UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE
Dipartimento di Ingegneria e Architettura

AZIONAMENTI ELETTRICI

a.a. 2026/2027 – 9 CFU

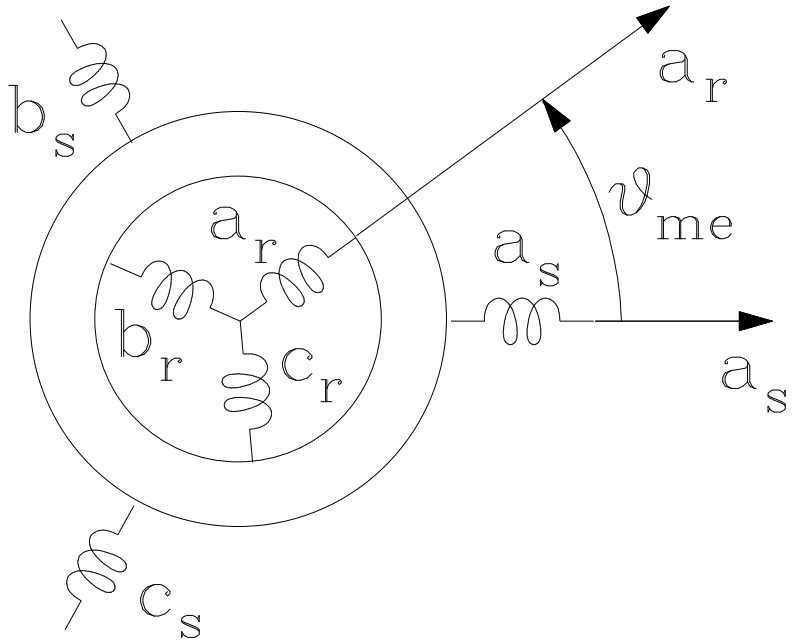
Matteo Olivo, PhD – *matteo.olivo@units.it*

DRAFT

MODELLO MATEMATICO DELLA MACCHINA ASINCRONA

STRUTTURA CIRCUITALE

La macchina asincrona è rappresentata come due avvolgimenti trifase connessi a stella, di cui uno fisso (statore) e l'altro libero di rotare e chiuso in cortocircuito (rotore): è la struttura della teoria circuitale delle macchine elettriche.



Convenzionalmente, la posizione del rotore è identificata dall'angolo assunto dall'asse della fase «a» del rotore (a_r) rispetto l'asse della corrispondente fase di statore (a_s).

Per generalizzare a una macchina con p coppie polari si utilizza l'equivalente elettrico della posizione meccanica (ϑ_{me}) legata alla reale posizione meccanica ϑ_m dalla nota relazione:

$$\vartheta_{me} = p\,\vartheta_m$$

IPOTESI per il MODELLO CIRCUITALE del MOTORE ASINCRONO

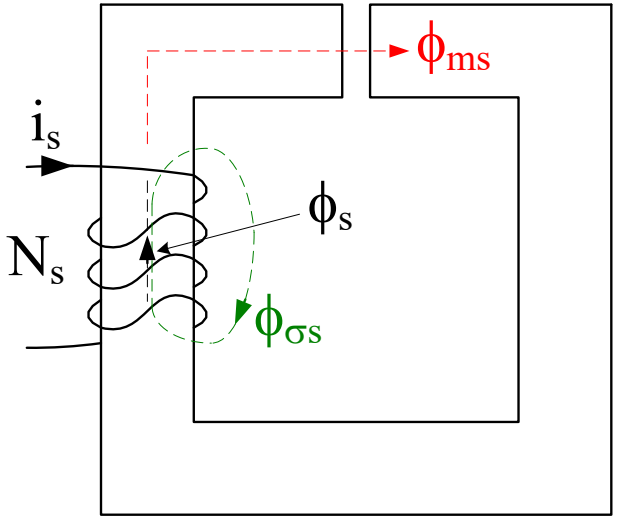
- traferro uniforme (superfici di statore e rotore lisce).
- avvolgimenti di statore e rotore simmetrici e distribuiti sinusoidalmente in modo da produrre una distribuzione sinusoidale della f.m.m. al traferro.
- andamento sinusoidale del valore delle induttanze in funzione della posizione angolare del rotore.
- circuiti magnetici lineari.

Si introducono le trasformazioni:

- trifase-bifase (abc-$\alpha\beta$) (stazionarie),
- bifase stazionaria-bifase rotante ($\alpha\beta$-dq).

Si mostra come questo consente di ottenere, a partire dalle equazioni trifase nelle variabili trifase, le equazioni in regime dinamico del motore asincrono.

COEFFICIENTI DI AUTOINDUTTANZA



Per una generica fase di statore (analoghe considerazioni valgono per il rotore) il flusso ϕ_s complessivamente prodotto da una corrente i_s circolante nell'avvolgimento è dato dalla somma di due quote:

- Flusso magnetizzante (ϕ_{ms}), che attraversa il traferro;
- Flusso disperso ($\phi_{\sigma s}$), che NON attraversa il traferro.

Si può scrivere:

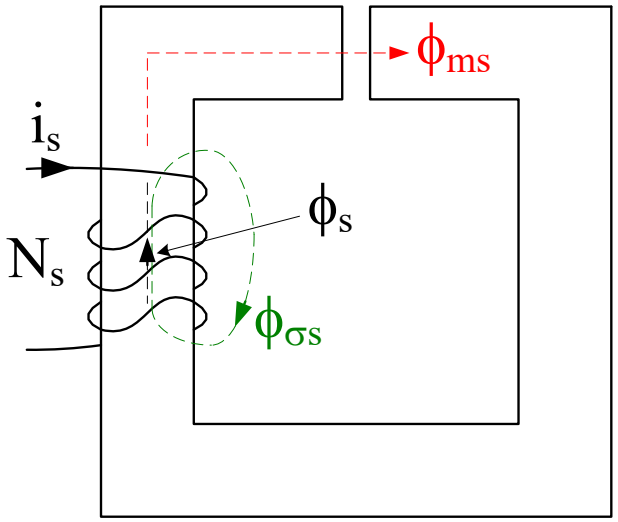
$$\phi_s = \phi_{ms} + \phi_{\sigma s} = N_s i_s / \Re$$

in cui la riluttanza $\Re$ è funzione solo della geometria, grazie alle ipotesi di linearità.

Introducendo i flussi concatenati $\lambda = N\phi$ risulta:

$$\lambda_s = \lambda_{ms} + \lambda_{\sigma s} = N_s^2 i_s / \Re$$

COEFFICIENTI DI AUTOINDUTTANZA



Ricordando la definizione di autoinduttanza risulta allora:

$$L_{ss} = \frac{\lambda_s}{i_s} = \frac{N_s^2}{\Re}$$

Inoltre:

$$L_{ss} = \frac{\lambda_{ms}}{i_s} + \frac{\lambda_{\sigma s}}{i_s} = L_{ms} + L_{\sigma s}$$

Introducendo la riluttanza del percorso magnetizzante e del flusso disperso si ha:

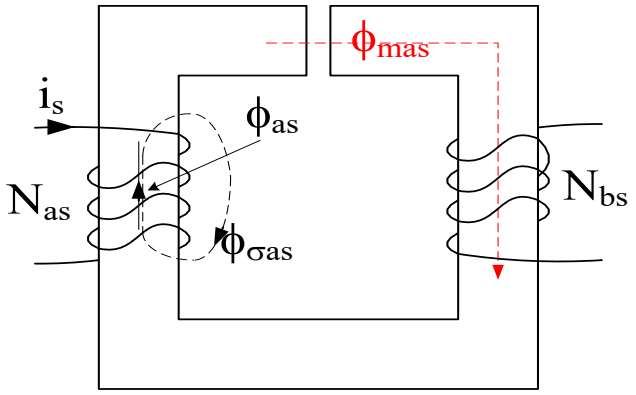
$$L_{ms} = N_s^2/\Re_m \qquad L_{\sigma s} = N_s^2/\Re_{\sigma s}$$

Analogamente risulta per il rotore:

$$L_{rr} = \lambda_r/i_r = N_r^2/\Re = L_{mr} + L_{\sigma r} = N_r^2/\Re_m + N_r^2/\Re_{\sigma r}$$

NB: si può ritenere che risulti sempre $\Re_{ms} = \Re_{mr} := \Re_m,\ \Re_{\sigma s} \neq \Re_{\sigma r}$

MUTUE INDUTTANZE
STATORE-STATORE e ROTORE-ROTORE



$N_{as} = N_{bs} = N_s$

La mutua induttanza tra due avvolgimenti (statorici) aventi assi inclinati di un angolo elettrico relativo ϑ è

$$M_{ss} = \hat{M}_{ss} \cos\vartheta$$

in cui $\hat{M}_{ss}$ è la mutua induttanza degli assi allineati.

Per un avvolgimento trifase si ha sempre $\vartheta = 2\pi/3$.

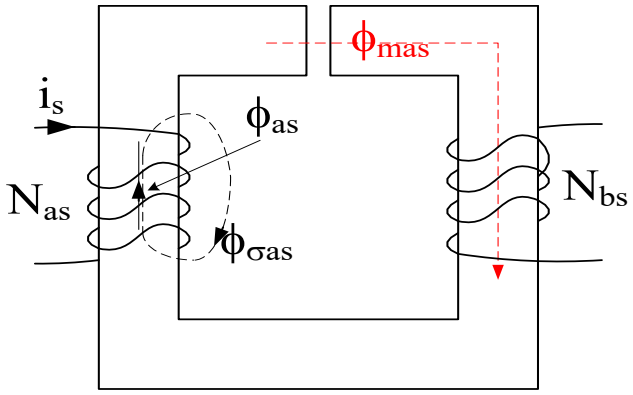
Il flusso che attraversa entrambe le fasi di statore è, per definizione, il flusso magnetizzante. Valutiamo dunque il valore massimo del coeff. di mutua induzione:

$$N_{as} i_{as} = \Re(\phi_{ms} + \phi_{\sigma s}) \quad \Rightarrow \quad \lambda_{bs} = N_{bs}\phi_{ms}$$

Risulta allora:

$$\hat{M}_{ss} = \frac{\lambda_{bs}}{i_{as}} = \frac{N_{bs}\phi_{ms}}{i_{as}} = \frac{N_{bs}(N_{as} i_{as} / \Re_m)}{i_{as}} = \frac{N_s^2}{\Re_m} = L_{ms}$$

MUTUE INDUTTANZE
STATORE-STATORE e ROTORE-ROTORE



$N_{as} = N_{bs} = N_s$

Risulta allora

$$M_{ss} = \widehat{M}_{ss} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} L_{ms}$$

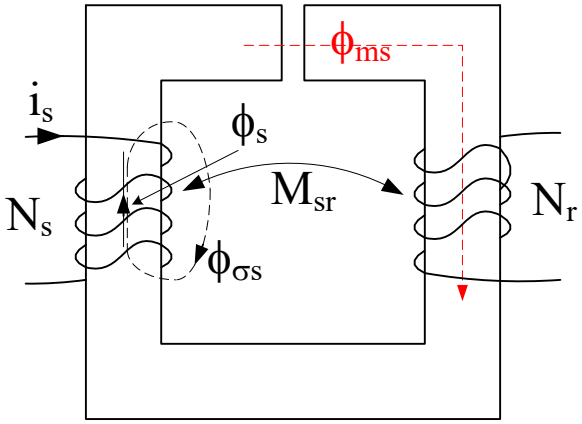
Analogamente si mostra che vale:

$$M_{rr} = -\frac{1}{2} L_{mr}$$

Si osserva poi che risulta:

$$L_{ms} = \left(\frac{N_s}{N_r}\right)^2 L_{mr} \quad \Rightarrow \quad M_{ss} = \left(\frac{N_s}{N_r}\right)^2 M_{rr}$$

MUTUE INDUTTANZE STATORE-ROTORE



Analogamente al caso precedente si ha:

$$M_{\mathrm{sr}} = \widehat{M}_{\mathrm{sr}} \cos\vartheta$$

con la differenza che ϑ non è noto a priori e dipende da ϑ_{me} con un eventuale offset di $\pm 2\pi/3$ a seconda della coppia di fasi considerate.

Per simmetria si può osservare che risulta:

$$\widehat{M}_{\mathrm{sr}} = \lambda_{\mathrm{r}}/i_{\mathrm{s}} = N_{\mathrm{r}}\phi_{\mathrm{m}}/i_s = N_{\mathrm{r}}N_{\mathrm{s}}/\Re_{\mathrm{m}}$$

ma anche:

$$\widehat{M}_{\mathrm{sr}} = \lambda_{\mathrm{s}}/i_{\mathrm{r}} = N_{\mathrm{s}}\phi_{\mathrm{m}}/i_{\mathrm{r}} = N_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{r}}/\Re_{\mathrm{m}}$$

Inoltre:

$$\widehat{M}_{\mathrm{sr}} = \frac{N_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{r}}}{\Re_{\mathrm{m}}} = \frac{N_{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{s}}}L_{\mathrm{ms}} = \frac{N_{\mathrm{s}}}{N_{\mathrm{r}}}L_{\mathrm{mr}}$$

EQUAZIONI DI LEGAME MAGNETICO

Unendo le espressioni precedenti si ottengono i flussi concatenati totali:

$$
\begin{cases}
\lambda_{as} = L_{ss} i_{as} + M_{ss} i_{bs} + M_{ss} i_{cs} + \widehat{M}_{sr} \cos(\vartheta_{me}) i_{ar} + \widehat{M}_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} + \frac{2\pi}{3}\right) i_{br} + \widehat{M}_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{2\pi}{3}\right) i_{cr} \\
\lambda_{bs} = M_{ss} i_{as} + L_{ss} i_{bs} + M_{ss} i_{cs} + \widehat{M}_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{2\pi}{3}\right) i_{ar} + \widehat{M}_{sr} \cos(\vartheta_{me}) i_{br} + \widehat{M}_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} + \frac{2\pi}{3}\right) i_{cr} \\
\lambda_{cs} = M_{ss} i_{as} + M_{ss} i_{bs} + L_{ss} i_{cs} + \widehat{M}_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} + \frac{2\pi}{3}\right) i_{ar} + \widehat{M}_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{2\pi}{3}\right) i_{br} + \widehat{M}_{sr} \cos(\vartheta_{me}) i_{cr} \\
\lambda_{ar} = \widehat{M}_{sr} \cos(\vartheta_{me})\, i_{as} + \widehat{M}_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{2\pi}{3}\right) i_{bs} + \widehat{M}_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} + \frac{2\pi}{3}\right) i_{cs} + L_{rr} i_{ar} + M_{rr} i_{br} + M_{rr} i_{cr} \\
\lambda_{br} = \widehat{M}_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} + \frac{2\pi}{3}\right) i_{as} + \widehat{M}_{sr} \cos(\vartheta_{me})\, i_{bs} + \widehat{M}_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{2\pi}{3}\right) i_{cs} + M_{rr} i_{ar} + L_{rr} i_{br} + M_{rr} i_{cr} \\
\lambda_{cr} = \widehat{M}_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{2\pi}{3}\right) i_{as} + \widehat{M}_{sr} \cos\left(\vartheta_{me} + \frac{2\pi}{3}\right) i_{bs} + \widehat{M}_{sr} \cos(\vartheta_{me})\, i_{cs} + M_{rr} i_{ar} + M_{rr} i_{br} + L_{rr} i_{cr}
\end{cases}
$$

EQUAZIONI DI LEGAME MAGNETICO

Queste equazioni possono essere semplificate osservando che in genere risulta:

$$i_{as} + i_{bs} + i_{cs} = 0 \qquad i_{ar} + i_{br} + i_{cr} = 0$$

Si introduce inoltre la notazione matriciale:

$$|\lambda_s| = [\lambda_{as} \quad \lambda_{bs} \quad \lambda_{cs}]^T \qquad |\lambda_r| = [\lambda_{ar} \quad \lambda_{br} \quad \lambda_{cr}]^T$$

$$|i_s| = [i_{as} \quad i_{bs} \quad i_{cs}]^T \qquad |i_r| = [i_{ar} \quad i_{br} \quad i_{cr}]^T$$

$$[m(\vartheta_{me})] = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_{me}) & \cos\left(\vartheta_{me} + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\vartheta_{me}) & \cos\left(\vartheta_{me} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\vartheta_{me} + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\vartheta_{me} - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\vartheta_{me}) \end{bmatrix}$$

EQUAZIONI DI LEGAME MAGNETICO

Le equazioni di legame magnetico diventano:

$$\begin{cases} |\lambda_{\mathrm{s}}| = (L_{\mathrm{ss}} - M_{\mathrm{ss}})|i_{\mathrm{s}}| + \widehat{M}_{\mathrm{sr}}[m(\vartheta_{\mathrm{me}})]|i_{\mathrm{r}}| \\ |\lambda_{\mathrm{r}}| = \widehat{M}_{\mathrm{sr}}[m(\vartheta_{\mathrm{me}})]^{T}|i_{\mathrm{s}}| + (L_{\mathrm{rr}} - M_{\mathrm{rr}})|i_{\mathrm{r}}| \end{cases}$$

Si pone:

$$L_{\mathrm{s}} \coloneqq L_{\mathrm{ss}} - M_{\mathrm{ss}} = \frac{3}{2} L_{\mathrm{ms}} + L_{\sigma \mathrm{s}}$$

$$L_{\mathrm{r}} \coloneqq L_{\mathrm{rr}} - M_{\mathrm{rr}} = \frac{3}{2} L_{\mathrm{mr}} + L_{\sigma \mathrm{r}}$$

RIPORTO A STATORE

Le precedenti equazioni possono essere riportate a statore introducendo le note relazioni di trasformazione:

$$|\lambda_{\mathrm{rs}}| = \frac{N_{\mathrm{s}}}{N_{\mathrm{r}}}\,|\lambda_{\mathrm{r}}| \qquad\qquad |i_{\mathrm{rs}}| = \frac{N_{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{s}}}\,|i_{\mathrm{r}}|$$

Inoltre:

$$L_{\mathrm{rs}} = \frac{N_{\mathrm{s}}^2}{N_{\mathrm{r}}^2}L_{\mathrm{r}} = \frac{3}{2}L_{\mathrm{ms}} + L_{\sigma\mathrm{rs}}, \qquad\qquad L_{\sigma\mathrm{rs}} := \frac{N_{\mathrm{s}}^2}{N_r^2}L_{\sigma\mathrm{r}}$$

Con opportuni passaggi e ricordando le relazioni precedenti si ottiene:

$$\begin{cases} |\lambda_{\mathrm{s}}| = L_s|i_{\mathrm{s}}| + L_{\mathrm{ms}}[m(\vartheta_{\mathrm{me}})]|i_{\mathrm{rs}}| \\ |\lambda_{\mathrm{rs}}| = L_{\mathrm{ms}}[m(\vartheta_{\mathrm{me}})]^T|i_{\mathrm{s}}| + L_{rs}|i_{\mathrm{rs}}| \end{cases}$$

EQUAZIONI NELLE VARIABILI DI FASE

Si applica la legge di Ohm generalizzata a ciascuna fase di statore e rotore.
Considerando l'avvolgimento di rotore non riportato si ha:

$$\begin{cases} v_{ks} = R_s i_{ks} + \dot{\lambda}_{ks} \\ (v_{kr}) = 0 = R_r i_{kr} + \dot{\lambda}_{kr} \end{cases} \qquad k \in \{a, b, c\}$$

dove v_{ks} e v_{kr} sono la tensione della k-esima fase di statore e rotore, rispettivamente, e quest'ultima è nulla per il fatto che l'avvolgimento rotorico risulta chiuso in corto-circuito. $\dot{x}$ indica la derivata temporale della variabile x.

Introducendo $|v_s| = |v_{as} \quad v_{bs} \quad v_{cs}|^T$ e $|0| = |0 \quad 0 \quad 0|^T$ si arriva all'equazione in forma matriciale:

$$\begin{cases} |v_s| = R_s |i_s| + |\dot{\lambda}_s| \\ |0| = R_r |i_r| + |\dot{\lambda}_r| \end{cases}$$

EQUAZIONI NELLE VARIABILI DI FASE

Si esplicita la derivata temporale del flusso:

$$|\dot{\lambda}_s| = L_s \frac{\partial}{\partial t}|i_s| + \hat{M}_{sr}[m(\vartheta_{me})] \frac{\partial}{\partial t}|i_r| + \dot{\vartheta}_{me}\hat{M}_{sr}[m'(\vartheta_{me})]|i_r|$$

$$|\dot{\lambda}_r| = L_r \frac{\partial}{\partial t}|i_r| + \hat{M}_{sr}[m(\vartheta_{me})]^T \frac{\partial}{\partial t}|i_s| + \dot{\vartheta}_{me}\hat{M}_{sr}[m'(\vartheta_{me})]^T|i_s|$$

dunque, posto $\omega_{me} = \dot{\vartheta}_{me}$ (equivalente elettrico della velocità mecc.) risulta:

$$\begin{cases} |v_s| = R_s|i_s| + L_s \frac{\partial}{\partial t}|i_s| + \hat{M}_{sr}[m(\vartheta_{me})] \frac{\partial}{\partial t}|i_r| + \omega_{me}\hat{M}_{sr}[m(\vartheta_{me})]|i_r| \\ |0| = R_r|i_r| + \hat{M}_{sr}[m(\vartheta_{me})]^T \frac{\partial}{\partial t}|i_s| + L_r \frac{\partial}{\partial t}|i_r| + \omega_{me}\hat{M}_{sr}[m(\vartheta_{me})]^T|i_s| \end{cases}$$

f.e.m. trasformatoriche

f.e.m. mozionali

EQUAZIONI NELLE VARIABILI DI FASE

Si riporta l'equazione di statore a rotore moltiplicando ambo i membri per N_s/N_r e ponendo $R_{rs} = (N_s/N_r)^2 R_r$:

$$\begin{cases} |v_s| = R_s|i_s| + |\dot{\lambda}_s| \\ |0| = R_{rs}|i_{rs}| + |\dot{\lambda}_{rs}| \end{cases}$$

ovvero, ricordando i risultati precedenti:

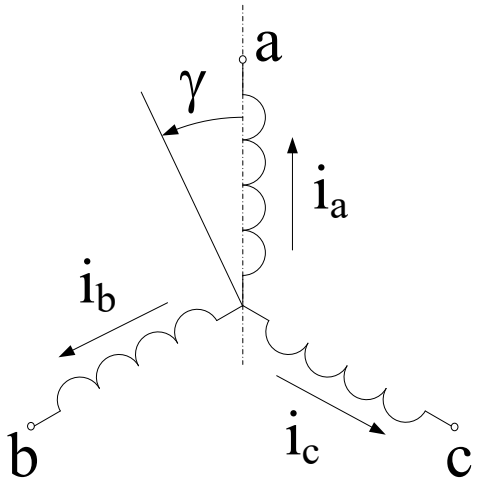
$$\begin{cases} |v_s| = R_s|i_s| + \frac{3}{2}L_{ms}\frac{\partial}{\partial t}|i_s| + L_{\sigma s}\frac{\partial}{\partial t}|i_s| + L_{ms}[m(\vartheta_{me})]\frac{\partial}{\partial t}|i_r| + \omega_{me}L_{ms}[m(\vartheta_{me})]|i_{rs}| \\ |0| = R_{rs}|i_{rs}| + \frac{3}{2}L_{ms}\frac{\partial}{\partial t}|i_{rs}| + L_{\sigma rs}\frac{\partial}{\partial t}|i_{rs}| + L_{ms}[m(\vartheta_{me})]^T\frac{\partial}{\partial t}|i_s| + \omega_{me}L_{ms}[m(\vartheta_{me})]^T|i_s| \end{cases}$$

f.e.m. trasformatoriche

c.d.t. per dispersione

f.e.m. mozionali

TRASFORMAZIONE TRIFASE-BIFASE



Espressioni delle densità angolari di f.m.m. (densità di corrente concatenata) di fase

$$J_a = K_a \cos(\gamma)\ \ i_a$$

$$J_b = K_b \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right)\ \ i_b$$

$$J_c = K_c \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right)\ \ i_c$$

γ indica la posizione angolare di osservazione.

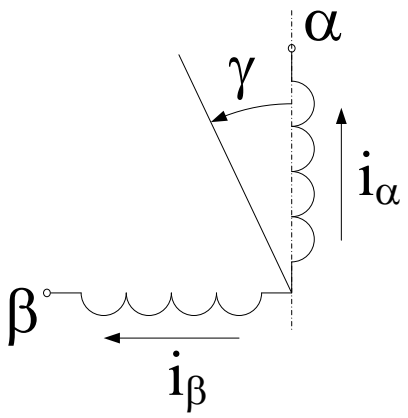
Densità angolare di f.m.m. totale

$$J_{a,b,c} = J_a + J_b + J_c$$

$$= K_{a,b,c}\left[\left(i_a + i_b \cos\frac{2\pi}{3} + i_c \cos\frac{2\pi}{3}\right)\cos(\gamma) + \left(i_b \sin\frac{2\pi}{3} - i_c \sin\frac{2\pi}{3}\right)\sin(\gamma)\right]$$

con $K_a = K_b = K_c = K_{a,b,c}$

TRASFORMAZIONE TRIFASE-BIFASE



$$J_\alpha = K_\alpha \cos(\gamma)\ \ i_\alpha$$
$$J_\beta = K_\beta \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)\ \ i_\beta = K_\beta \sin(\gamma)\ \ i_\beta$$

$$J_{\alpha,\beta} = J_\alpha + J_\beta = K_{\alpha,\beta}\left[\cos(\gamma)\ \ i_\alpha + \sin(\gamma)\ \ i_\beta\right]$$

$$K_\alpha = K_\beta = K_{\alpha,\beta}$$

Condizione di equivalenza

$$J_{\alpha,\beta} = J_{a,b,c}$$

$$K_{a,b,c}\left(i_a + i_b \cos\frac{2\pi}{3} + i_c \cos\frac{2\pi}{3}\right) = K_{\alpha,\beta} i_\alpha$$
$$K_{a,b,c}\left(i_b \sin\frac{2\pi}{3} - i_c \sin\frac{2\pi}{3}\right) = K_{\alpha,\beta} i_\beta$$

TRASFORMAZIONE TRIFASE-BIFASE

In forma matriciale

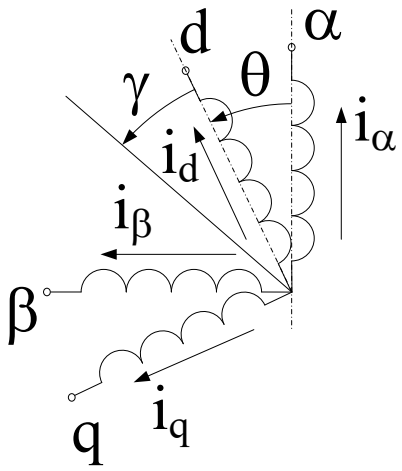
$$\begin{vmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{vmatrix} = \frac{K_{a,b,c}}{K_{\alpha,\beta}} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix}$$

Generalizzando, quando $i_a + i_b + i_c \neq 0$, si introduce la variabile i_0

$$\begin{vmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ K_0 & K_0 & K_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix}$$

dove $\frac{K_{a,b,c}}{K_{\alpha,\beta}} = K$

TRASFORMAZIONE “BIFASE-BIFASE” (“STAZIONARIA-ROTANTE”)



$$J_d = K_{\alpha\beta} \cos\gamma \, i_d \qquad J_\alpha = K_{\alpha\beta} \cos(\gamma + \theta) \, i_\alpha$$
$$J_q = K_{\alpha\beta} \sin\gamma \, i_q \qquad J_\beta = K_{\alpha\beta} \sin(\gamma + \theta) \, i_\beta$$

Condizione di equivalenza: $J_\alpha + J_\beta = J_d + J_q$

Sviluppando il secondo gruppo di equazioni

$$(\cos\gamma \cos\theta - \sin\gamma \sin\theta) i_\alpha + (\sin\gamma \cos\theta - \cos\gamma \sin\theta) i_\beta = \cos\gamma \, i_d + \sin\gamma \, i_q$$

TRASFORMAZIONE “BIFASE-BIFASE” (“STAZIONARIA-ROTANTE”)

Le trasformazioni sono dunque:

$$i_d = i_\alpha \cos\theta + i_\beta \sin\theta$$
$$i_q = -i_\alpha \sin\theta + i_\beta \cos\theta$$

In forma matriciale (con l’estensione alla terza variabile, corrente omopolare o di sequenza zero):

$$\begin{vmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{vmatrix}$$

Nessuna ipotesi è stata fatta sull’angolo θ, che dunque può anche essere variabile nel tempo.

TRASFORMAZIONI

Sono state introdotte due trasformazioni con un preciso significato fisico (equivalenza dei fenomeni magnetici: f.m.m., flusso, ecc.)

$$T_1 = K\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ K_0 & K_0 & K_0 \end{vmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le trasformazioni così introdotte possono “perdere” il loro significato fisico ed essere considerate mere *trasformazioni matematiche*.

Possono allora “trasformare” qualsiasi terna di grandezze: tensioni, correnti, flussi.

Tramite l’algebra matriciale possono essere applicate ad intere equazioni.

TRASFORMAZIONI

Conviene considerare un'altra "astrazione".

Gli assi degli avvolgimenti dei sistemi bifase possono essere "visti" come gli assi di *sistemi di riferimento ortogonali.* Per cui le trasformazioni di tipo T_2 diventano "trasformazioni tra sistemi di riferimento cartesiani".

Sono usuali così espressioni del tipo "*scelta del sistema di riferimento*", "*sistema di riferimento stazionario/rotante*", ecc.

Scelta del coefficiente K e K_0.

K di T_1 è un coefficiente arbitrario in quanto lo è anche $K_{\alpha,\beta}$ da cui dipende. Tra le possibili scelte due sono più significative di altre:

$K = \sqrt{\frac{2}{3}}, K_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Rende la T_1 ortogonale e mantiene inalterate le espressioni energetiche (potenza, coppia, ecc.).

$K = \frac{2}{3}, K_0 = \frac{1}{2}$ Mantiene inalterate le ampiezze delle grandezze sinusoidali.

TRASFORMAZIONE INVARIANTE ALLA POTENZA

Si ponga $K = \sqrt{2/3}$ e $K_0 = 1/\sqrt{2}$. Risulta:

$$T_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

Inoltre:

$$T_1^{-1} = \frac{2}{3K} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2K_0} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2K_0} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2K_0} \end{vmatrix}$$

$$T_1^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

TRASFORMAZIONE INVARIANTE ALLA POTENZA

Si può verificare che la matrice così è ottenuta è ortogonale, ovvero:

$$T_1^{-1} = T_1^T \quad \Rightarrow \quad T_1 T_1^T = T_1^T T_1 = I_3 \text{ (matrice identica di ordine 3)}$$

L'ortogonalità di T_1 è ciò che garantisce la preservazione della potenza. Supponiamo di considerare due terne di tensioni e correnti, la cui potenza è calcolabile, sfruttando l'algebra matriciale, come prodotto scalare dei corrispondenti vettori:

$$P_{abc} = |v_{abc}|^T |i_{abc}|$$

Dalla trasformazione T_1 segue anche:

$$\left|v_{\alpha\beta}\right| = T_1 |v_{abc}| \quad \left|i_{\alpha\beta}\right| = T_1 |i_{abc}|$$

e dunque

$$P_{\alpha\beta} = \left|v_{\alpha\beta}\right|^T \left|i_{\alpha\beta}\right| = |v_{abc}|^T T_1^T T_1 |i_{abc}| = |v_{abc}|^T |i_{abc}| = P_{abc}$$

TRASFORMAZIONE INVARIANTE ALLA POTENZA

Per determinare l'effetto sull'ampiezza si considera una terna di grandezze sinusoidali di ampiezza G_M e si applica la trasformazione T_1 (limitatamente a $\alpha\beta$ con K generico):

$$g_{abc} = G_M \begin{vmatrix} \cos(x) \\ \cos(x - 2\pi/3) \\ \cos(x + 2\pi/3) \end{vmatrix} \rightarrow \quad g_{\alpha\beta} = K G_M \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \cos(x) \\ \cos(x - 2\pi/3) \\ \cos(x + 2\pi/3) \end{vmatrix}$$

$$g_{\alpha\beta} = \frac{3}{2} K G_M |\cos x \quad \sin x|^T \quad \rightarrow \quad \left\| g_{\alpha\beta} \right\| = \frac{3}{2} K G_M$$

Si vede allora che la scelta $K = \sqrt{2/3}$ distorce l'ampiezza delle grandezze trasformate di un fattore $\sqrt{3/2}$.

TRASFORMAZIONE INVARIANTE ALL'AMPIEZZA

La relazione alla slide precedente mostra che per preservare l'ampiezza delle grandezze trasformate occorre scegliere $K = 2/3$ e $K_0 = 1/2$ (che porta la componente "0" a essere uguale alla vera componente omopolare - media). La matrice di trasformazione e la sua inversa diventano:

$$T_1 = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \qquad T_1^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

L'impatto sulla potenza è determinato osservando che risulta:

$$p_{abc} = |v_{abc}|^T |i_{abc}| = \left(T_1^{-1} v_{\alpha\beta}\right)^T \left(T_1^{-1} i_{\alpha\beta}\right) = v_{\alpha\beta}^T (T_1^{-1})^T T_1^{-1} i_{\alpha\beta} = \frac{3}{2} v_{\alpha\beta}^T i_{\alpha\beta}$$

Da qui in avanti, se non espressamente specificato, si sottintende come preferita la trasformazione invariante all'ampiezza.

EQUAZIONI UTILI

$$\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cos(\theta)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)$$

$$\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cos(\theta)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)$$

$$\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\sin\theta$$

$$\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\sin(\theta)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta)$$

$$\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\sin(\theta)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta)$$

TRASFORMAZIONI

Trasformazioni combinate:

$$T_2 T_1 = K \begin{vmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin\theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ K_0 & K_0 & K_0 \end{vmatrix}$$

$$(T_2 T_1)^{-1} = T_1^{-1} T_2^{-1} = \frac{2}{3K} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \frac{1}{2K_0} \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{2K_0} \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{2K_0} \end{vmatrix}$$

IL CONCETTO DI VETTORE SPAZIALE

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_a &= \mathrm{V}_M \cos(x) \\ \mathrm{v}_b &= \mathrm{V}_M \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \mathrm{v}_c &= \mathrm{V}_M \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad \xrightarrow{T_1} \quad \begin{aligned} \mathrm{v}_\alpha &= \mathrm{V}_M \cos(x) \\ \mathrm{v}_\beta &= \mathrm{V}_M \sin(x) \\ \mathrm{v}_0 &= 0 \end{aligned}$$

Si introduce il vettore spaziale:

$$\bar{v} := \frac{2}{3}\left[v_a + v_b e^{j\frac{2\pi}{3}} + v_c e^{j\frac{4\pi}{3}}\right] = \frac{2}{3} V_M \left[\cos(x) + \cos(x - 2\pi/3)\, e^{j\frac{2\pi}{3}} + \cos(x + 2\pi/3)\, e^{j\frac{4\pi}{3}}\right]$$

$$Re\{\bar{v}\} = \frac{2}{3} V_M \left[\cos x + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3} V_M \left[\cos x - \frac{\cos(x - 2\pi/3) + \cos(x + 2\pi/3)}{2}\right] = V_M \cos x$$

$$Im\{\bar{v}\} = \frac{2}{3} V_M \left[\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3} V_M \sqrt{3} \frac{\cos(x - 2\pi/3) - \cos(x + 2\pi/3)}{2} = V_M \sin x$$

IL CONCETTO DI VETTORE SPAZIALE

da cui

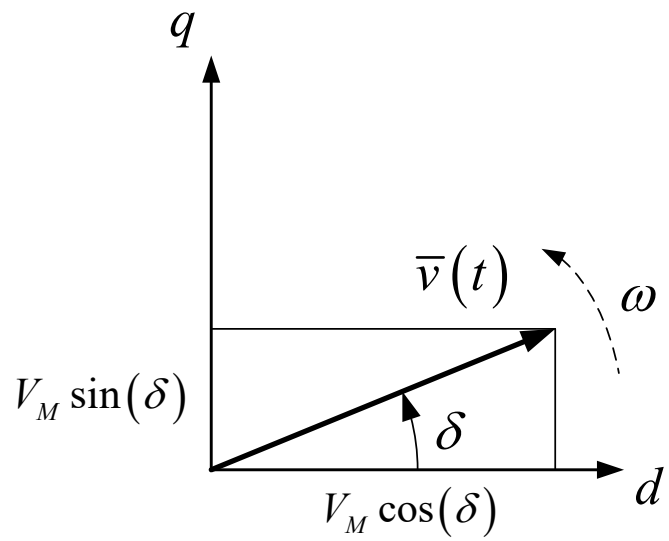
$$\bar{v} = V_M[\cos(x) + j\sin(x)] = v_\alpha + jv_\beta = V_M e^{jx}$$

Supponendo $x = \omega t + \delta$ questo rappresenta, nel riferimento $\alpha\beta$ stazionario, un fasore rotante con velocità ω. Si osserva inoltre che la matrice di trasformazione T2 è analoga a una trasformazione di rotazione nel piano complesso, ovvero si dimostra che vale, in generale:

$$v_\alpha + jv_\beta = (v_d + jv_q)e^{j\theta} \quad (\theta = \omega t)$$

In regime stazionario, dunque, il vettore trasformato sul riferimento *dq* appare come una costante (complessa):

$$v_d + jv_q = V_M e^{j\delta}$$



MODELLO DINAMICO SU RIF. BIFASE SEPARATI

Si applichi la trasformazione T_1 al modello di macchina sul riferimento trifase:

$$\begin{cases} \left|v_{\mathrm{s}}^{(\mathrm{abc})}\right| = R_{\mathrm{s}} \left|i_{s}^{(\mathrm{abc})}\right| + \left|\dot{\lambda}_{s}^{(\mathrm{abc})}\right| \\ |0| = R_{\mathrm{r}} |i_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{abc})}| + \left|\dot{\lambda}_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{abc})}\right| \end{cases} \qquad \begin{cases} \left|\lambda_{\mathrm{s}}^{(\mathrm{abc})}\right| = L_{s} \left|i_{\mathrm{s}}^{(\mathrm{abc})}\right| + \widehat{M}_{\mathrm{sr}}[m(\vartheta_{\mathrm{me}})] \left|i_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{abc})}\right| \\ \left|\lambda_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{abc})}\right| = \widehat{M}_{\mathrm{sr}}[m(\vartheta_{\mathrm{me}})]^{T} \left|i_{\mathrm{s}}^{(\mathrm{abc})}\right| + L_{\mathrm{r}} \left|i_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{abc})}\right| \end{cases}$$

in cui si è introdotto l'apice (abc) per evidenziare che le variabili sono espresse sul riferimento trifase. Per semplificare la trattazione si considera il caso di trasformazioni bifasi pure, ovvero non si considera il contributo delle componenti di sequenza zero (che, come è noto da altri corsi, non contribuiscono alla produzione della coppia). Con un lieve abuso di notazione, conviene ridefinire le trasformazioni come segue:

$$T_1 = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \qquad T_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \qquad T_2^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = T_2^{T}(\theta)$$

MODELLO DINAMICO SU RIF. BIFASE SEPARATI

Per ottenere le grandezze trasformate si sostituiscano, nelle equazioni precedenti, le grandezze di rotore $\left|g_{\mathrm{s}}^{(\mathrm{abc})}\right|$ con $T_1^{-1}\left|g_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta,\mathrm{s})}\right|$, mentre le grandezze di rotore $\left|g_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{abc})}\right|$ vanno sostituite con $T_1^{-1}\left|g_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta,\mathrm{r})}\right|$. Infatti, la trasformazione T_1 esprime le grandezze di statore e rotore su due riferimenti bifase distinti, di cui uno solidale allo statore $(\alpha\beta,\mathrm{s})$ e uno solidale al rotore, $\alpha\beta,\mathrm{r}$.

Dopo la trasformazione le equazioni elettriche preservano la loro struttura formale:

$$\begin{cases} T_1^{-1}\left|v_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{s})}\right| = R_{\mathrm{s}}T_1^{-1}\left|i_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{s})}\right| + T_1^{-1}\left|\dot{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{s})}\right| \\ |0| = R_{\mathrm{r}}T_1^{-1}|i_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{r})}| + T_1^{-1}\left|\dot{\lambda}_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{r})}\right| \end{cases} \xrightarrow[\text{ambo i membri}]{T_1 \times} \begin{cases} \left|v_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{s})}\right| = R_{\mathrm{s}}\left|i_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{s})}\right| + \left|\dot{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{s})}\right| \\ |0| = R_{\mathrm{r}}|i_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{r})}| + \left|\dot{\lambda}_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{r})}\right| \end{cases}$$

Per le equazioni di legame si ottiene invece:

$$\begin{cases} \left|\lambda_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{s})}\right| = L_s\left|i_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{s})}\right| + \widehat{M}_{\mathrm{sr}}T_1[m(\vartheta_{\mathrm{me}})]T_1^{-1}\left|i_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{r})}\right| \\ \left|\lambda_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{r})}\right| = \widehat{M}_{\mathrm{sr}}T_1[m(\vartheta_{\mathrm{me}})]^T T_1^{-1}\left|i_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta0,\mathrm{s})}\right| + L_{\mathrm{r}}\left|i_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta0.\mathrm{r})}\right| \end{cases}$$

MODELLO DINAMICO SU RIF. BIFASE SEPARATI

Risulta, ponendo $\vartheta_{me}^{+} := \vartheta_{me} + 2\pi/3$ e $\vartheta_{me}^{-} := \vartheta_{me} - 2\pi/3$:

$$T_1[m(\vartheta_{me})]T_1^{-1} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}1 & -1/2 & -1/2\\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\vartheta_{me}) & \cos(\vartheta_{me}^{+}) & \cos(\vartheta_{me}^{-})\\ \cos(\vartheta_{me}^{-}) & \cos(\vartheta_{me}) & \cos(\vartheta_{me}^{+})\\ \cos(\vartheta_{me}^{+}) & \cos(\vartheta_{me}^{-}) & \cos(\vartheta_{me})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\\ -1/2 & -\sqrt{3}/2\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}\begin{bmatrix}1 & -1/2 & -1/2\\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\cos(\vartheta_{me}) & -\frac{3}{2}\sin(\vartheta_{me})\\ \frac{3}{2}\cos(\vartheta_{me}^{-}) & -\frac{3}{2}\sin(\vartheta_{me}^{-})\\ \frac{3}{2}\cos(\vartheta_{me}^{+}) & -\frac{3}{2}\sin(\vartheta_{me}^{+})\end{bmatrix} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix}\cos(\vartheta_{me}) & -\sin(\vartheta_{me})\\ \sin\vartheta_{me} & \cos(\vartheta_{me})\end{bmatrix} = \frac{3}{2}T_2^{-1}(\vartheta_{me})$$

e con la stessa logica si dimostra che vale:

$$T_1[m(\vartheta_{me})]^T T_1^{-1} = \frac{3}{2}T_2(\vartheta_{me})$$

MODELLO DINAMICO SU RIF. BIFASE SEPARATI

Sostituendo questi risultati nelle equazioni di legame si ottiene:

$$\begin{cases} \left|\lambda_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta,\mathrm{s})}\right| = L_s \left|i_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta,\mathrm{s})}\right| + \frac{3}{2}\widehat{M}_{\mathrm{sr}} T_2^{-1}(\vartheta_{\mathrm{me}}) \left|i_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta,\mathrm{r})}\right| \\ \left|\lambda_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta,\mathrm{r})}\right| = \frac{3}{2}\widehat{M}_{\mathrm{sr}} T_2(\vartheta_{\mathrm{me}}) \left|i_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta,s)}\right| + L_{\mathrm{r}} \left|i_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta.\mathrm{r})}\right| \end{cases}$$

Si ricordino le relazioni:

$$L_{\mathrm{s}} = \frac{3}{2}L_{\mathrm{ms}} + L_{\sigma\mathrm{s}} \qquad \widehat{M}_{\mathrm{sr}} = \frac{N_r}{N_s}L_{\mathrm{ms}} \qquad L_{\mathrm{r}} = \frac{3}{2}L_{\mathrm{mr}} + L_{\sigma\mathrm{r}} = \frac{3}{2}\left(\frac{N_{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{s}}}\right)^2 L_{\mathrm{ms}} + L_{\sigma\mathrm{r}}$$

Posto $\frac{3}{2}L_{ms} \coloneqq L_{\mathrm{M}}$ e $N_s/N_r \coloneqq m$ risulta allora:

$$\begin{cases} \left|\lambda_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta,\mathrm{s})}\right| = (L_{\mathrm{M}} + L_{\sigma\mathrm{s}}) \left|i_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta,\mathrm{s})}\right| + \frac{L_{\mathrm{M}}}{m} T_2^{-1}(\vartheta_{\mathrm{me}}) \left|i_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta,\mathrm{r})}\right| \\ \left|\lambda_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta,\mathrm{r})}\right| = \frac{L_{\mathrm{M}}}{m} T_2(\vartheta_{\mathrm{me}}) \left|i_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta,\mathrm{s})}\right| + \left(\frac{L_{\mathrm{M}}}{m^2} + L_{\sigma\mathrm{r}}\right) \left|i_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta.\mathrm{r})}\right| \end{cases}$$

RIFERIMENTO UNICO

Per la progettazione del controllo è necessario riferire tutte le grandezze (di statore e rotore) a un riferimento unico. Ciò significa trasformare *le sole grandezze di rotore* oppure *le sole grandezze di statore* o in generale *entrambe* tramite una trasformazione bifase-bifase per rappresentarle in un opportuno sistema di riferimento comune a tutte.

Alcuni tra i sistemi di riferimento più usuali sono:

- *riferimento stazionario* (solidale con lo statore), denotato con apice «s», ottenuto trasformando le sole grandezze di rotore con la matrice $T_2(-\vartheta_{\mathrm{me}})$;
- *riferimento rotante solidale con il rotore*, denotato con apice «r» e ottenuto trasformando le grandezze di statore applicando la matrice $T_2(\vartheta_{\mathrm{me}})$;
- *riferimento generico rotante con pulsazione* ω_{d}, denotato con apice «*d*» e ottenuto applicando la matrice $T_2(\vartheta_d)$ alle grandezze di statore, mentre alle grandezze di rotore si applica la matrice $T_2(\vartheta_d - \vartheta_{\mathrm{me}})$, dove $\vartheta_d = \int \omega_d \mathrm{d}t$. Una scelta comune è quella di prendere, in questo caso, un riferimento sincrono, ovvero $\omega_d = 2\pi f_{\mathrm{s}}$.

Si noti che i riferimenti «s» e «r» sono ottenibili dal «*d*» assumendo, rispettivamente, $\omega_d = 0$ e $\omega_d = \omega_{\mathrm{me}}$.

OSSERVAZIONI UTILI

Per semplificare la trattazione teorica è opportuno osservare che sono sempre valide le seguenti relazioni:

$$T_2(\vartheta + \varphi) = T_2(\vartheta)T_2(\varphi) \qquad T_2(-\vartheta) = T_2^{-1}(\vartheta)$$

Queste identità possono essere facilmente verificate facendo uso di note relazioni goniometriche, ma è ancora più intuitiva se si considera la natura della trasformazione T_2 quale matrice di rotazione. Una terza via è la giustificazione per mezzo dell'equivalente complesso (vettoriale) della suddetta trasformazione:

$$\left|g^{(dq)}\right| = T_2(\vartheta)\left|g^{(\alpha\beta)}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \bar{g}_{dq} = e^{-j\vartheta}\bar{g}_{\alpha\beta}$$

in cui si è posto $\bar{g}_{\alpha\beta} = g_\alpha + jg_\beta$ e $\bar{g}_{dq} = g_d + jg_q$.

MODELLO DINAMICO SU RIF. BIFASE UNICO (GENERICO)

Conviene lavorare con la rappresentazione complessa del modello su rif. bifase separati:

$$\begin{cases} \bar{v}_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta,\mathrm{s})} = R_{\mathrm{s}}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta,\mathrm{s})} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta,\mathrm{s})} \\ |0| = R_{\mathrm{r}}\bar{\imath}_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta,\mathrm{r})} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta,\mathrm{r})} \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta,\mathrm{s})} = (L_{\mathrm{M}} + L_{\sigma\mathrm{s}})\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta,\mathrm{s})} + \dfrac{L_{\mathrm{M}}}{m}e^{j\vartheta_{\mathrm{me}}}\bar{\imath}_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta,\mathrm{r})} \\ \bar{\lambda}_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta,\mathrm{r})} = \dfrac{L_{\mathrm{M}}}{m}e^{-j\vartheta_{\mathrm{me}}}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(\alpha\beta,\mathrm{s})} + \left(\dfrac{L_{\mathrm{M}}}{m^2} + L_{\sigma\mathrm{r}}\right)\bar{\imath}_{\mathrm{r}}^{(\alpha\beta.\mathrm{r})} \end{cases}$$

Per trasformare queste equazioni sul generico riferimento bifase unico, rotante con velocità ω_d, in base alle osservazioni precedenti, ogni grandezza di statore $\bar{g}_s^{(\alpha\beta,\mathrm{s})}$ va sostituita con la corrispondente $e^{j\vartheta_{\mathrm{d}}}\bar{g}_s^{(d)}$ e, conseguentemente, $\bar{g}_r^{(\alpha\beta,\mathrm{r})}$ va rimpiazzata con $e^{j(\vartheta_{\mathrm{d}}-\vartheta_{\mathrm{me}})}\bar{g}_{\mathrm{r}}^{(d)}$. In particolare, per le equazioni elettriche, risulterà:

$$\begin{cases} e^{j\vartheta_{\mathrm{d}}}\bar{v}_{\mathrm{s}}^{(d)} = R_{\mathrm{s}}e^{j\vartheta_d}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left[e^{j\vartheta_d}\bar{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(d)}\right] \\ 0 = R_{\mathrm{r}}e^{j(\vartheta_d-\vartheta_{\mathrm{me}})}\bar{\imath}_{\mathrm{r}}^{(d)} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left[e^{j(\vartheta_d-\vartheta_{\mathrm{me}})}\bar{\lambda}_{\mathrm{r}}^{(d)}\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_{\mathrm{s}}^{(d)} = R_{\mathrm{s}}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + j\omega_d\bar{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(d)} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(d)} \\ 0 = R_{\mathrm{r}}\bar{\imath}_{\mathrm{r}}^{(d)} + j(\omega_d - \omega_{\mathrm{me}})\bar{\lambda}_{\mathrm{r}}^{(d)} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_{\mathrm{r}}^{(d)} \end{cases}$$

Si riconoscono, analogamente al caso trifase, contributi di f.e.m. trasformatoriche (termini del tipo $\partial\lambda/\partial t$) e f.e.m. mozionali (termini del tipo $j\omega\lambda$).

MODELLO DINAMICO SU RIF. BIFASE UNICO (GENERICO)

Per quanto riguarda le equazioni di legame (parte magnetica):

$$\begin{cases} e^{j\vartheta_d}\bar{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(d)} = (L_{\mathrm{M}} + L_{\sigma\mathrm{s}})e^{j\vartheta_d}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + \dfrac{L_{\mathrm{M}}}{m}e^{j\vartheta_{\mathrm{me}}}e^{j(\vartheta_d-\vartheta_{\mathrm{me}})}\bar{\imath}_{\mathrm{r}}^{(d)} \\ e^{j(\vartheta_d-\vartheta_{\mathrm{me}})}\bar{\lambda}_{\mathrm{r}}^{(d)} = \dfrac{L_{\mathrm{M}}}{m}e^{-j\vartheta_{\mathrm{me}}}e^{j\vartheta_d}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + \left(\dfrac{L_{\mathrm{M}}}{m^2} + L_{\sigma\mathrm{r}}\right)e^{j(\vartheta_d-\vartheta_{\mathrm{me}})}\bar{\imath}_{\mathrm{r}}^{(d)} \end{cases}$$

che ridotta porta a:

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(d)} = (L_{\mathrm{M}} + L_{\sigma\mathrm{s}})\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + \dfrac{L_{\mathrm{M}}}{m}\bar{\imath}_{\mathrm{r}}^{(d)} \\ \bar{\lambda}_{\mathrm{r}}^{(d)} = \dfrac{L_{\mathrm{M}}}{m}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + \left(\dfrac{L_{\mathrm{M}}}{m^2} + L_{\sigma\mathrm{r}}\right)\bar{\imath}_{\mathrm{r}}^{(d)} \end{cases}$$

È interessante osservare come (a prescindere dal particolare riferimento unico considerato) le equazioni di legame ivi espresse sono formalmente identiche, ovvero si è persa qualunque dipendenza dalla posizione angolare. Questo fatto, oltre che semplificare notevolmente i calcoli, ci comunica che la trasformazione bifase rotante qui introdotta produce, concettualmente, una macchina elettrica equivalente a quella di partenza in cui i circuiti rotorici e statorici rimangono sempre solidali fra loro. Attenzione che però una interazione tra i due mondi (per mezzo della velocità) è comunque presente sia a statore che a rotore, per mezzo delle f.e.m mozionali.

RIPORTO A STATORE

Le equazioni elettriche e le equazioni di legame espresse sul generico riferimento bifase unico possono essere espresse dal punto di vista statorico andando a introdurre le note equazioni di riporto, basate sul rapporto spire $m = N_s/N_r$:

$$\lambda_{rs} = m\,\lambda_r \qquad i_{rs} = i_r/m$$

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(d)} = (L_{\mathrm{M}} + L_{\sigma\mathrm{s}})\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + \dfrac{L_{\mathrm{M}}}{m}\left(m\,\bar{\imath}_{rs}^{(d)}\right) \\ m\bar{\lambda}_{\mathrm{r}}^{(d)} = m\left[\dfrac{L_{\mathrm{M}}}{m}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + \left(\dfrac{L_{\mathrm{M}}}{m^2} + L_{\sigma\mathrm{r}}\right)\left(m\,\bar{\imath}_{rs}^{(d)}\right)\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(d)} = L_s\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + L_M\bar{\imath}_{\mathrm{rs}}^{(d)} \\ \bar{\lambda}_{\mathrm{rs}}^{(d)} = L_{\mathrm{M}}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + L_{\mathrm{rs}}\bar{\imath}_{\mathrm{rs}}^{(d)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{v}_{\mathrm{s}}^{(d)} = R_{\mathrm{s}}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + j\omega_d\bar{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(d)} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(d)} \\ 0 = R_{\mathrm{r}}\left(m\,\bar{\imath}_{\mathrm{rs}}^{(d)}\right) + j(\omega_d - \omega_{\mathrm{me}})\left(\dfrac{\bar{\lambda}_{\mathrm{rs}}^{(d)}}{m}\right) + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\bar{\lambda}_{\mathrm{rs}}^{(d)}}{m}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_{\mathrm{s}}^{(d)} = R_{\mathrm{s}}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + j\omega_d\bar{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(d)} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(d)} \\ 0 = R_{\mathrm{rs}}\bar{\imath}_{rs}^{(d)} + j(\omega_d - \omega_{\mathrm{me}})\bar{\lambda}_{\mathrm{rs}}^{(d)} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_{\mathrm{rs}}^{(d)} \end{cases}$$

in cui si sono introdotte le quantità:

$$L_{\mathrm{s}} = L_{\mathrm{M}} + L_{\sigma s} \qquad L_{\sigma\mathrm{rs}} = m^2 L_{\sigma\mathrm{r}} \qquad L_{\mathrm{rs}} = L_{\mathrm{M}} + L_{\sigma\mathrm{rs}} \qquad R_{\mathrm{rs}} = m^2 R_{\mathrm{r}}$$

MODELLI DINAMICI SU RIFERIMENTI DI INTERESSE

Come osservato in precedenza, la scelta della velocità del riferimento bifase unico (ω_d) può portare a tre riferimenti particolari che vengono qui evidenziati. Si può vedere che la scelta di ω_d impatta solamente sulle equazioni elettriche, mentre le equazioni di legame restano identiche in tutti i riferimenti:

- rif. stazionario (statorico), $\omega_d = 0$

$$\begin{cases} \bar{v}_\mathrm{s}^{(\mathrm{st})} = R_\mathrm{s}\bar{\imath}_\mathrm{s}^{(\mathrm{st})} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_\mathrm{s}^{(\mathrm{st})} \\ 0 = R_\mathrm{rs}\bar{\imath}_{rs}^{(\mathrm{st})} - j\omega_\mathrm{me}\bar{\lambda}_{rs}^{(\mathrm{st})} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_{rs}^{(\mathrm{st})} \end{cases}$$

- rif. rotante (rotorico), $\omega_d = \omega_\mathrm{me}$

$$\begin{cases} \bar{v}_\mathrm{s}^{(\mathrm{rt})} = R_\mathrm{s}\bar{\imath}_\mathrm{s}^{(\mathrm{rt})} + j\omega_\mathrm{me}\bar{\lambda}_\mathrm{s}^{(\mathrm{rt})} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_\mathrm{s}^{(\mathrm{rt})} \\ 0 = R_\mathrm{rs}\bar{\imath}_{rs}^{(\mathrm{rt})} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_{rs}^{(\mathrm{rt})} \end{cases}$$

- rif. sincrono, $\omega_d = \omega_s = 2\pi f_s$

$$\begin{cases} \bar{v}_\mathrm{s}^{(\mathrm{sy})} = R_\mathrm{s}\bar{\imath}_\mathrm{s}^{(\mathrm{sy})} + j\omega_\mathrm{s}\bar{\lambda}_\mathrm{s}^{(\mathrm{sy})} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_\mathrm{s}^{(\mathrm{sy})} \\ 0 = R_\mathrm{rs}\bar{\imath}_{rs}^{(\mathrm{sy})} + j\omega_\mathrm{sce}\bar{\lambda}_{rs}^{(\mathrm{sy})} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_{rs}^{(\mathrm{sy})} \end{cases}$$

Pulsazione di scorrimento
$\omega_\mathrm{sce} := \omega_\mathrm{s} - \omega_\mathrm{me}$

RAPPRESENTAZIONE ALGEBRICA (MATRICIALE)

Il modello dinamico su riferimento unico (generico) è stato ottenuto, per praticità, utilizzando la notazione vettoriale complessa della trasformazione T_2; ovviamente allo stesso risultato si sarebbe potuto pervenire utilizzando la sue equivalente espressione matriciale. Questa dimostrazione viene omessa, per cui ci limitiamo a riscrivere le equazioni dinamiche nella corrispondente forma algebrica. Per la maggior parte delle espressioni basta sostituire le grandezze $\bar{g}$ con il corrispondente array di componenti $|g|$. Fa eccezione l'operatore complesso j, per cui va introdotta una equivalente matrice di trasformazione $\mathfrak{J}$:

Rappresentazione complessa

$$\bar{g} = g_d + jg_q$$

$$j\bar{g} = -g_q + jg_d$$

Rappresentazione matriciale

$$|g| = \begin{vmatrix} g_d \\ g_q \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{J}|g| = \begin{vmatrix} -g_q \\ g_d \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} g_d \\ g_q \end{vmatrix}$$

da cui segue:

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

RAPPRESENTAZIONE ALGEBRICA (MATRICIALE)

Questa definizione permette dunque di scrivere l'equivalente rappresentazione algebrica. Per brevità si considera il solo caso riportato a statore con riferimento generico, ma chiaramente la stessa logica è valida per tutte le possibile scelte:

$$\begin{cases} \left|v_{\mathrm{s}}^{(d)}\right| = R_{\mathrm{s}}\left|i_{\mathrm{s}}^{(d)}\right| + \dfrac{\partial}{\partial t}\left|\lambda_{\mathrm{s}}^{(d)}\right| + \omega_d \mathfrak{J}\left|\lambda_{\mathrm{s}}^{(d)}\right| \\ 0 = R_{\mathrm{rs}}\left|i_{\mathrm{rs}}^{(d)}\right| + \dfrac{\partial}{\partial t}\left|\lambda_{\mathrm{rs}}^{(d)}\right| + (\omega_d - \omega_{\mathrm{me}})\mathfrak{J}\left|\lambda_{\mathrm{rs}}^{(d)}\right| \end{cases} \qquad \begin{cases} \left|\lambda_{\mathrm{s}}^{(d)}\right| = L_{\mathrm{s}}\left|i_{\mathrm{s}}^{(d)}\right| + L_{\mathrm{M}}\left|i_{\mathrm{rs}}^{(d)}\right| \\ \left|\lambda_{\mathrm{rs}}^{(d)}\right| = L_{\mathrm{M}}\left|i_{\mathrm{s}}^{(d)}\right| + L_{\mathrm{rs}}\left|i_{\mathrm{rs}}^{(d)}\right| \end{cases}$$

La particolare struttura antisimmetrica della matrice $\mathfrak{J}$ ci rende evidente come esista un accoppiamento tra le due componenti d'asse (*d* e *q)* di statore e rotore, rispettivamente, oltre che all'accoppiamento magnetico tra statore e rotore. Questo è particolarmente evidente se si scrivono le singole componenti cartesiane:

$$\begin{cases} v_{\mathrm{s},d} = R_{\mathrm{s}} i_{\mathrm{s},d} + \dot{\lambda}_{\mathrm{s},d} - \omega_d \lambda_{\mathrm{s},q} \\ v_{\mathrm{s},q} = R_{\mathrm{s}} i_{\mathrm{s},q} + \dot{\lambda}_{\mathrm{s},q} + \omega_d \lambda_{\mathrm{s},d} \\ v_{\mathrm{rs},d} = R_{\mathrm{rs}} i_{rs,d} + \dot{\lambda}_{rs,d} - (\omega_d - \omega_{\mathrm{me}})\lambda_{\mathrm{rs},q} \\ v_{\mathrm{rs},q} = R_{\mathrm{rs}} i_{\mathrm{rs},q} + \dot{\lambda}_{\mathrm{rs},q} + (\omega_d - \omega_{\mathrm{me}})\lambda_{rs,d} \end{cases}$$