Dimostrazione del Controllo della Norma dell'Integrale

Sommario

In questa nota presentiamo la dimostrazione del fatto che la norma dell'integrale di una funzione a valori vettoriali (o complessi) con dominio in $\mathbb{R}^N$ è controllata dall'integrale della sua norma. Questa proprietà rappresenta l'estensione della classica disuguaglianza triangolare al contesto continuo degli integrali.

1 Enunciato

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme misurabile e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ (oppure $f : \Omega \to \mathbb{C}$) una funzione integrabile. Vogliamo dimostrare che vale la seguente disuguaglianza:

$$\left\| \int_\Omega f(x)\,dx \right\| \leq \int_\Omega \|f(x)\|\,dx \tag{1}$$

2 Dimostrazione nel caso vettoriale ($\mathbb{R}^M$)

La dimostrazione fa uso della proprietà di dualità della norma euclidea e della linearità dell'integrale.

Dimostrazione. Sia $V \in \mathbb{R}^M$ il vettore risultante dall'integrazione della funzione f sul dominio Ω:

$$V = \int_\Omega f(x)\,dx$$

Se $V = 0$, la disuguaglianza (1) è banalmente verificata poiché il membro di sinistra è nullo e il membro di destra è l'integrale di una quantità non negativa ($\|f(x)\| \geq 0$). Possiamo quindi assumere, senza perdita di generalità, che $V \neq 0$.

Ricordiamo la proprietà fondamentale del prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $\mathbb{R}^M$: la norma al quadrato di un vettore è data dal prodotto scalare del vettore con se stesso:

$$\|V\|^2 = \langle V, V \rangle$$

Dividendo entrambi i membri per $\|V\| > 0$, otteniamo un'espressione per la norma:

$$\|V\| = \left\langle \frac{V}{\|V\|}, V \right\rangle$$

Definiamo ora il vettore unitario $u := \frac{V}{\|V\|}$, per cui vale ovviamente $\|u\| = 1$. Sostituendo la definizione iniziale di V nell'equazione precedente, abbiamo:

$$\|V\| = \left\langle u, \int_\Omega f(x)\, dx \right\rangle$$

Sfruttando la **linearità dell'integrale** e del prodotto scalare, è possibile portare il vettore costante u all'interno dell'operatore di integrale:

$$\|V\| = \int_\Omega \langle u, f(x) \rangle\, dx$$

Per ogni punto $x \in \Omega$, applichiamo la **disuguaglianza di Cauchy-Schwarz** al prodotto scalare sotto l'integrale:

$$\langle u, f(x) \rangle \leq \|u\| \cdot \|f(x)\|$$

Poiché $\|u\| = 1$, la disuguaglianza si riduce a:

$$\langle u, f(x) \rangle \leq \|f(x)\|$$

Per la proprietà di monotonicità dell'integrale, sostituendo quest'ultima relazione otteniamo:

$$\|V\| \leq \int_\Omega \|f(x)\|\, dx$$

Ricordando che $V = \int_\Omega f(x)\, dx$, giungiamo esattamente alla tesi cercata:

$$\left\| \int_\Omega f(x)\, dx \right\| \leq \int_\Omega \|f(x)\|\, dx$$

■

3 Variante nel caso complesso ($\mathbb{C}$)

Se la funzione è a valori complessi ($f : \Omega \to \mathbb{C}$), la norma coincide con il modulo $|\cdot|$. Il principio è analogo, ma sfrutta la rappresentazione polare dei numeri complessi.

Dimostrazione. Sia $z = \int_\Omega f(x)\,dx \in \mathbb{C}$. Scriviamo z in forma polare come $z = Re^{i\theta}$, dove $R = |z|$ è il modulo cercato e $\theta = \arg(z)$. Moltiplicando entrambi i membri per $e^{-i\theta}$, si ottiene:

$$|z| = R = e^{-i\theta} \int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega e^{-i\theta} f(x)\,dx$$

Poiché il modulo R è un numero reale puro, l'integrale a destra deve coincidere con la sua parte reale:

$$|z| = \mathrm{Re}\left(\int_\Omega e^{-i\theta} f(x)\,dx \right) = \int_\Omega \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(x) \right)\,dx$$

Ricordando che per ogni numero complesso w vale la disuguaglianza $\mathrm{Re}(w) \leq |w|$, deduciamo che:

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(x) \right) \leq \left| e^{-i\theta} f(x) \right| = \left| e^{-i\theta} \right| \cdot |f(x)| = |f(x)|$$

Integrando ambo i membri, si conclude che:

$$\left| \int_\Omega f(x)\,dx \right| \leq \int_\Omega |f(x)|\,dx$$

■