CAPITOLO 2

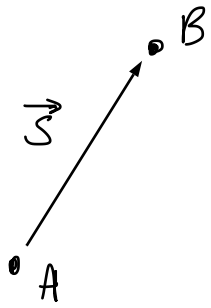
SCALARI E VETTORI

Le GRANDEZZE FISICHE possono essere SCALARI e VETTORIALI.

SCALARE → quantità definita da un numero ed unità di misura
(ex) lunghezza, massa, temperatura

VETTORE → oggetto con MODULO, DIREZIONE, VERSO.

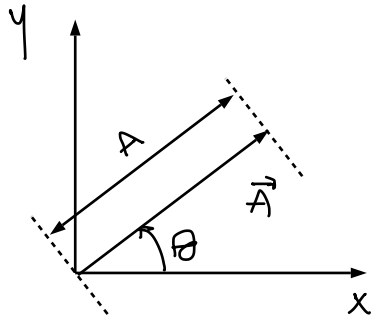
(ex.) spostamento



NB. Spostamenti uguali hanno stessa lunghezza e direzione e verso

NOTAZIONE $\vec{s}$ ≡ vettore $|\vec{s}| = s$ ≡ modulo

Numeri necessari per descrivere un vettore?



2D → 2 numeri: A, θ

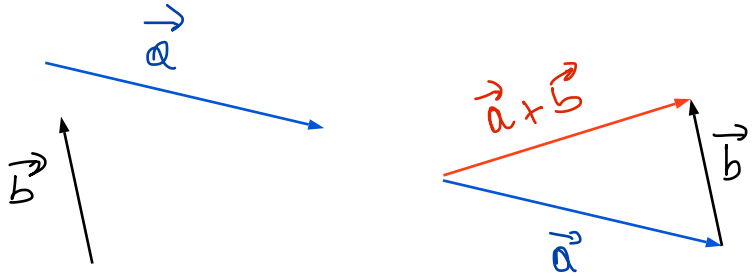
3D → 3 numeri

$\vec{A} = \vec{B}$ se hanno lo stesso modulo, direzione e verso

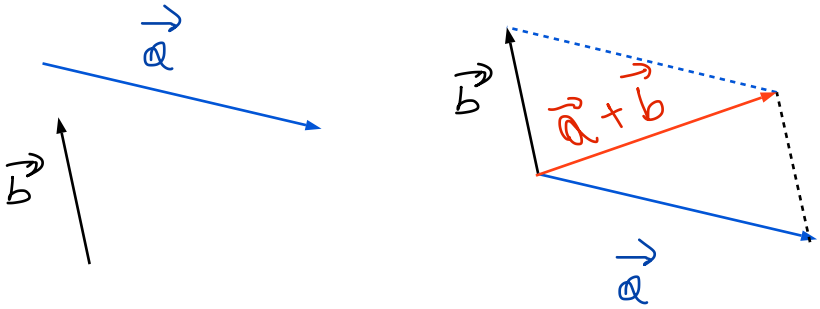
SOMMA GRAFICA DI VETTORI

In FISICA spesso usiamo il metodo grafico per sommare vettori

METODO PUNTA CODA



METODO PARALLELOGRAMMA



$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= a_i\hat{i} + a_j\hat{j}\\ \vec{b} &= b_i\hat{i} + b_j\hat{j}\end{aligned}\right\} \quad \vec{a}+\vec{b} = (a_i+b_i)\hat{i} + (a_j+b_j)\hat{j} = \vec{c}$$

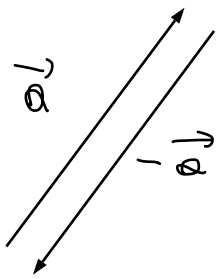
PROPRIETÀ COMMUTATIVA $\rightarrow$ $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

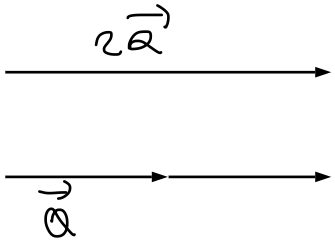
PROPRIETÀ ASSOCIATIVA $\rightarrow$ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

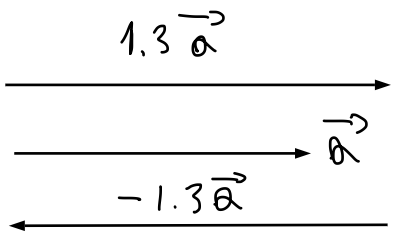
SOTTRAZIONE TRA VETTORI $\rightarrow$ $\vec{a}+(-\vec{b}) = \vec{a}-\vec{b}$

$\hookrightarrow$ $\vec{b}' = s\,\vec{b}$ MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE

ex.



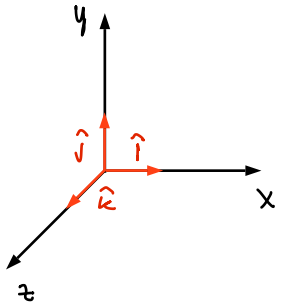




VERSORI E SCOMPOSIZIONE DI VETTORI

VERSORE $\rightarrow$ vettore adimensionale di modulo 1

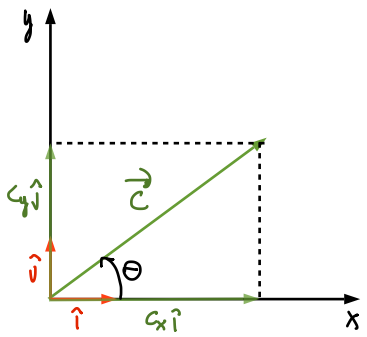
$\vec{M} : |\vec{M}| = 1$



$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$

Possiamo quindi collegarci alla notazione algebrica

(2D)



$$\begin{cases} \vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} \\ C_x = |\vec{C}|\cos\theta \\ C_y = |\vec{C}|\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_x^2 = C^2\cos^2\theta \\ C_y^2 = C^2\sin^2\theta \end{cases} \rightarrow C_x^2 + C_y^2 = C^2\cos^2\theta + C^2\sin^2\theta$$

$$= C^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = C^2$$

$$\boxed{|\vec{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \qquad \tan\theta = \frac{C_y}{C_x}}$$

(3D) $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$ $\qquad |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

$$\vec{C} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

$$= C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$$

ALTRE OPERAZIONI TRA VETTORI

PRODOTTO SCALARE $\rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$ risultato è uno scalare

Le proprietà del prodotto scalare sono:

1. COMMUTATIVA $\rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$
2. ASSOCIATIVA $\rightarrow \vec{A}\cdot(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$
3. PRODOTTO $\times$ SCALARE $\rightarrow \vec{A}\cdot(s\vec{B}) = s(\vec{A}\cdot\vec{B})$, s = scalare

può essere espresso anche in termini di componenti vettoriali

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k})$$

$$= A_xB_x\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} + A_xB_y\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} + A_xB_z\hat{\imath}\cdot\hat{k} +$$

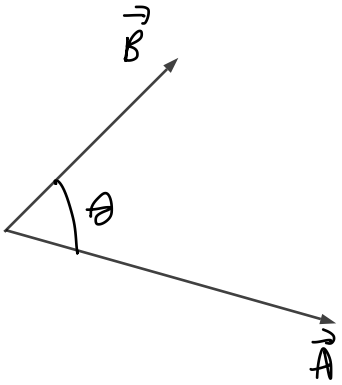
$$+ A_yB_x\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} + A_yB_y\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} + A_yB_z\hat{\jmath}\cdot\hat{k} +$$

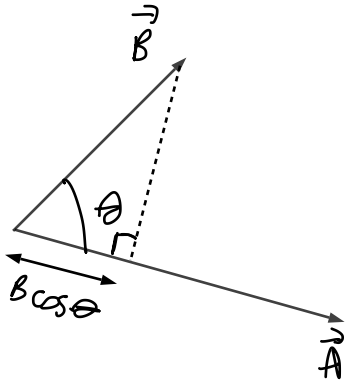
$$+ A_zB_x\hat{k}\cdot\hat{\imath} + A_zB_y\hat{k}\cdot\hat{\jmath} + A_zB_z\hat{k}\cdot\hat{k}$$

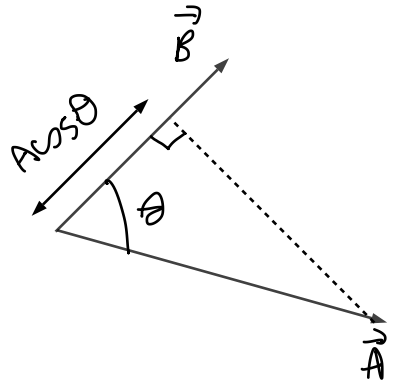
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

↳ $\hat{\imath}\perp\hat{\jmath}\perp\hat{k}$

Prodotto scalare può essere visto anche come la PROIEZIONE DI UN VETTORE SULL'ALTRO.





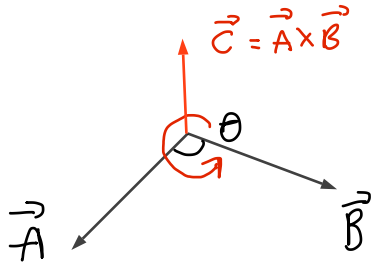


PRODOTTO VETTORIALE → $\vec{A}$, $\vec{B}$, θ = angolo più piccolo tra $\vec{A}$ e $\vec{B}$

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$$

$$|\vec{C}| = AB\sin\theta$$

DIREZIONE



REGOLA DELLA MANO DESTRA

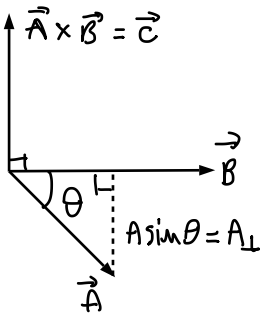
PROPRIETÀ del prodotto vettoriale

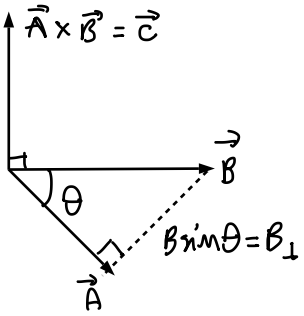
① NON COMMUTATIVA → $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{A} \times \vec{B})$

② DISTRIBUTIVA → $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

(NB) VERSORE PRODOTTO VETTORIALE → può essere visto GEOMETRICAMENTE come l'orientamento di un elemento di superficie

MODULO PRODOTTO VETTORIALE





Prodotto vettoriale in termini di componenti

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$= \cancel{A_x B_x \hat{i} \times \hat{i}} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} +$$
$$+ A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + \cancel{A_y B_y \hat{j} \times \hat{j}} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} +$$
$$+ A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} + \cancel{A_z B_z \hat{k} \times \hat{k}}$$

$$\begin{cases} \hat{a}_i \times \hat{a}_i = 0 \\ \hat{a}_i \times \hat{a}_j = -\hat{a}_j \times \hat{a}_i = \hat{a}_k \end{cases}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

$$= C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k}$$

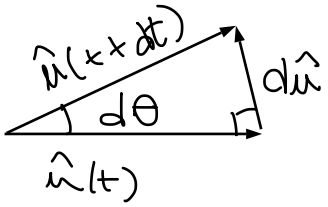
DERIVATA DI UN VETTORE → $\vec{B}(t) = B_x(t) \hat{i} + B_y(t) \hat{j} + B_z(t) \hat{k}$

si definisce la derivata $\vec{B}$ rispetto a t come limite (se esiste) per $\Delta t \to 0$ del rapporto incrementale

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{B}(t + \Delta t) - \vec{B}(t)}{\Delta t}$$

Si deduce che $\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{dB_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dB_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dB_z(t)}{dt}\hat{k}$

(NB) Derivata di un VERSORE e sue proprietà



$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{u}(t+\Delta t) - \hat{u}(t)}{\Delta t}$$

$|d\hat{u}| = |\hat{u}(t)|\,d\theta = d\theta, \quad |\hat{u}(t)| = 1$

$\hookrightarrow d\hat{u}(t) = d\theta\,\hat{n}(t)$, $\hat{n}(t) \equiv$ versore $\perp \hat{u}(t)$

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{n}(t)$$

la derivata di un versore NON è un versore, ma un vettore il cui modulo è $\frac{d\theta}{dt}$ e $\perp \hat{u}(t)$

INTEGRALE DI UN VETTORE $\rightarrow$ $\vec{B}(t) = B_x(t)\hat{i} + B_y(t)\hat{j} + B_z(t)\hat{k}$

Integrale di $\vec{B}(t)$ rispetto all'intervallo $(t_1 - t_0)$

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t_1} B_x(t)\,dt\,\hat{i} + \int_{t_0}^{t_1} B_y(t)\,dt\,\hat{j} + \int_{t_0}^{t_1} B_z(t)\,dt\,\hat{k}$$

CAMPO SCALARE E CAMPO VETTORIALE

In una REGIONE DI SPAZIO è possibile misurare in ogni punto (x,y,z) una grandezza scalare o vettoriale

CAMPO SCALARE $\quad U = U(x,y,z)$

CAMPO VETTORIALE $\quad \vec{V} = \vec{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\hat{i} + V_y(x,y,z)\hat{j} + V_z(x,y,z)\hat{k}$

PROPRIETÀ → regolarità in termini analitici
→ continue
→ derivabili

GRADIENTE DI UN CAMPO SCALARE → Passo da campo scalare a vettoriale

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

rapidità con cui varia U nello spazio

POTENZIALE DI UN CAMPO VETTORIALE → Esiste una funzione scalare tale che il suo gradiente sia uguale al campo vettoriale dato?

→ È possibile passare da un campo vettoriale ad un campo scalare? Sì a certe condizioni.

$$\text{NABLA} \equiv \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\begin{cases} \text{ROTORE} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\text{rot}}\, \vec{V} \\ \text{GRADIENTE} = \vec{\nabla} U = \overrightarrow{\text{grad}}\, U \end{cases}$$

$$\exists \leftrightarrow \vec{\text{rot}}\, \vec{V} = \vec{0} = \left(\frac{\partial V_z(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial V_y(x,y,z)}{\partial z}\right)\hat{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial V_x(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial V_z(x,y,z)}{\partial x}\right)\hat{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial V_y(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial V_x(x,y,z)}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Si dice U ≡ POTENZIALE DEL CAMPO VETTORIALE $\vec{V}$ e che $\vec{V}$ AMMETTE POTENZIALE.