \theta \le 3\pi/2$. Successivamente sarà sufficiente calcolare $\int_\sigma d\omega$. Osserviamo che $d\omega = 9y^2\,dx \wedge dy \wedge dz$. Si lascia il completamento dell'esercizio allo studente.

Esercizio 6.19. *Fornisci una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$, dell'insieme*

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z^2 \le 1\,, z \le 0\}\,.$$

Poi costruisci il suo bordo orientato $\partial\sigma$ seguendo la procedura illustrata durante il corso, specificando quali componenti di $\partial\sigma$ degenerano in superfici non regolari e quali coppie invece sono formate da superfici equivalenti con orientazione opposta. Specifica poi come le precedenti concorrono al calcolo dell'integrale $\int_{\partial\sigma}\omega$ dove ω è una 2-forma generica.

Esercizio 6.20. *Calcolare $\int_\sigma \omega$ dove ω è la 3-forma differenziale*

$$\omega(r,s,t,u,v) = uv\,drdsdt + r\,dsdtdv + v\,dtdudv$$

e $\sigma : [0,1] \times [0,2] \times [0,3] \to \mathbb{R}^5$ è definita come

$$\sigma(x,y,z) = (x + z\,,\ x^2\,,\ z\,,\ y^3 + x^2\,,\ y^2 + z)\,.$$

Esercizio 6.21. *Fornire la parametrizzazione $\sigma : I \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di un cono solido di raggio R e altezza h. Successivamente calcolare i vari elementi che ne costituiscono il bordo orientato $\partial\sigma$. Abbozzare un disegno (o più di uno se più comodo) in cui si evidenzia il sostegno di σ e il supporto di ogni elemento che costituisce il bordo orientato.*

Possiamo porre

$$\sigma : [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,R] \to \mathbb{R}^3\,, \quad \sigma(\lambda,\theta,r) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda\frac{h}{R}(R-r)\right)$$

oppure

$$\sigma : [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,R] \to \mathbb{R}^3\,, \quad \sigma(\lambda,\theta,r) = \left(\lambda r\cos\theta, \lambda r \sin\theta, \frac{h}{R}(R-r)\right)$$

oppure

$$\sigma : [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,h] \to \mathbb{R}^3\,, \quad \sigma(\lambda,\theta,z) = \left(\lambda\frac{R}{h}(h-z)\cos\theta, \lambda\frac{R}{h}(h-z)\sin\theta, z\right)$$

oppure

$$\sigma : [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,h] \to \mathbb{R}^3\,, \quad \sigma(\lambda,\theta,z) = \left(\frac{R}{h}(h-z)\cos\theta, \frac{R}{h}(h-z)\sin\theta, \lambda z\right).$$

Si lascia per esercizio il proseguimento. Brevemente, seguendo la prima scelta, troviamo per $\lambda = 0$ il cerchio di base del cono, per $\lambda = 1$ la *superficie laterale* (usando la terminologia di uso comune), per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ una sezione triangolare del cono (con orientazione opposta), per $r = 0$ l'asse del cono e per $r = R$ la circonferenza del cerchio di base. Si invita lo studente ad analizzare la seconda scelta e confrontarla con la prima.

Esercizio 6.22. *Dato un sistema lineare di di equazioni differenziali $u'(t) = Mu(t)$, quale proprietà si può dedurre dalla conoscenza di autovalori e autovettori della matrice M?*

Trova le soluzioni del sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x + z\,, \\ y' = -2x - y + z\,, \\ z' = 0\,. \end{cases}$$

Nella risoluzione considerare i vettori scritti di seguito come vettori colonna. Come già visto in altri esercizi se v è autovettore di autovalore λ, abbiamo che $Mv = \lambda v$. Quindi la funzione $u(t) = ve^{\lambda t}$ ha derivata $u'(t) = \lambda v e^{\lambda t} = Mve^{\lambda t} = Mu(t)$. Quindi u è soluzione del sistema lineare. Studiando la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

troviamo gli autovalori -1, 0 e 1 con autovettori rispettivamente $v_{-1} = (0,1,0)$, $v_0 = (-1,3,1)$ e $v_1 = (1,-1,0)$. Questi suggeriscono le tre funzioni $u_i(t) = v_i e^{it}$ come soluzioni del sistema lineare. Quindi essendo queste linearmente indipendenti troviamo che le soluzioni del sistema lineare sono

$$u(t) = Av_{-1}e^{-t} + Bv_0 + Cv_1e^t\,.$$

dove A, B, C sono costanti reali. A scopo illustrativo, la precedente è equivalente a scrivere

$$u(t) = A(0,1,0)e^{-t} + B(-1,3,1) + C(1,-1,0)e^t = (-B + Ce^t\,,\, Ae^{-t} + 3B - Ce^t\,,\, B)\,.$$

Esercizio 6.23. *Data la forma differenziale $\omega(x,y) = (3x+y^2)dx + (2xy+y^3)dy$ calcola $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ è definita come $\gamma(\theta) = (\, e^{\sin\theta}\,,\, \ln(2+\cos\theta)\,)$.*

Risoluzione omessa. Suggerimento: siete sicuri di voler impostare il calcolo dell'integrale di linea?

Esercizio 6.24. *Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare $x^3y''' - 6xy' + 12y = 0$.*
Suggerimento: provare con funzioni del tipo $y(x) = x^p$ con $p \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.25. *Sia ω la forma differenziale definita da $\omega(x,y,z,w) = x\,dy\wedge dz + y\,dx\wedge dw$. Sia $\varphi : [0,1]\times[0,2] \to \mathbb{R}^4$ la superficie definita come $\varphi(u,v) = (u,v,u^2+v^2,uv)$. Calcola $\displaystyle\int_\varphi \omega$.*

Esercizio 6.26. *Considera il seguente sistema di equazioni differenziali lineari:*

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

Risolvi il problema di Cauchy con condizioni iniziali: $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0$.

Esercizio 6.27. *Considerare la forma differenziale*

$$\omega(x,y,z,w) = x\,dy\wedge dz\wedge dw + y\,dz\wedge dw\wedge dx + z\,dw\wedge dx\wedge dy$$

e la superficie $\sigma:[0,1]\times[0,2]\times[0,3]\to\mathbb{R}^4$ *definita come*

$$\sigma(u,v,t) = \left(u\,,\,v\,,\,u^2v+t\,,\,uv^2+u^2t\right).$$

Calcola $\int_\sigma \omega$.

Esercizio 6.28. *Considerare la forma differenziale*

$$\omega(x,y,z) = x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$$

e la superficie σ *che ha come sostegno l'insieme*

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 10\}.$$

Calcola $\int_\sigma \omega$.

Esercizio 6.29. *Risolvi al variare di* $x_0>0$ *il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = t\sqrt{|x|} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Perché è possibile prevedere che
(a) la soluzione del problema è unica e
(b) è definita su tutto $\mathbb{R}$
sebbene la funzione $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dove* $h(x)=\sqrt{x}$ *non sia localmente lipschitziana?*
(La parte teorica vale 4 punti che verranno assegnati anche in base alla chiarezza dell'esposizione)

Esercizio 6.30. *Calcolare l'integrale della forma differenziale* $\omega(x,y) = y\,dx+(x^2-y^2)\,dy$ *lungo la curva* σ *il cui sostegno è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 2 nel semipiano positivo delle* y. *Porre l'orientazione della curva in modo che venga percorsa in senso orario.*

Esercizio 6.31. *Calcola l'integrale della forma differenziale*

$$\omega(x,y,z,w) = zw\;dx\wedge dw\wedge dy + y\;dz\wedge dx\wedge dw + z\;dw\wedge dx\wedge dw$$

sulla superficie $\sigma:[0,3]\times[0,1]\times[0,2]\to\mathbb{R}^4$

$$\sigma(a,b,c) = (a^2+c\,,\,a+b\,,\,c^2\,,\,b^3).$$

Esercizio 6.32. *Data la forma differenziale*

$$\omega(x,y,z) = [12x+7y]\,dx + \left[7x+8\log(1+z^2)\right]\,dy + \left[ze^{z^2}+\frac{16yz}{1+z^2}\right]dz\,,$$

calcola $\int_\gamma \omega$ *dove* $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^3$ *è definita da*

$$\gamma(t) = \left(t+1\,,\,(t^3-1)\sin t\,,\,(t-1)(e^{t^2}-1)\right).$$

Esercizio 6.33. *Dato* $\alpha\in\mathbb{R}$ *(anche negativo o nullo!), considerare la curva* $\gamma:[0,4\pi]\to\mathbb{R}^2$ *definita come* $\gamma(t) = (1+\alpha\cos t\,,\,\alpha\sin t)$. *Data la forma differenziale* $\omega:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\Omega_1(\mathbb{R}^2)$ *definita da*

$$\omega(x,y) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

verificare che è chiusa.

Dire per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ *è possibile calcolare l'integrale* $\int_\gamma\omega$ *e per questi determinarne il valore.*

Esercizio 6.34. *Data la superficie* $\sigma : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}^5$ *definita come*

$$\sigma(u,v) = (u^2 + v^2, 4, 2u - 3v, u^3 + v, -2u)$$

calcolare $\int_\sigma \omega$ *dove*

$$\omega(p,q,r,s,t) = pq\, dp \wedge dt + (s+t)\, dq \wedge ds + rt\, dr \wedge dt\,.$$

Esercizio 6.35. *Scegli tre punti a piacere* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$*. Considera il triangolo* T *avente questi punti come vertici. Dato il rettangolo* $Q = [0,1] \times [0,1]$ *definisci una parametrizzazione* $\sigma : Q \to T$ *del triangolo. Costruisci secondo la procedura vista durante il corso il bordo orientato* $\partial\sigma$ *e descrivi come si riduce il calcolo dell'integrale* $\int_\sigma \omega$ *dove* ω *è una generica 1-forma differenziale definita su* $\mathbb{R}^3$ *come*

$$\omega(x,y,z) = f_1(x,y,z)\, dx + f_2(x,y,z)\, dy + f_3(x,y,z)\, dz\,.$$

Esercizio 6.36. *Calcola* $\int_\sigma \omega$ *dove*

$$\omega(p,q,r,s) = p\, dpdr + t\, dqds$$

e $\sigma : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}^5$ *è definita come*

$$\sigma(x,y) = (x^2\,,\, y^2 + x\,,\, 3x - 2y\,,\, x^3)\,.$$

Esercizio 6.37. *Considerare una 2-superficie* σ *(o eventualmente un incollamento di più 2-superfici) avente come supporto l'insieme* $S = S_1 \cup S_2$ *dove*

$$S_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 = 4\,, |c| \le 3\}\,,$$
$$S_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 \le 4\,, |c| = 3\}\,.$$

Sceglierne un'orientazione e calcolare $\int_\sigma \omega$ *dove* $\omega(a,b,c) = a^2c^3\ da \wedge db + ac\ da \wedge dc - b^2c\ db \wedge dc$*.*

Esercizio 6.38. *Calcola* $\int_\sigma \omega$ *dove*

$$\omega(x,y,z,w) = y\, dy \wedge dz \wedge dw + z^2\, dx \wedge dy \wedge dw + xy\, dx \wedge dy \wedge dz$$

e $\sigma : [0,1] \times [0,3] \times [0,2] \to \mathbb{R}^4$ *è definita come* $\sigma(u,v,t) = (u,v,t,u^2+v^2+t^2)$*.*

Esercizio 6.39. *Una forma differenziale esatta* $\omega : U \to \Omega_{N-1}(\mathbb{R}^N)$ *(solamente continua, non di classe* C^1*) è definita su un insieme* $U \subset \mathbb{R}^N$ *contenente la palla* $B^N = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \le 1\}$*. Calcolare* $\int_\sigma \omega$ *dove* σ *è una parametrizzazione di* $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}$*. Non è richiesta la scrittura di una parametrizzazione di tale insieme.*

Dire se è possibile risolvere il precedente integrale in modo differente qualora la stessa forma differenziale esatta sia di classe C^1*.*

Esercizio 6.40. *Si consideri la forma differenziale lineare* ω *definita in* $\mathbb{R}^2$ *da:*

$$\omega(x,y) = (2xy + e^y)\, dx + \left(x^2 + xe^y + 3y^2\right) dy$$

1. *Verificare che* ω *è una forma differenziale esatta in* $\mathbb{R}^2$*.*
2. *Determinare una primitiva di* ω*.*
3. *Calcolare l'integrale di linea* $\int_\gamma \omega$*, dove* γ *è la curva* $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *con* $t \in [0, \pi]$*.*

Esercizio 6.41. *In* $\mathbb{R}^5$*, con coordinate cartesiane* (x,y,z,u,v)*, si consideri la 3-forma differenziale* ω *definita da:*

$$\omega(x,y,z,u,v) = u\, dx \wedge dy \wedge dz + x^2\, dy \wedge dz \wedge dv$$

Sia $\Phi : D \to \mathbb{R}^5$*, con* $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$ *definita da*

$$\Phi(t_1,t_2,t_3) = \left(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_1t_2,\ t_1 + t_3\right)$$

Calcola $\int_\Phi \omega$*.*

7 Altri esercizi

Esercizio 7.1. *Un solido di rotazione S è ottenuto ruotando di un angolo di 2π attorno all'asse z l'insieme*

$$T = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le 2y - 1 \le 1 - z \le y\}$$

Calcolare $\iiint_S z \, dxdydz$.

Esercizio 7.2. *Calcolare gli integrali*

$$\iiint_E (x^2 + y^2) \, dxdydz \,, \qquad \iiint_F (x^2 + y^2) \, dxdydz \,,$$

dove

$$E = \left\{\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 1 < \|\vec{x}\|_2 \,, \, \|\vec{x}\|_\infty < 2 \,, y \ge |x|\right\},$$
$$F = \left\{\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 1 < \|\vec{x}\|_2 < \|\vec{x}\|_\infty < 2\right\}.$$

Il primo integrale si calcola come

$$\begin{aligned}
\iiint_E (x^2 + y^2) \, dxdydz &= \iiint_{\|\vec{x}\|_\infty < 2} (x^2 + y^2) \, dxdydz - \iiint_{\|\vec{x}\|_2 \le 1} (x^2 + y^2) \, dxdydz \\
&= \iiint_{\|\vec{x}\|_\infty \le 2} (x^2 + y^2) \, dxdydz - \iiint_{\|\vec{x}\|_2 \le 1} (x^2 + y^2) \, dxdydz \\
&= \int_{-2}^{2} \left(\int_{-2}^{2} \left(\int_{-2}^{2} (x^2 + y^2) \, dz \right) dx \right) dy \\
&\qquad - \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\varphi \cdot \rho^2 \sin^2\varphi \, d\theta \right) d\varphi \right) d\rho = \cdots
\end{aligned}$$

Completare i calcoli per esercizio.

Per calcolare il secondo integrale si noti che vale $\|\vec{x}\|_\infty \le \|\vec{x}\|_2$ per ogni $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, quindi $F = \varnothing$ e quindi l'integrale richiesto vale zero.

Esercizio 7.3. *Data funzione $\rho : [0, 2\pi] \to [0, +\infty[$, con $\rho(0) = \rho(2\pi)$, mostrare che l'area delimitata dalla curva $\gamma(t) = (\rho(t)\cos t \,, \, \rho(t)\sin t)$ vale*

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(t) \, dt \,.$$

Svolto in classe nell'A.A. 2024/2025. Usare il campo vettoriale $F(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ e applicare la formula di Gauss-Green.