Elementi di Logica Binaria e di Teoria degli Insiemi

Fabio Vlacci

October 1, 2026

Introduzione

- La logica binaria è alla base dell'Informatica.
- La teoria degli insiemi è il fondamento della Matematica moderna, inytesa come linguaggio universale.
- Entrambe sono strumenti essenziali per il ragionamento formale.

Logica Binaria

- Sistema di logica con due soli valori di verità:
  - Vero (1)
  - Falso (0)
- Operatori logici principali:
  - Negazione ($\neg\mathcal{A}$)
  - Coniugazione ($\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$)
  - Disgiunzione ($\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$)
  - Implicazione ($\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$)

Tavole di Verità

Negazione

A	$\neg A$
0	1
1	0

Coniugazione

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disgiunzione

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implicazione

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Teoria degli Insiemi: Concetti Base

- Un insieme è una collezione di elementi distinti, la cui appartenenza all'insieme è rigorosamente vera o falsa.

Teoria degli Insiemi: Concetti Base

- Un insieme è una collezione di elementi distinti, la cui appartenenza all'insieme è rigorosamente vera o falsa.

$$A \leftrightarrow \mathcal{A}$$

- Notazione: $A = \{a, b, c\}$

Teoria degli Insiemi: Concetti Base

- Un insieme è una collezione di elementi distinti, la cui appartenenza all'insieme è rigorosamente vera o falsa.

$$A \leftrightarrow \mathcal{A}$$

- Notazione: $A = \{a, b, c\}$ $b \in A$, $d \notin A$, cioè $\mathcal{A}(b) = 1 \quad \mathcal{A}(d) = 0$
- Insieme vuoto: $\varnothing$
- Sottoinsieme: $B \subseteq A$

Teoria degli Insiemi: Concetti Base

- Un insieme è una collezione di elementi distinti, la cui appartenenza all'insieme è rigorosamente vera o falsa.

$$A \leftrightarrow \mathcal{A}$$

- Notazione: $A = \{a, b, c\}$ $b \in A$, $d \notin A$, cioè $\mathcal{A}(b) = 1 \quad \mathcal{A}(d) = 0$
- Insieme vuoto: $\varnothing$
- Sottoinsieme: $B \subseteq A$ per ogni $b \in B$, allora $b \in A$

Teoria degli Insiemi: Concetti Base

- Un insieme è una collezione di elementi distinti, la cui appartenenza all'insieme è rigorosamente vera o falsa.

$$A \leftrightarrow \mathcal{A}$$

- Notazione: $A = \{a, b, c\}$ $b \in A$, $d \notin A$, cioè $\mathcal{A}(b) = 1 \quad \mathcal{A}(d) = 0$
- Insieme vuoto: $\varnothing$
- Sottoinsieme: $B \subseteq A$ per ogni $b \in B$, allora $b \in A$

$$\mathcal{B} \implies \mathcal{A}$$

Teoria degli Insiemi: Concetti Base

- Un insieme è una collezione di elementi distinti, la cui appartenenza all'insieme è rigorosamente vera o falsa.

$$A \leftrightarrow \mathcal{A}$$

- Notazione: $A = \{a, b, c\}$ $b \in A$, $d \notin A$, cioè
  $\mathcal{A}(b) = 1 \quad \mathcal{A}(d) = 0$
- Insieme vuoto: $\varnothing$
- Sottoinsieme: $B \subseteq A$ per ogni $b \in B$, allora $b \in A$

$$\mathcal{B} \implies \mathcal{A}$$

$\mathcal{B}$ condizione *sufficiente* per $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$ condizione *necessaria* per $\mathcal{B}$

Teoria degli Insiemi: Concetti Base

- Un insieme è una collezione di elementi distinti, la cui appartenenza all'insieme è rigorosamente vera o falsa.

$$A \leftrightarrow \mathcal{A}$$

- Notazione: $A = \{a, b, c\}$ $b \in A$, $d \notin A$, cioè $\mathcal{A}(b) = 1 \quad \mathcal{A}(d) = 0$
- Insieme vuoto: $\varnothing$
- Sottoinsieme: $B \subseteq A$ per ogni $b \in B$, allora $b \in A$

$$\mathcal{B} \implies \mathcal{A}$$

$\mathcal{B}$ condizione *sufficiente* per $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$ condizione *necessaria* per $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} \implies \mathcal{A} \iff \neg\mathcal{A} \implies \neg\mathcal{B}$$

(Antinomiale)

Teoria degli Insiemi: Concetti Base

$B \subseteq A$ e $A \subseteq B$ se e solo se $A = B$.

Teoria degli Insiemi: Concetti Base

$B \subseteq A$ e $A \subseteq B$ se e solo se $A = B$.

$$[(\mathcal{B} \implies \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{A} \implies \mathcal{B})] \text{ se e solo se } (\mathcal{B} \iff \mathcal{A})$$

Teoria degli Insiemi: Concetti Base

$B \subseteq A$ e $A \subseteq B$ se e solo se $A = B$.

$$[(\mathcal{B} \implies \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{A} \implies \mathcal{B})] \text{ se e solo se } (\mathcal{B} \iff \mathcal{A})$$

In questo caso si dice che $\mathcal{A}$ condizione *necessaria e sufficiente* per $\mathcal{B}$ oppure che $\mathcal{B}$ condizione *necessaria e sufficiente* per $\mathcal{A}$

Remark (Quantificatori universali)

$\forall$ *"per ogni"*
$\exists$ *"esiste"*

Teoria degli Insiemi: Concetti Base

$B \subseteq A$ e $A \subseteq B$ se e solo se $A = B$.

$$[(\mathcal{B} \implies \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{A} \implies \mathcal{B})] \text{ se e solo se } (\mathcal{B} \iff \mathcal{A})$$

In questo caso si dice che $\mathcal{A}$ condizione *necessaria e sufficiente* per $\mathcal{B}$ oppure che $\mathcal{B}$ condizione *necessaria e sufficiente* per $\mathcal{A}$

Remark (Quantificatori universali)

$\forall$ *"per ogni"*
$\exists$ *"esiste"*

$$\neg\forall \iff \exists$$

$$\neg\exists \iff \forall$$

Teoria degli Insiemi: Concetti Base

Remark

L'insieme vuoto $\varnothing$ *è sottoinsieme di* ogni *insieme e ogni insieme è sottoinsieme di se stesso.*

L'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme A è detto *insieme delle parti* di A si indica con $\mathcal{P}(A)$.

Teoria degli Insiemi: Concetti Base

Remark

L'insieme vuoto $\varnothing$ *è sottoinsieme di* ogni *insieme e ogni insieme è sottoinsieme di se stesso.*

L'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme A è detto *insieme delle parti* di A si indica con $\mathcal{P}(A)$.
Dato un insieme A risulta

$$\varnothing \in \mathcal{P}(A)$$

e

$$A \in \mathcal{P}(A).$$

in quanto $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq A$.

Operazioni tra Insiemi

- Unione: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\} \leftrightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
- Intersezione: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \leftrightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$

Operazioni tra Insiemi

- Unione: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\} \leftrightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
- Intersezione: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \leftrightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
  Se $A \cap B = \varnothing$ si dice che A e B sono *disgiunti*.
- (Se $B \subseteq A$) Differenza: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Operazioni tra Insiemi

- Unione: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\} \leftrightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
- Intersezione: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \leftrightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
  Se $A \cap B = \varnothing$ si dice che A e B sono *disgiunti*.
- (Se $B \subseteq A$) Differenza: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Remark

$A \setminus B = \varnothing$ *se e solo se* $A = B$.

Operazioni tra Insiemi

- Unione: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\} \leftrightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
- Intersezione: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \leftrightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
  Se $A \cap B = \varnothing$ si dice che A e B sono *disgiunti*.
- (Se $B \subseteq A$) Differenza: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Remark

$A \setminus B = \varnothing$ *se e solo se* $A = B$.

$A \cup B = \varnothing$ *se e solo se* $A = \varnothing$ *e* $B = \varnothing$

- Complementare: $\overline{A}^U = U \setminus A$ (rispetto a un insieme universo U)

Operazioni tra Insiemi

- Unione: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\} \leftrightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
- Intersezione: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \leftrightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
  Se $A \cap B = \varnothing$ si dice che A e B sono *disgiunti*.
- (Se $B \subseteq A$) Differenza: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Remark

$A \setminus B = \varnothing$ *se e solo se* $A = B$.

$A \cup B = \varnothing$ *se e solo se* $A = \varnothing$ *e* $B = \varnothing$

- Complementare: $\overline{A}^U = U \setminus A$ (rispetto a un insieme universo U)

$$\overline{(\overline{A}^U)}^U = A$$

Operazioni tra Insiemi

- Unione: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\} \leftrightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
- Intersezione: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \leftrightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
  Se $A \cap B = \varnothing$ si dice che A e B sono *disgiunti*.
- (Se $B \subseteq A$) Differenza: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Remark

$A \setminus B = \varnothing$ *se e solo se* $A = B$.
$A \cup B = \varnothing$ *se e solo se* $A = \varnothing$ *e* $B = \varnothing$

- Complementare: $\overline{A}^U = U \setminus A$ (rispetto a un insieme universo U)

$$\overline{(\overline{A}^U)}^U = A$$

$$\overline{\varnothing}^U = U \quad \overline{U}^U = \varnothing$$

Operazioni tra Insiemi

- Unione: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\} \leftrightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
- Intersezione: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \leftrightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
  Se $A \cap B = \varnothing$ si dice che A e B sono *disgiunti*.
- (Se $B \subseteq A$) Differenza: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Remark

$A \setminus B = \varnothing$ *se e solo se* $A = B$.
$A \cup B = \varnothing$ *se e solo se* $A = \varnothing$ *e* $B = \varnothing$

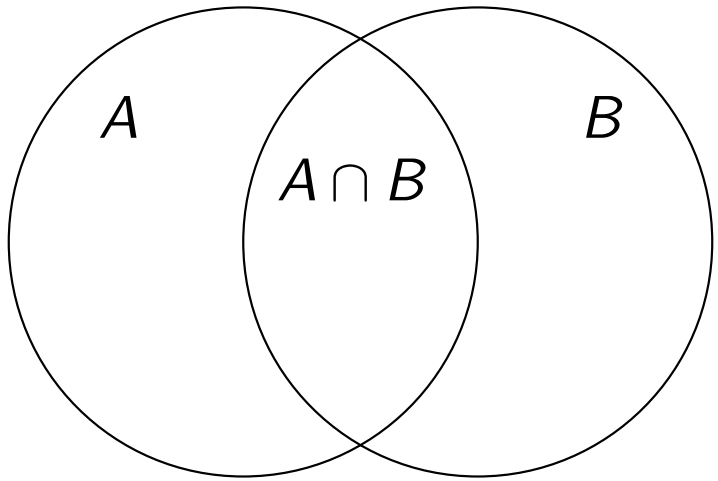
- Complementare: $\overline{A}^U = U \setminus A$ (rispetto a un insieme universo U)

$$\overline{(\overline{A}^U)}^U = A$$

$$\overline{\varnothing}^U = U \quad \overline{U}^U = \varnothing$$

$$\overline{A}^U \cap A = \varnothing \quad \overline{A}^U \cup A = U$$

Diagrammi di Venn



Intersezione

Proprietà operazioni tra insiemi

- se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ allora $A \subseteq C$ (transitività)

$$[(\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \vee (\mathcal{B} \implies \mathcal{C})] \implies (\mathcal{A} \implies \mathcal{C})$$

- $A \cap B \subseteq A \quad A \cap B \subseteq B$
- $A \subseteq A \cup B \quad B \subseteq A \cup B$
- $B \cap A = A \cap B \quad B \cup A = A \cup B$ (commutatività)
- $A \cap A = A \quad A \cup A = A$ (idempotenza)
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)[1]
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva)
- $\overline{A \cup B}^U = \overline{A}^U \cap \overline{B}^U \quad \overline{A \cap B}^U = \overline{A}^U \cup \overline{B}^U$
  (Leggi di de Morgan)

[1] Con $\cap_{\alpha \in I} B_\alpha \quad (\cup_{\alpha \in I} B_\alpha)$ si indica la intersezione (rispettivamente unione) di tutti gli insiemi B_α con $\alpha \in I$.
A tal proposito, se $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi di A tale che
i) $B_\alpha \cap B_{\alpha'} = \varnothing, \ \alpha \neq \alpha'$
ii) $\cup_{\alpha \in I} B_\alpha = A$
si dice che $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è una *partizione* di A.