Numeri Naturali, Operazioni di Somma, Prodotto, Potenza e Principio di Induzione

Fabio Vlacci

5 ottobre 2026

I numeri naturali sono i numeri che utilizziamo per contare. Essi costituiscono la base dell'Aritmetica e sono fondamentali per la costruzione degli altri insiemi numerici.
In questa breve introduzione elencheremo le proprietà principali dei numeri naturali, le operazioni fondamentali su di essi e il principio di induzione matematica, uno degli strumenti più potenti per dimostrare proprietà sui numeri naturali.

L'insieme dei numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ può essere definito assiomaticamente mediante gli *assiomi di Peano*, che introducono un elemento iniziale e un'operazione di *successore*.

L'insieme dei numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ può essere definito assiomaticamente mediante gli *assiomi di Peano*, che introducono un elemento iniziale e un'operazione di *successore*.
Tra le proprietà principali che caratterizzano i numeri naturali ricordiamoiamo:

- $\mathbb{N} \neq \varnothing$
- Esistenza di un elemento iniziale: 0 (oppure 1, a seconda delle convenzioni).
- Ogni numero naturale ha un successore, che è anch'esso un numero naturale, diverso da tutti i precedenti.
- Non esistono numeri naturali il cui successore è l'elemento iniziale.
- $\mathbb{N}$ è totalmente ordinato; ossia presi due numeri naturali n ed m se $n \neq m$ allora necessariamente o n precede m (m è un successore di n) $n < m$ oppure m precede n (n è un successore di m) $m < n$

Remark

Osservazione importante: l'insieme $\mathbb{N}$ è infinito ossia ha infiniti elementi! [1]

[1] Con questo si intende che è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$ ed $\mathbb{N}$ stesso.

Addizione

L'addizione o somma è un'operazione binaria che associa a due numeri naturali n e m un terzo numero naturale $n + m$.
Più precisamente
$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$(n, m) \to n + m$, ossia l'$m$simo successore di n.

[2] Se $0 \in \mathbb{N}$

Addizione

L'addizione o somma è un'operazione binaria che associa a due numeri naturali n e m un terzo numero naturale $n + m$.
Più precisamente
$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$(n, m) \to n + m$, ossia l'$m$simo successore di n.
Proprietà dell'addizione:

- *Associativa:* $(n + m) + l = n + (m + l)\ \forall n, m, l \in \mathbb{N}$
- *Commutativa:* $n + m = m + n\ \forall n, m \in \mathbb{N}$
- *Elemento neutro*[2] 0*:* $n + 0 = n\ \forall n \in \mathbb{N}$

[2] Se $0 \in \mathbb{N}$

Moltiplicazione

La moltiplicazione o prodotto di numeri naturali si definisce come somma ripetuta: $n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m-volte}$.

Più precisamente, $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n, m) \to n \cdot m$.

Moltiplicazione

La moltiplicazione o prodotto di numeri naturali si definisce come somma ripetuta: $n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m-volte}$.

Più precisamente, $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n, m) \to n \cdot m$.

Un concetto collegato a quello di prodotto di numeri naturali è quello di *multiplo*:

Moltiplicazione

La moltiplicazione o prodotto di numeri naturali si definisce come somma ripetuta: $n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m-volte}$.

Più precisamente, $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n, m) \to n \cdot m$.

Un concetto collegato a quello di prodotto di numeri naturali è quello di *multiplo*:

$n \in \mathbb{N}$ si dice multiplo di $p \in \mathbb{N}$ se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $n = m \cdot p$.

Moltiplicazione

La moltiplicazione o prodotto di numeri naturali si definisce come somma ripetuta: $n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m-volte}$.

Più precisamente, $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n, m) \to n \cdot m$.

Un concetto collegato a quello di prodotto di numeri naturali è quello di *multiplo*:

$n \in \mathbb{N}$ si dice multiplo di $p \in \mathbb{N}$ se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $n = m \cdot p$.

In questo caso p (ma anche m) si dice *divisore* di n.

Moltiplicazione

La moltiplicazione o prodotto di numeri naturali si definisce come somma ripetuta: $n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m-volte}$.

Più precisamente, $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n, m) \to n \cdot m$.

Un concetto collegato a quello di prodotto di numeri naturali è quello di *multiplo*:

$n \in \mathbb{N}$ si dice multiplo di $p \in \mathbb{N}$ se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $n = m \cdot p$.

In questo caso p (ma anche m) si dice *divisore* di n.
I multipli del successore di 1 (indicato con 2) si dicono numeri *pari*.
Un numero naturale che non sia pari (ossia che non sia multiplo di 2) si dice *dispari*.

Moltiplicazione

La moltiplicazione o prodotto di numeri naturali si definisce come somma ripetuta: $n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m-volte}$.

Più precisamente, $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n, m) \to n \cdot m$.

Un concetto collegato a quello di prodotto di numeri naturali è quello di *multiplo*:

$n \in \mathbb{N}$ si dice multiplo di $p \in \mathbb{N}$ se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $n = m \cdot p$.

In questo caso p (ma anche m) si dice *divisore* di n.
I multipli del successore di 1 (indicato con 2) si dicono numeri *pari*.
Un numero naturale che non sia pari (ossia che non sia multiplo di 2) si dice *dispari*.

Si osservi che:
La somma di due numeri pari è pari.
La somma di due numeri dispari è pari.
La somma di un numero pari ed un numero dispari è dispari.
Il prodotto di un numero pari per qualsiasi numero naturale è pari.
Il prodotto di due numeri dispari è dispari.

Numeri primi

Definizione

Un numero naturale (diverso da 1) che sia multiplo solo di 1 e di se stesso è detto primo.

Numeri primi

Definizione

Un numero naturale (diverso da 1) che sia multiplo solo di 1 e di se stesso è detto primo.

Teorema

Ogni numero naturale n (diverso da 1) si può scrivere in unico modo (a parte l'ordine) come il prodotto di un numero finito di numeri primi.

Moltiplicazione o prodotto di numeri naturali

Proprietà del prodotto:

- *Associativa:* $(n \cdot m) \cdot l = n \cdot (m \cdot l)\ \forall n, m, l \in \mathbb{N}$
- *Commutativa:* $n \cdot m = m \cdot m\ \forall n, m \in \mathbb{N}$
- *Elemento neutro* 1*:* $n \cdot 1 = n\ \forall n \in \mathbb{N}$
- *Distributiva rispetto all'addizione:*
  $n \cdot (m + l) = n \cdot m + n \cdot l\ \forall n, m, l \in \mathbb{N}$

Potenza

In analogia con il concetto di multiplo, si introduce quello di *potenza* di un numero naturale n.

Potenza

In analogia con il concetto di multiplo, si introduce quello di *potenza* di un numero naturale n.

$$\underbrace{n \cdot \cdots \cdot n}_{m-volte} := n^m$$

Potenza

In analogia con il concetto di multiplo, si introduce quello di *potenza* di un numero naturale n.

$$\underbrace{n \cdot \cdots \cdot n}_{m-volte} := n^m$$

n si dice *base* ed m *esponente* della potenza.

Potenza

In analogia con il concetto di multiplo, si introduce quello di *potenza* di un numero naturale n.

$$\underbrace{n \cdot \cdots \cdot n}_{m-volte} := n^m$$

n si dice *base* ed m *esponente* della potenza.

Proprietà della potenza:

- $n^m \cdot n^{m'} = n^{(m+m')} \ \forall n, m, m' \in \mathbb{N}$
- $(n^m)^{m'} = n^{m \cdot m'} \ \forall n, m, m' \in \mathbb{N}$
- $n^m \cdot (n')^m = (n \cdot n')^m \ \forall n, n', m \in \mathbb{N}$

Il Principio di Induzione Matematica

Il **principio di induzione matematica** afferma che, data $P(n)$ una proprietà definita per ogni $n \in \mathbb{N}$, se:

1. $P(0)$ o $P(1)$ è vera (caso base),
2. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (passo induttivo),

allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio di applicazione

Vogliamo dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n \cdot (n + 1)$$

Dimostrazione per induzione:

- *Base:* per $n = 1$:

$$2 \cdot 1 = 2 = 1 \cdot (1 + 1) = \quad \text{(vera)}$$

- *Passo induttivo:* supponiamo vera per $n = k$:

$$2(1 + 2 + \cdots + k) = k \cdot (k + 1)$$

Dimostriamo che la proposizione è vera per $n = k + 1$:

$$2 \cdot (1 + 2 + \cdots + k + (k + 1)) = 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + k) + 2 \cdot (k + 1) =$$

$$= k \cdot (k + 1) + 2 \cdot (k + 1) = (k + 1) \cdot (k + 2)$$

Quindi la proprietà è vera anche per ogni n.