Capitolo 1

Matematica antica

1.1 Le origini

La Preistoria è il tempo dell'attività umana precedente la Storia antica, che si fa convenzionalmente iniziare con l'avvento della scrittura (anche se il periodo di tale scoperta ha grandi variazioni a seconda del luogo geografico).

Sostanzialmente l'Età della pietra (nelle tre fasi successive Paleolitico, Mesolitico e Neolitico) si conclude nel IV millennio a.C., quando inizia l'Età dei metalli (Età del rame, Età del bronzo, Età del ferro) e, contestualmente, la scoperta della scrittura.

L'inizio dell'attività matematica dell'umanità è molto più antico di quanto pensavano Erodoto e Aristotele, convinti che risalisse alla civiltà egizia. In realtà si sono ritrovati graffiti del Neolitico che rappresentano disegni geometrici elementari, ma anche reperti di tessuti e cesti con semplici motivi geometrici.

Poiché non abbiamo fonti scritte riguardanti l'epoca preistorica, ma solo reperti materiali, possiamo solo ipotizzare le ragioni di queste opere: motivate dal primitivo senso estetico o artistico, riguardanti misurazioni o utilizzate in rituali?

In ogni caso, le origini si perdono nella notte dei tempi ma risalgono a epoche anteriori alle più antiche civiltà conosciute.

Nell'Età dei metalli, che si afferma in modo graduale e molto differenziato nelle varie zone (VII millennio a.C. in Oriente, V millennio a.C. in Europa e Africa settentrionale) le civiltà più note sorgono accanto ai grandi

corsi d'acqua (*stadio potamico*): la civiltà egizia nella valle del Nilo, quella mesopotamica fra il Tigri e l'Eufrate, quella cinese sulle rive del Yangtze e infine quella indiana lungo il fiume Indo.

Dedichiamo qualche breve cenno solo alle prime due.

1.2 Matematica egizia

La Stele di Rosetta è ritrovata dall'esercito napoleonico nel 1799 e decrittata nel 1822. L'iscrizione trilingue della Stele è celebrativa, incisa per l'anniversario dell'incoronazione del faraone Tolomeo V. Occorre citarla in quanto apre la strada alla comprensione delle scritture egizie *geroglifica* e *demotica*.

Le incisioni su pietra, legno, papiro che ci sono giunte risalgono fino al III millennio a.C. e, da quelle di argomento matematico, si evince che gli egizi usano la numerazione in base 10, con simboli diversi per rappresentare 10, 100, 1000 e così via. Insomma, è una numerazione decimale con abbreviazioni. Questo permette di esprimere grandi numeri: su una mazza reale sono incisi numeri che rappresentano 120.000 prigionieri e $1.422.000$ capre.

Uno degli interessi principali di questa civiltà è l'astronomia: ci sono pervenuti calendari di una certa complessità e precisione.

Inoltre ci sono giunti molti papiri dai quali si evince il grado di sviluppo della matematica oltre che il contare e il misurare.

Il **Papiro di Rhind**, scritto in stile *ieratico* (una corsivizzazione del geroglifico, dalla quale nacque il demotico) e conosciuto anche come **Papiro di Ahmes**, è il più esteso papiro egizio di argomento matematico giunto fino a noi. Il nome Ahmes allo scriba che lo trascrive verso il **1650 a.C.** durante il regno di Aauserra Ipepi (quinto sovrano della XV dinastia), traendolo da un papiro precedente redatto fra il 2000 e il 1800 a.C.

Il nome Rhind, invece, fa riferimento ad Alexander Henry Rhind, un antiquario scozzese, che acquista il papiro nel 1858 a Tebe, in Egitto; pare fosse stato trovato durante scavi illegali all'interno o nei pressi del Ramesseum.

Si trova attualmente al British Museum, che lo acquista nel 1865; alcuni piccoli frammenti sono conservati al Brooklyn Museum di New York.



È uno dei due noti papiri matematici insieme al **Papiro di Mosca**. Il Papiro di Rhind è più grande del Papiro di Mosca (che è più antico): è lungo 216 centimetri e largo 32 centimetri e una sezione centrale di 18 cm è mancante.

Contiene tabelle di frazioni, molte di esse con numeratore 1 (le cosiddette *frazioni egizie*) che venivano predilette a quelle generali, considerate probabilmente poco chiare. Inoltre si elencano 84 problemi aritmetici, algebrici (approccio a equazioni di primo grado) e geometrici, con le relative soluzioni. Qualcuno contiene rudimenti di quella che oggi è chiamata trigonometria.

Nel Papiro di Mosca compaiono un paio di problemi riguardanti la geometria solida elementare.

1.3 Matematica babilonese

La *civiltà mesopotamica* è ancora più antica di quella egizia: nel IV millennio a.C. ha già raggiunto un notevole livello di evoluzione. Sotto questo termine si possono considerare i Caldei, gli Accadi e i Babilonesi; anche se le loro civiltà si sviluppano in tempi e modi diversi, resta comunque una loro unità culturale, per cui si può parlare globalmente di "civiltà mesopotamica ".

Tra gli altri popoli, i Sumeri sviluppano una scrittura cuneiforme (forse la più antica nella storia dell'umanità) su tavolette di argilla. Alcuni studiosi ipotizzano che il geroglifico egiziano ne sia un derivato.

La *roccia di Bisotun* o *roccia di Behistun* è un reperto monumentale, nell'attuale Iran, con iscrizioni trilingue, che svolge il ruolo della Stele di Rosetta per la scrittura babilonese. Incisa in antico persiano, elamitico e babilonese intorno al 500 a.C. è una descrizione encomiastica delle imprese del re persiano Dario I. Citata anche da Tacito e nota per secoli, fu decifrata a varie riprese da studiosi europei a partire dal 1835.

Per questo motivo la traduzione delle tavolette babilonesi inizia dopo quella dei geroglifici egiziani.

Delle centinaia di migliaia di tavolette di argilla babilonesi rinvenute dall'inizio del XIX secolo solo una piccola parte, e quindi diverse migliaia, hanno argomento matematico. Il più antico ritrovamento riguarda le *tavolette di Uruk* delle quali si inizia la decifrazione solo intorno al 1930.

Le caratteristiche principali di tali reperti sono: una scrittura ideografica stilizzata, la numerazione in base 60, con ripetizione (nel II millennio a.C. evolutasi in posizionale), mancanza dello zero (in età successiva sostituito da uno spazio).

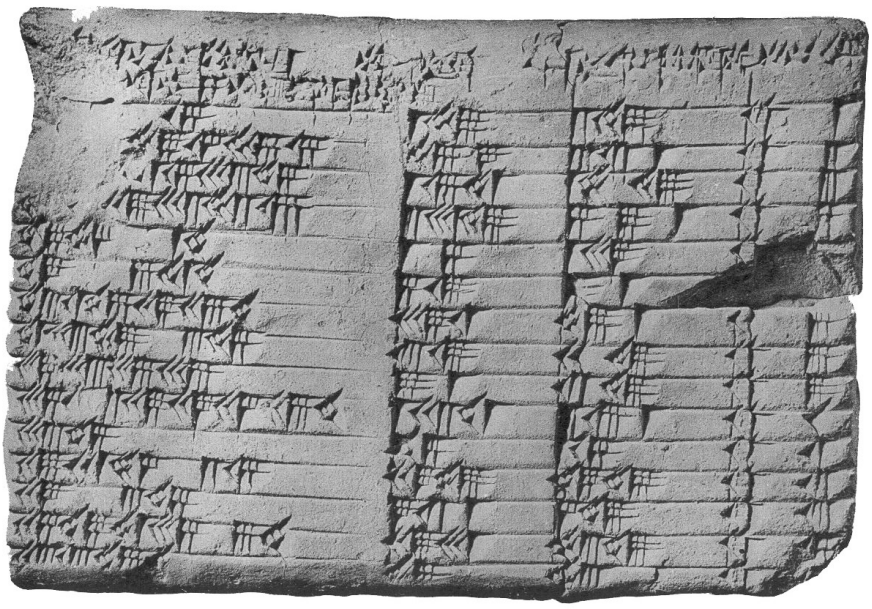
Tuttora gli studiosi cercano le ragioni della numerazione sessagesimale: per motivi astronomici, o una combinazione di base 6 e base 10, o perché 60 ha molti fattori?

Un primo confronto tra la matematica egizia e quella babilonese indica una maggior potenza di calcolo di quest'ultima, grazie all'estensione della notazione posizionale anche alle frazioni. Questo ha permesso calcoli avanzati, come le radici quadrate con 2 o 3 cifre sessagesimali e addirittura il calcolo di $\sqrt{2}$ con errore di 0.000008.

Accanto alla perizia nel calcolo, si ritrova un certo sviluppo di procedimenti algoritmici (come tabelle di elenchi del tipo $n^2 + n^3$) e un primo approccio a equazioni di secondo grado.

Sarebbe una semplificazione eccessiva identificare la matematica egizia con lo studio della geometria e quella mesopotamica con l'uso dell'algebra. Più probabilmente nella civiltà babilonese la matematica assume un ruolo intermedio tra utilitarismo e divertimento e, forse, con questa civiltà inizia lo studio della matematica fine a sé stessa.

Uno dei più famosi esempi di matematica babilonese è la tavoletta chiamata **Plimpton 322** che prende il nome dalla collezione di G.A. Plimpton alla Columbia University.



Provenienza e datazione

Plimpton 322 è una tavoletta di argilla, parzialmente scheggiata, larga circa 13 cm, alta 9 cm e di 2 cm di spessore.

L'editore newyorkese George A. Plimpton comprò la tavoletta da un antiquario, Edgar J. Banks, nel 1922 circa e la lasciò in eredità, con tutta la sua collezione, alla Columbia University a metà degli anni '30. Secondo Banks, la tavoletta viene da Senkereh, un sito nel sud dell'Iraq corrispondente all'antica città di Larsa.

Si ritiene che la tavoletta sia stata scritta intorno al 1800 a.C., basandosi in parte sullo stile della scrittura cuneiforme.

Contenuto

Il contenuto principale di Plimpton 322 è una tabella di numeri, con quattro colonne e quindici righe, in notazione sessagesimale babilonese. La quarta colonna è semplicemente una lista di numeri da 1 a 15. L'angolo che comprende la prima colonna è scheggiato e, secondo una verosimile

integrazione, ogni riga iniziava con il numero 1, il che rende i numeri stessi dei sessantesimi.

È possibile che altre colonne fossero presenti nella parte rotta della tavoletta a sinistra di queste colonne. Inoltre nel sistema sessagesimale, non esistendo lo zero, o venendo raramente sostituito da uno spazio, non è sempre agevole distinguere le unità dalle frazioni.

Interpretazione

I numeri della seconda colonna rappresentano la lunghezza c_1 del cateto più corto di un triangolo rettangolo, mentre i numeri della terza colonna rappresentano la lunghezza dell'ipotenusa i. Le lunghezze c_2 del cateto più lungo del triangolo possono essere ricostruiti, ed erano quasi sicuramente in una colonna ora distrutta. I tre numeri vengono così a rappresentare una terna pitagorica. I numeri della prima colonna possono essere considerati come il rapporto i^2/c_2^2 (ovvero il quadrato della secante). Ma, nel caso la prima colonna non preveda l'uno, possono anche essere considerati come il quadrato della tangente c_1^2/c_2^2 (per la nota relazione goniometrica $\tan^2(\alpha) = \sec^2(\alpha) - 1$, dove α è l'angolo compreso tra il cateto c_2 e l'ipotenusa i)

Le opinioni degli studiosi differiscono su come questi numeri sono stati generati e sul perché i babilonesi fossero interessati in tabelle di questo tipo.

Neugebauer (1951) ritiene che la tabella sia una lista di terne pitagoriche. Joyce (1995) propende per una interpretazione trigonometrica, per cui la tabella sarebbe una tavola trigonometrica di quadrati di coseni o tangenti. Robson (2001) descrive invece la tabella in concreti termini geometrici e sostiene che anche i babilonesi l'abbiano interpretata in termini geometrici. Robson basa le sue interpretazioni su un'altra tavoletta che proviene all'incirca dallo stesso periodo e dallo stesso luogo e ipotizza che possa essere stata utilizzata da un insegnante come un insieme di problemi da assegnare agli studenti.

1.4 Antica grecia: Era ellenica (VI-V-IV sec. a.C.)

1.4.1 La Ionia e i pitagorici (VI secolo a.C.)

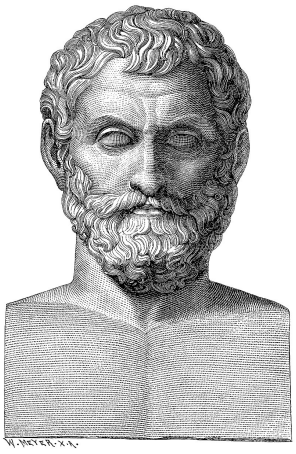
Il centro della cultura si sposta gradualmente dalle vallate delle civiltà potamiche alle coste del Mediterraneo: inizia l'*era talassica* (800 a.C. - 800 d.C.). Mercanti e studiosi viaggiano in Egitto e Mesopotamia, assorbono le conoscenze e le elaborano dando luogo a una nuova fisionomia culturale, prima in letteratura e poi in matematica.

Nel VI secolo a.C. le figure più rappresentative sono Talete e Pitagora. Le persone sono certe ma le opere sono incerte: per esse infatti ci basiamo soltanto sulla tradizione.

Di **Talete di Mileto** (624 a.C. - 545 a.C.) non ci sono pervenuti documenti diretti ma solo copie di copie di storici fino a Proclo nel 450 d.C.

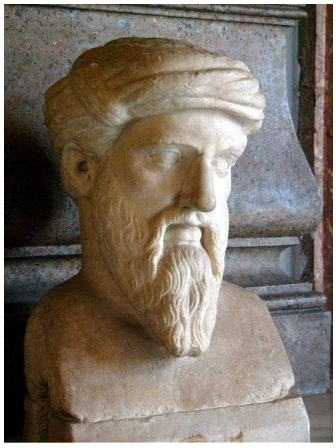
Non è certo che abbia creato la geometria dimostrativa ma è il primo al quale sono stati attribuiti dei risultati: in qualche misura è il primo matematico della Storia.

La tradizione è unanime nell'attribuirgli la dimostrazione del teorema di Talete (un triangolo inscritto in una semicirconferenza e avente il diametro come lato è rettangolo) e quattro noti teoremi di geometria piana. In ogni caso, è certo che siano stati i greci a dotare la geometria di una struttura logica, anche se non è detto che sia stato Talete ma piuttosto matematici posteriori.



Talete di Mileto (624 a.C. - 545 a.C.)

Pitagora di Samo (580 a.C. - 495 a.C.) è una figura ancora più fumosa. Mistico e leader spirituale, viaggia in Egitto, in Babilonia e forse in India. Torna a Crotone e fonda una società segreta e comunitaria. Ne abbiamo testimonianze da Proclo, filosofo neoplatonico del V secolo d.C..

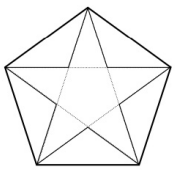


Pitagora di Samo (580 a.C. - 495 a.C.)

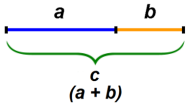
Né prima né dopo di lui la matematica ha rivestito tanta importanza nella vita spirituale. Anche se non sono chiari i suoi contributi originali, la sua importanza nella storia della matematica è indiscutibile. Il motto "tutto è numero", erroneamente attribuito a lui, sintetizza comunque l'affinità della scuola pitagorica con la cultura mesopotamica: lo stesso teorema di Pitagora ha probabili origini babilonesi.

Il misticismo del numero non nasce con i pitagorici che comunque lo spingono all'estremo e associano il numero all'estensione geometrica. Appare priva di fondamento la tesi che attribuisce ai pitagorici l'introduzione del metodo assiomatico in geometria.

Il pentacolo (cioè un pentagono stellato) era già presente nell'arte babilonese e ora viene estensivamente rappresentato e studiato.



Compare la sezione aurea e per i greci diventa così familiare che non hanno bisogno di un nome descrittivo: la chiamano solo "la sezione". E' definita da



dove $(a+b) : a = a : b$ e quindi $a^2 - ab - b^2 = 0$. Per cui il rapporto tra le due parti del segmento è

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

I pitagorici vedono per la prima volta l'aritmetica come disciplina intellettuale: da essa nasce quell'*aritmetica dei cieli* poi ripresa da Copernico. E' interessante osservare che Proclo attribuisce a Pitagora due scoperte: i solidi regolari (anche se non tutti) e la teoria delle proporzioni.

1.4.2 L'Età eroica (V secolo a.C.)

Nella seconda metà del V secolo, matematici sparsi in vari centri del Mediterraneo e sprovvisti di mezzi affrontano problemi importanti. Ecco uno schema sintetico:

- Archita di Taranto (428 a.C.) → *Quadrivio delle arti liberali: aritmetica, geometria, musica, astronomia*
- Ippaso di Metaponto ($\sim$ 400 a.C.)
- Democrito di Abdera ($\sim$ 460 a.C.) → *inizio di metodi "infinitesimali"*
- Ippia di Elide ($\sim$ 460 a.C.)
- Ippocrate di Chio ($\sim$ 430 a.C.)
- Anassagora di Clazomene († 428 a.C.) → *quadratura del cerchio, duplicazione del cubo, trisezione di un angolo*
- Zenone di Elea ($\sim$ 450 a.C.) → *paradossi tra spazio e tempo discreti e "continuità" (Istituisce il Trivio delle arti liberali: grammatica, retorica, dialettica)*

Aspetti presenti contemporaneamente in questa produzione sono sia una mentalità pratica sia inclinazioni metafisiche, cioè sia materialismo che filosofia.

Il desiderio di conoscenza di Anassagora si dirige verso le famose costruzioni con riga e compasso che, 2000 anni dopo, si dimostreranno essere insolubili.

Continua a svilupparsi la setta pitagorica, sempre più configurazione di fanatici del numero che oscillano tra orfismo e massoneria.

Nel 410 a.C. si presentano le prime crepe nel pitagorismo, quando si scopre che il lato e diagonale del quadrato (del cubo, del pentagono) non sono commensurabili: la geometria incrina la potenza del numero intero.

Zenone sviluppa i suoi paradossi: si passa da spazio e tempo discreti alla continuità.

Anche con l'inizio dei metodi infinitesimali di Democrito sembra che sia la geometria e non l'algebra a governare il mondo.

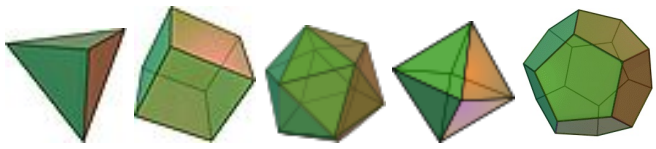
1.4.3 L'Età di Platone e Aristotele (IV secolo a.C.)

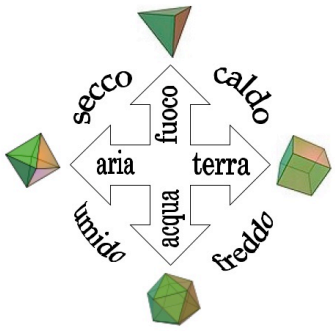
Nel IV secolo a.C. sono ancora scarse le fonti relative alla matematica, ma non quelle letterarie: ci sono pervenute testimonianze indirette da Platone e Aristotele.

Archita, citato nel paragrafo precedente, è una figura di transizione nota ai tempi di Platone. Istituisce il *Quadrivio* delle arti liberali che, assieme al *Trivio* di Zenone, costituisce le *Sette arti liberali* che saranno base per l'educazione durante i successivi due millenni.

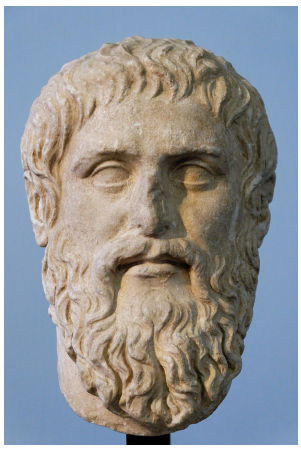
Tutti i matematici del periodo sono in rapporto con l'Accademia di Platone ad Atene.

Platone (428 a.C. - 348 a.C.) non è un matematico ma un appassionato della disciplina e anche ispiratore e guida di matematici. Archita lo introduce ai cinque solidi regolari (detti *solidi platonici* anche se noti già a Pitagora), associati ai *quattro elementi* di Empedocle. E' escluso il dodecaedro che, per Platone, rappresenta l'universo.





Il ruolo di Platone nella matematica è discusso: è stato un pensatore motivante o ha distolto i matematici dai problemi reali? Durante la sua giovinezza si verifica lo scandalo delle grandezze incommensurabili.



Testa ritraente Platone[1]

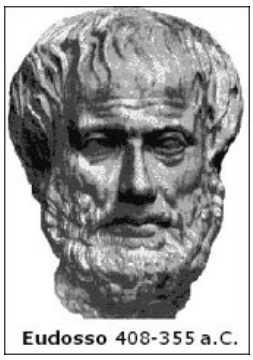
Per tale evento soffrì anche **Eudosso di Cnido** (406-355 a.C.), abile matematico e studente di Platone e anche di Archita, che lo introduce alla geometria. Appassionato di astronomia, è noto per aver costruito un osservatorio astronomico a Cnido e calcolato la circonferenza della Terra.

Va ricordato soprattutto alle origini del calcolo integrale. I greci, infatti, nella ricerca di aree e volumi, seppero ottenere risultati ammirevoli.

[1]Copia antica di opera creata da Silanion (360-330 a.C.). L'originale, commissionato da Mitridate subito dopo la morte di Platone, fu dedicato alle Muse e collocato nell'Accademia platonica di Atene.

In termini moderni si integra generalmente una funzione, ma nell'antichità i problemi di integrazione erano di natura geometrica.

Con **il metodo di esaustione di Eudosso** si intende un metodo che si propone di riempire un'area con figure note tali che la loro somma approssimi l'area cercata. Come per gli autori di questo secolo, non ci è pervenuta alcun reperto scritto ma solo testimonianze di studiosi successivi.



Le prime opere matematiche a noi pervenute sono di **Autolico di Pitane** (320 a.C.) e sappiamo che in questo periodo c'è già una tradizione manualistica consolidata.

Aristotele (384 a.C. - 322 a.C.) non porta contributi diretti alla matematica ma pone fondamenti logici e cita spesso concetti matematici e teoremi: in tal modo ha sicuramente contribuito allo sviluppo della disciplina.



Copia romana del busto di Aristotele di Lisippo.

1.5 Antica grecia: Era alessandrina (III sec. a.C. - II sec. d.C.)

1.5.1 L'Età d'oro: Euclide

Lo spartiacque tra il periodo *ellenico* e quello *ellenistico* o *alessandrino* è segnato dai due eventi al termine del IV secolo: la morte di Alessandro Magno nel 323 a.C. e del suo maestro Aristotele nel 322 a.C..

Il **III secolo a.C.** diventa la *"Golden Age"* della matematica dell'Antica Grecia. Il centro della cultura si sposta gradualmente da Atene ad Alessandria d'Egitto, da cui il nome di *Era alessandrina*.

Proprio ad Alessandria Tolomeo I chiama a insegnare **Euclide**, chiedendogli una semplice introduzione alla geometria. Euclide, oltre agli *Elementi*, scrive una dozzina di trattati che sono i più antichi documenti di matematica greca. Metà di essi sono perduti e solo 5 ci sono pervenuti:

- *Elementi*
- *Dati*
- *Divisione delle figure (*da una traduzione araba*)*
- *Fenomeni*
- *Ottica*

La fama di Euclide è dovuta probabilmente solo alle sue capacità didattiche: si presume che non abbia dato nuovi contributi alla disciplina.

Gli *Elementi* (scritti intorno al 300 a.C.) non contengono solo geometria ma sono un compendio della matematica elementare dell'epoca: infatti non presentano trattazioni di coniche e curve, allora considerate parti della geometria superiore.

• Struttura: 13 libri (più alcuni apocrifi)

- I, . . . , VI: la geometria piana,

- VII, . . . , X: i rapporti tra grandezze (il decimo libro riguarda la teoria degli incommensurabili)

- XI, XII, XIII: la geometria solida.

- I diversi libri sono strutturati in definizioni, postulati, assiomi e proposizioni, delle quali vengono fornite le dimostrazioni.



Euclide di Alessandria (IV - III sec. a.C.)

• Contenuto:
- 23 definizioni (concetti di punto, linea e superficie...)
- 5 postulati
- 5 nozioni comuni (o assiomi):
1. Cose uguali ad una stessa cosa sono uguali tra loro
2. Aggiungendo uguali a uguali, le somme sono uguali
3. Sottraendo uguali da uguali, i resti sono uguali
4. Cose che coincidono con un'altra sono uguali all'altra
5. L'intero è maggiore della parte

Non si espone con rigore (nel senso della matematica odierna) né vengono forniti preliminari. L'algebra trattata è una *algebra geometrica*.

I matematici greci classificavano le curve (del piano) in 3 categorie:
- *luoghi piani* (rette e circonferenze);
- *luoghi solidi* (coniche);
- *luoghi lineari* (tutte le altre curve).

• Traduzioni e tradizioni

Teone di Alessandria ($\sim$335 - 405) è un filosofo, matematico e astronomo greco, rettore del Museo di Alessandria. Cura, organizza e commenta i testi degli *Elementi* di Euclide e dell'*Almagesto* di Tolomeo. La sua edizione è tradotta in latino da **Abelardo di Bath**[2] nel 1120.

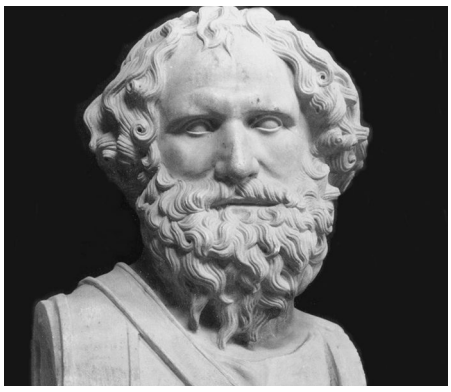
[2]Ritroveremo la sua figura nel Capitolo 2, dedicato al Medioevo

Campano da Novara nel 1255 pubblica un'edizione latina degli *Elementi* di Euclide e un importante commento all'opera, introducendo un sistema di calcolo degli angoli del pentagono. Il testo, in 15 libri, verrà utilizzato per circa due secoli e sarà stampato a Venezia nel 1482. L'opera si basa su una traduzione araba dell'originale testo greco. Campano ha presente, probabilmente, la traduzione latina di Abelardo di Bath.

L'edizione di Teone è l'unica versione conosciuta fino a quando, nel 1808, **François Peyrard** ne scopre una copia più antica nella Biblioteca Apostolica Vaticana. Il confronto delle due versioni mostra che l'edizione di Teone cerca di rimuovere le difficoltà che potrebbero incontrare gli studenti con la versione originale. Quindi amplia il testo di Euclide ogni volta che pensa che un argomento sia troppo breve; cerca di standardizzare il modo in cui Euclide scrive; e corregge gli errori nel testo, anche se occasionalmente introduce i propri errori.

1.5.2 L'Età d'oro: Archimede

La seconda grande figura dell'Età alessandrina è quella di **Archimede di Siracusa** (287 a.C. - 212 a.C.)



Busto di Archimede (o Archidamo), I sec. d. C.
Museo Archeologico Nazionale Napoli

Vive e muore a Siracusa e forse studia ad Alessandria, centro culturale dell'epoca.

Archimede, anche se noto per aver costruito congegni meccanici per l'assedio dei Romani a Siracusa (guerra Roma - Cartagine) non è in realtà

interessato alle applicazioni pratiche della matematica. Il *principio della leva* era già noto ma viene da lui espresso esplicitamente nell'ambito della statica (e non della dinamica) nell'opera *Equilibrio dei piani*.

Inizia con lui la stretta relazione tra matematica e meccanica: per questo Archimede si può considerare il padre della fisica matematica. L'approccio alla fisica matematica è rigoroso: più simile a quello di Euclide per la geometria che a quello di Aristotele nel trattato *Fisica*.

Si occupa anche della dinamica dei fluidi enunciando il famoso *Principio della spinta idrostatica*.

Nella Grecia antica si afferma una netta divisione fra i calcoli (logistica) e studio teorico delle proprietà dei numeri (aritmetica): la prima considerata inferiore e l'altra più nobile. Archimede vive nel periodo di transizione tra la numerazione attica additiva e ionica alfabetica.

Mostra grande ingegnosità per i calcoli astronomici determinando le distanze Terra-Luna e Terra-Sole nonché le circonferenze di Terra, Luna e Sole. Purtroppo molti dei suoi calcoli sono sballati.

È attratto dai tre grandi problemi geometrici dell'epoca: trisezione di un angolo, quadratura del cerchio, duplicazione del cubo. Nel trattato *Sulle spirali* risolve i primi due (ma non con riga e compasso) e introduce quella che oggi è chiamata *spirale di Archimede*, trovandone perfino la retta tangente in ogni suo punto.

Riesce a *quadrare* (cioè a determinare l'area) di segmenti di parabola, ma non di ellisse e di iperbole.

E' affascinato dal rapporto tra ogni circonferenza e il suo diametro, producendosi in calcoli ingegnosi su π nel trattato *Sulla misurazione del cerchio* divenuto molto popolare nel Medioevo.

In sintesi:

- *Equilibrio dei piani* (trattato di statica contenente il "principio della leva")
- *Sui galleggianti* (dinamica dei fluidi: "principio della spinta idrostatica")
- *Sulle spirali* ("spirale di Archimede" $r = a\theta$)
- *Sulla misurazione del cerchio* (calcoli ingegnosi su π)

Archimede perfeziona il metodo di esaustione di Eudosso per calcolare le aree, inserendo il concetto di *momento statico* delle figure, come se si trattasse di "pesare" le aree e di trovare il punto d'equilibrio della bilancia utilizzata. E' il primo ad affrontare problemi geometrici applicando nozioni di meccanica e di statica, riuscendo addirittura a costruire un metodo che anticipa di ben diciotto secoli il calcolo integrale.

In termini moderni, questa teoria consiste nel dimostrare che due grandezze (lunghezze, aree o volumi) sono uguali perché è assurdo che la loro differenza sia diversa da zero. Ciò non si ottiene da un confronto diretto delle due grandezze in questione, ma dal confronto tra due classi (contigue) di grandezze.

Il calcolo infinitesimale sposterà il suo campo d'azione dalla geometria all'analisi arricchendolo in precisione e rapidità.

• **La misura dell'area del cerchio**

Vediamo come si presenta all'epoca il problema.

Il risultato che si vuole raggiungere non è esattamente l'area del cerchio; più che altro si mira alla soluzione del famoso problema della *quadratura del cerchio*.

> "Quadrare una figura", così come era inteso dagli antichi, significa costruire un quadrato di area uguale a quella della figura piana considerata. Se ciò è realmente possibile, allora si dice che la figura è *quadrabile*.

La sfida più grande riguarda comunque il cerchio. Riuscire a quadrare il cerchio è stato un chiodo fisso dei matematici dai tempi di **Anassagora** (500-420 a.C.), citato nel Paragrafo 1.4.2, sino al 1882 quando **Ferdinand von Lindemann** (1852-1939) dimostrerà definitivamente l'impossibilità di quadrare un cerchio *con riga e compasso* come conseguenza della trascendenza di π, dimostrata dallo stesso Lindemann.

Per quadrare le figure gli antichi greci lavorano per "gradini": passano dalla figura più complessa a una più semplice utilizzando metodi fissi e dimostrati. Così iniziano col quadrare il rettangolo, poi il triangolo e poi il poligono generico; e ogni quadratura fa riferimento a quella precedente.

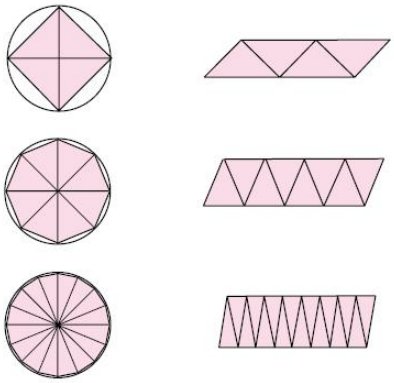
Il metodo di esaustione si propone di "riempire" una superficie di area sconosciuta con figure note delle quali si possa calcolare l'area. Per quadrare i poligoni si fa proprio questo: dato un poligono, lo si divide in triangoli, quindi in figure quadrabili direttamente. Una volta diviso il poligono, si procede a quadrare singolarmente i triangoli ottenuti e a sommare le aree dei quadrati che risultano, ottenendo un unico quadrato di area uguale al poligono iniziale.

Archimede si spinge oltre, intorno al 225 a.C., nel trattato *Sulla misurazione del cerchio*: per calcolare l'area del cerchio costruisce dei poligoni (regolari) ad esso inscritti e circoscritti, quindi quadrabili. Nel suo calco-

lo approssimato del rapporto tra circonferenza di un cerchio e diametro, Archimede fornisce un'ulteriore prova della sua abilità nel calcolo.

Da *Sulla misurazione del cerchio*:

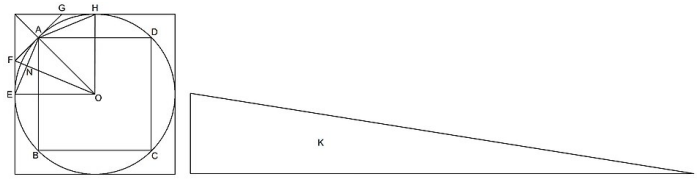
Problema. Si determini l'area di un poligono regolare con centro in O, perimetro Q e apotema h (l'apotema è il segmento passante per O e perpendicolare a uno qualsiasi dei lati).



Teorema. *L'area del poligono regolare è* $\frac{1}{2}\ hQ$.

Ma Archimede non punta questo: si limita ad osservare che se è possibile costruire un poligono la cui area si avvicini quanto si vuole a quella del cerchio, sarà anche possibile quadrare questo poligono, quindi pensa – a torto – che probabilmente si potrà quadrare anche il cerchio.

Proposizione. *L'area di qualsiasi cerchio è uguale a quella di un triangolo rettangolo avente uno dei cateti uguale al raggio e l'altro uguale alla circonferenza.*

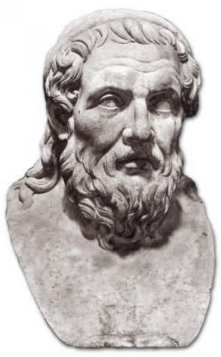


L'area di tale triangolo è calcolabile: $K = \frac{1}{2}rC$, dove r è il raggio e C è la lunghezza della circonferenza.

1.5.3 L'Età d'oro: Apollonio

Il terzo grande matematico dell'Età alessandrina è **Apollonio di Perga** (262 a.C. - 190 a.C.)

Apollonio nasce a Perga in Panfilia, studia ad Alessandria e visita Efeso e Pergamo. E' un grande ammiratore di Archimede e suo emulo. Calcola π come $3,1416$ ma non si conosce la sua procedura. Apollonio è anche un grande astronomo: propone uno schema che durerà 1800 anni.



Apollonio di Perga (262 a.C. - 190 a.C.)

A suo riguardo ci sono varie questioni aperte: le sue opere perdute sono più numerose rispetto a quelle di Euclide e Archimede. Ne conosciamo i titoli e una sintesi dei contenuti grazie a **Pappo** e a ricostruzioni successive: sei opere, assieme a un paio di opere perdute di Euclide, facevano parte della raccolta *Tesoro dell'Analisi*, dove sostanzialmente si tratta di geometria analitica di cui Apollonio, alcuni sostengono, sia stato il padre.

- *Luoghi piani*
- *Sezione di un rapporto*
- *Sezione di un'area*
- *Sulla sezione determinata*
- *Tangenze*
- *Coniche*
- Nel trattato *Tangenze* presenta il cosiddetto

Problema di Apollonio

Date tre cose, ciascuna delle quali può essere un punto, una retta o un cerchio, tracciare un cerchio che sia tangente a ciascuna delle tre cose (ove tangenza a un punto va intesa nel senso che il cerchio passa per il punto).

Si presentano 10 casi: i due più facili sono trattati già negli *Elementi* di Euclide. I successivi sette sono risolti da Apollonio: non abbiamo le sue soluzioni ma possiamo ricostruirle attraverso Pappo. L'ultimo problema sarà risolto in modo soddisfacente con riga e compasso solo da **Newton**.

Pappo cita altre opere di Apollonio, come *Inclinazioni* e *Confronto del dodecaedro e dell'icosaedro*. Nonostante la sua vasta produzione, soltanto due delle sue opere ci sono pervenute in forma completa.

- La *Sezione di un rapporto* ci è giunta solo nella sua traduzione araba e soltanto nel 1706 Halley, amico di Newton, la pubblicherà in latino.
- L'altra opera arrivata fino a noi è il capolavoro di Apollonio: le *Coniche*, redatto in 8 libri. I primi quattro ci sono pervenuti nel testo greco e tre nella traduzione araba di **Thabit ibn Qurra**. Sempre Halley nel 1710 fornirà una traduzione latina di tutti e sette i libri. L'ottavo è andato perduto.


FRANCISCI MAVROLYCI
MESSANENSIS,
EMENDATIO, ET RESTITVTIO
CONICORVM
APOLLONII PERGAEI
Nunc primùm typis excusæ, ubi primi quatuor eiusdem Apollonij libri
mendis, quibus fædè scatebant, expurgantur, nonnullæ interdum de-
monstrationibus illustrantur: quinta verò, sextus liber,
quorum titulo donantur habebantur, nactoria labore,
summaque industria denuo restituuntur.
AD ILLVSTRISS. SENATVM
MESSANENSEM.
MESSANAE,
Typis Hæredum Petri Brea. MDCLIIII.
Superiorum Permissu.

Coniche, edizione del 1654 a cura di Francesco Maurolico

Questo testo soppianta tutti i trattati dell'epoca, comprese le *Coniche* di Euclide. Apollonio osserva che i tre tipi di coniche si possono ottenere come sezioni di un unico cono, solo variando il piano che lo interseca; e tale cono non è necessariamente retto ma a doppia falda.

Introduce la nomenclatura odierna di ellisse, parabola e iperbole, anche se non dipendentemente dal piano di intersezione, come è consuetudine odierna.

Si svincola presto dal cono solido e considera le coniche esclusivamente come curve piane. Studia addirittura le rette tangenti e le normali a una conica, fornendo un quadro profondo ed esteso, utilizzando metodi simili a quelli moderni.

Nel testo di Boyer viene citato un passo della Prefazione che mostra come Apollonio ne fosse orgoglioso:

Il libro terzo contiene molti teoremi notevoli, utili per la sintesi dei luoghi solidi e per la determinazione dei limiti; la maggior parte di essi, e i più belli, sono nuovi. Quando li scopersi, mi resi conto che Euclide non aveva effettuato la sintesi del luogo geometrico rispetto a tre o quattro linee, ma soltanto quella di una parte di tale luogo geometrico, e ciò in maniera casuale e poco felice: non era infatti possibile effettuare la sintesi completa senza queste mie nuove scoperte.

Il problema a cui Apollonio si riferisce diventerà famoso nei secoli successivi: formulato da **Euclide** e poi passato alla storia come *Problema di Pappo* o *problema dei luoghi a tre o quattro rette* fu generalizzato e risolto da **Descartes** e se ne occupò perfino **Newton**. Può essere espresso in questo modo nella formulazione a tre rette:

Problema di Pappo

Date tre rette in un piano trovare il luogo geometrico di un punto P che si muove in modo che il quadrato della distanza di P da una di queste rette sia proporzionale al prodotto delle distanze dalle altre rette, ove le distanze vengono misurate secondo angoli dati rispetto alle rette.

1.5.4 Trigonometria e misurazione: III sec. a.C. - II sec. d.C.

Nell'età ellenistica gli astronomi hanno sempre più bisogno di relazioni sistematiche tra angoli e corde.

Aristarco (circa 260 a.C.) accenna a un sistema eliocentrico.

Eratostene, noto per il *crivello*, calcola la circonferenza della terra.

Ipparco di Nicea (180 a.C. - 125 a.C.) opera una significativa transizione tra astronomia babilonese e astronomia greca: compila la prima tavola trigonometrica, introducendo i gradi sessagesimali.

Ma la figura più rilevante di questo periodo è **Tolomeo di Alessandria** ($\sim$100 d.C. - 168 d.C.).

• La sua opera principale, *Almagesto*, che significa *sintassi matematica*, contiene trigonometria per l'astronomia, calcoli delle corde (compreso il teorema qui sotto riportato), l'uso dei gradi sessagesimali (forse ispirato dallo

Zodiaco), una tavola angoli-corde da un quarto di grado a 90°, così precisa da durare circa 1000 anni.

Teorizza il sistema solare come geocentrico, quello che sarà chiamato *sistema tolemaico*.

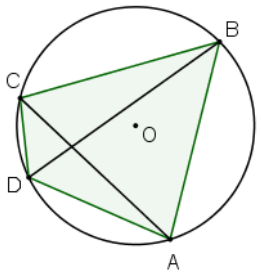
• Il trattato *Geografia* non è preciso (contiene infatti un errore sulla circonferenza della Terra) ma è profondo e dettagliato e anch'esso sarà utilizzato per un millennio.

• Un'altra opera famosa è il *Tetrabiblos* o *Quadripartitum*: in essa si descrive una sorta di religione degli astri. Qui la matematica e la filosofia greche si mescolano con l'astrologia dei Caldei per dare luogo a una pseudoreligione. Anche dal punto di vista matematico differisce dall'*Almagesto*,: non usa infatti la geometria sintetica greca, ma primitive tecniche aritmetiche dei babilonesi. Con questo testo, Tolomeo è il primo autore classico ad affrontare l'argomento astrologico con rigore.

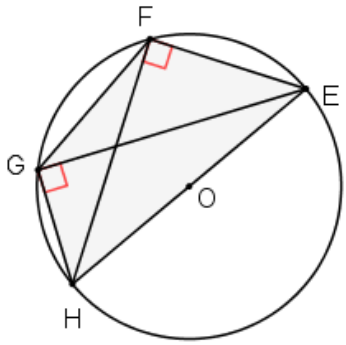
L'opera avrà grande notorietà durante tutto il Medioevo, legittimando l'astrologia, una disciplina tanto disprezzata quanto praticata. Ma anche in seguito continua la sua notorietà: gli astrologi del Rinascimento pubblicano il testo greco, lo traducono in latino e lo commentano con attenzione.

Teorema di Tolomeo.
In un quadrilatero ciclico, il prodotto delle misure delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti delle misure dei lati opposti:

$$AC \cdot BD = AD \cdot CB + DC \cdot AB.$$



Caso particolare: *Formule di Tolomeo*



Seguono facilmente le relazioni, dette appunto *Formule di Tolomeo*:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

e le analoghe per $\cos(\alpha \pm \beta)$.

1.5.5 Declino della matematica greca (II sec.a.C. - I sec.d.C.)

Con l'espressione *matematica greca* si copre un periodo molto vasto: dal 600 a.C. al 600 d.C.. In questo lungo periodo il centro degli studi si sposta dalla Ionia ad Atene e poi ad Alessandria. Lo sviluppo non è uniforme neanche nello stesso periodo, luogo o autore: l'esempio più evidente è il contributo non omogeneo di Tolomeo. Si consolidano i due livelli del pensiero matematico, quello teorico e quello pratico.

La matematica greca si può suddividere sommariamente in periodi:
- periodo ellenico (VI-V-IV sec. a.C.)
- periodo aureo (III sec. a.C.)
- declino (II sec. a.C. - I sec. d.C.)
- periodo argenteo (III-IV sec. d.C.)

Ecco alcuni brani che descrivono le situazioni storiche nelle varie fasi [3].

[3] tratti dal blog https://fisicamente.blog/2023/12/08/decadenza-e-fine-della-scienza-ellenistica-3/ del fisico divulgatore Roberto Renzetti; in "Decadenza e fine della scienza ellenistica 3" si può trovare un ampio approfondimento su Tolomeo e Diofanto.

Una prima data di discrimine nella politica culturale dei Tolomei che regnavano sull'Egitto, l'Africa del Nord ed il vicino Oriente fino alla Siria, è il 146 a.C.. Due eventi simultanei iniziarono a minare il regno dei Tolomei. Da una parte la sconfitta, il saccheggio e la distruzione di Cartagine da parte dell'esercito di Roma, dall'altra la sconfitta della Lega Achea (Peloponneso, Eubea, Locride, Focide, Beozia) che, due anni dopo la sottomissione della Macedonia, segna la sottomissione della Grecia a Roma. Tolomeo VIII Evergete II Fiscone un paio d'anni dopo e per ossequiare i romani, cacciò i greci da Alessandria e da ogni ruolo che occupavano nell'amministrazione. Ciò segnava la fine della politica culturale dei primi Tolomei che aveva puntato non solo sul denaro ma sul prestigio culturale e sull'integrazione dell'elemento indigeno con persone culturalmente molto elevate di provenienza straniera. [...] Questa situazione cambiò di nuovo nell'ultima metà del I secolo a.C..[...] Dopo l'assassinio di Cesare nel 44, gli eventi si susseguirono rapidi, il potere passò ad Ottaviano, Marco Antonio si unì a Cleopatra, fino allo scontro di Ottaviano con Marco Antonio ad Azio, dove fu sconfitto nel 31 a.C. Da questo momento l'Egitto e Alessandria divennero provincia di Roma con ulteriore perdita di autonomia anche se almeno formalmente fu garantita alla Biblioteca. [...] Tutto decade, resta solo da aspettare la fine naturale che arriva quando gli ultimi maestri della straordinaria scuola di Alessandria saranno estinti.

1.5.6 Rinascita della matematica greca (III-IV sec. d.C.)

Nella cosiddetta *Età argentea* spiccano, per motivi diversi, due studiosi importanti.

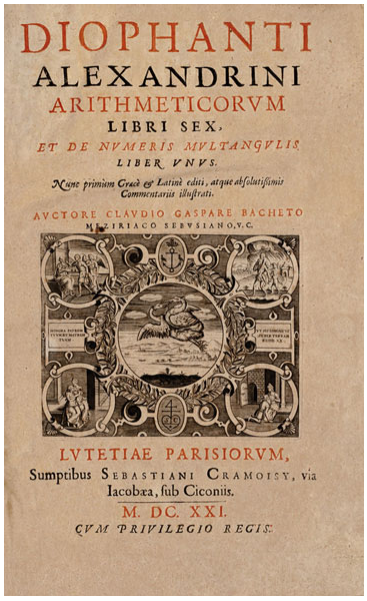
Diofanto di Alessandria ($\sim$200-298 d.C.), del quale non si conoscono con esattezza le date, vive in un periodo in cui gli studiosi si preoccupano di applicare la matematica alla musica e alla filosofia. Ma Diofanto, raffinato e ingegnoso, affronta invece problemi di teoria dei numeri nel famoso testo

- *Arithmetica*, in 13 libri, di cui ci sono pervenuti i primi 6.

Diofanto introduce nuovi argomenti ed è interessato alle soluzioni esatte (cioè intere) di equazioni. In seguito verrà riconosciuto come padre dell'algebra per il nuovo simbolismo usato (alcune abbreviazioni per incognite e potenze) ma in realtà i suoi contenuti sono più vicini alla teoria dei numeri che all'algebra.

La sua non è un'esposizione sistematica, bensì una raccolta di 150 problemi che sono stati definiti come "il fiore più bello della matematica babilonese" in quanto l'impronta mesopotamica è in essi evidente.

Non vengono riconosciute le radici negative delle equazioni né vengono distinti i problemi determinati da quelli indeterminati, infatti viene fornita in ogni caso una sola soluzione. Inoltre le soluzioni cercate sono soltanto intere: per questo la sua trattazione delle equazioni verrà chiamata nei secoli a venire *analisi diofantea*.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MERIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

[4]

Negli ultimi bagliori della grande Scuola di Alessandria si inserisce l'opera di **Pappo di Alessandria** (290 - 350 d.C.).

- La sua *Collezione* di 8 libri, di cui due perduti, è l'ultimo trattato significativo dell'antichità. La sua importanza è dovuta al fatto che riassume le conoscenze dell'epoca (ad esempio sono elencati i solidi archimedei), fornisce dimostrazioni alternative e forse qualcuna originale mostrando, per la prima volta in retrospettiva, gusto per la geometria classica.

Anticipa in qualche misura la geometria analitica ed enuncia alcuni teoremi che valgono solo nel piano proiettivo. Riguardo al *problema di*

[4] In figura il Frontespizio dell'edizione del 1621 della *Arithmetica* di Diofanto, tradotta a Parigi in latino da Claude Gaspard Bachet de Méziriac.

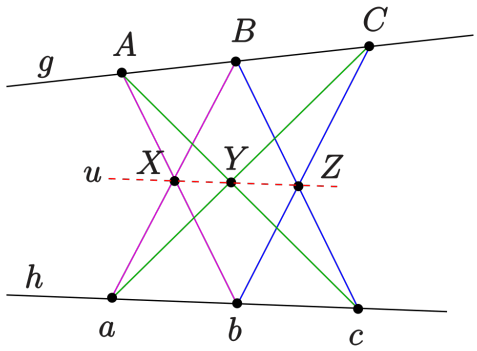
Pappo, già affrontato da Euclide e Apollonio (Paragrafo 1.5.3) mostra che tale luogo, rispetto a tre o quattro rette, è una conica. Lo stesso problema per più rette non è affrontato da Pappo in quanto non può a utilizzare l'algebra corrispondente, cioè curve di grado superiore al terzo.

Alcuni libri della *Collezione* contengono anche applicazioni all'astronomia, all'ottica, alla meccanica.

Scrive commenti agli *Elementi* di Euclide e all'*Almagesto* di Tolomeo che però non ci sono pervenuti.

Tra i suoi risultati più noti, quello qui riportato: è un caso particolare del Teorema di Pascal (quando la conica è degenere), dunque chiamato anche **Teorema di Pascal–Pappo**.

Teorema di Pappo (o *Teorema dell'esagono di Pappo*)



Siano date due rette g e h nel piano e 6 punti: $A, B, C \in g$ e $a, b, c \in h$. Si considerino i 3 quadrilateri $ABab$, $ACac$, $BCbc$ e i punti di intersezione della coppia di diagonali di ogni quadrilatero:

$$X := r_{Ab} \cap r_{aB}$$

$$Y := r_{Ac} \cap r_{aC}$$

$$Z := r_{Bc} \cap r_{bC}.$$

Allora i punti X, Y, Z sono allineati.

Al termine dell'Età alessandrina la matematica greca perde la forza che aveva avuto per secoli.

A partire dal II secolo d.C., se si escludono le importanti eccezioni di Diofanto (III sec.), Proclo (V sec.) e Filopono (VI sec.), non si produce più scienza originale. Si tenta (e sarà sempre più difficile) la conservazione di quanto fatto in precedenza. I commentari dei classici vanno per la maggiore. Ma, da commentario in commentario, il classico va sparendo. Si fanno poi dei compendi ma anche questi sono sempre più succinti e, anche qui, l'autore originale va sparendo. In questo modo, comunque, si riuscirono almeno a conservare quelli che si possono definire i risultati della scienza greca. Il metodo, la ricerca, si perse. [5]

1.6 Matematica nell'Antica Roma (I sec. a.C. - V sec. d.C.)

Gli ultimi scienziati alessandrini vivono in un mondo dominato politicamente da Roma, ma la civiltà romana dà uno scarso contributo alla matematica: è più dedita alle arti pratiche, architettura, ingegneria, geografia... **Vitruvio** ($\sim$90 a.C. - $\sim$15 d.C.) nel suo *De architectura* usa una matematica semplice, elementare.

Dice il Boyer:

Come il livello della matematica egiziana primitiva era stato inferiore a quello della matematica babilonese dello stesso periodo, così la matematica dei romani era a un livello notevolmente inferiore a quello della matematica greca degli stessi anni.

Mentre Roma cadeva in mano ai Goti l'unico nome da ricordare è quello di **Severino Boezio** (475 - 524), filosofo, matematico e statista.

La fortuna di Boezio è veramente "globale", e ciò vale non soltanto per il suo testo filosofico per eccellenza, il *De consolatione*, ma anche e altrettanto per i suoi testi di logica e di scienze matematiche. Se vogliamo trovare un denominatore comune alla trentina di opere che egli ha scritto, al di là degli argomenti diversi, tutte queste sono accomunate da un metodo: il metodo razionale della filosofia classica greca e pagana.

Nel *De institutione arithmetica* egli si presenta, sotto il segno dell'antica sapienza pitagorica, come mediatore a vantaggio del mondo latino dei testi fondamentali della *màthesis* scientifica greca, e precisamente quelli di aritmetica, geometria,

[5] https://fisicamente.blog/2023/12/08/decadenza-e-fine-della-scienza-ellenistica-3/ di Roberto Renzetti.

musica e astronomia (Inst. arith. I,1). Queste discipline costituiscono le quattro vie (è lui che conia il celebre termine di *quadrivium*) che preparano allo studio della filosofia. L'opera si apre con una riflessione teorica che andrà a far parte del patrimonio comune della cultura medievale (e oltre):

Omnia quaecunque a primaeva rerum natura constructa sunt, numerorum videntur ratione formata. Hoc enim fuit principale in animo conditoris exemplar. (Inst.arith. 1,2)

(*Tutto ciò che è stato costruito dalla natura primordiale delle cose sembra essere formato dal rapporto dei numeri. Questo era infatti il modello principale nella mente del fondatore.)* [6]

1.7 Quando finisce la "matematica antica"?

In questo scenario si inserisce una profonda crisi dell'agricoltura, la scarsità di manodopera, la grande difficoltà di comunicazione e una burocrazia ingigantita.

> Con il trascorrere del tempo, anche la voglia di tramandare i classici venne meno. I commentari ed i compendi erano sempre più miseri, con il risultato di distorcere sempre più la fonte originale. Questo processo, alla fine, soprattutto in Occidente, comportò la completa sparizione delle opere originali delle quali si perse traccia. Le cose andarono in modo diverso in Oriente dove la scienza greca si mantenne di più nelle opere originali e, dopo la caduta di Alessandria sotto il dominio arabo, l'intero patrimonio dei classici greci passò agli arabi che seppero farne molto migliore uso di quanto non se ne fece nell'Occidente Cristiano[7].

E' sempre difficile fissare la data della fine di un'epoca, anzi è impossibile: la gradualità e la continuità delle idee sono caratteristiche della Storia delle civiltà e quindi anche della Storia della matematica.

---

[6] Relazione del prof. Loris Sturlese al Convegno linceo *Boezio: alle radici dell'Europa* (10-11 ottobre 2024)

[7] https://fisicamente.blog/2023/12/08/decadenza-e-fine-della-scienza-ellenistica-3/ di Roberto Renzetti.

Riportiamo soltanto alcune date significative per la Storia:

• 313 - editto di Milano
• 330 - la capitale dell'Impero diventa Costantinopoli
• 395 - si scinde l'Impero
• 410 - il sacco di Roma ad opera dei Visigoti
• 476 - fine dell'Impero Romano (Odoacre entra a Roma e pone la sua corte a Ravenna)
• 529 - fondazione del monastero di Montecassino
• 529 - Giustiniano chiude d'autorità l'Accademia di Atene e vieta l'insegnamento ai pagani (non cristiani)
• 642 - Alessandria viene conquistata dagli arabi.

Alcune date simboliche per la Storia della Matematica:

◇ 415 - morte di Ipazia, figlia di Teone (segno della fine della matematica alessandrina)
◇ 525 - morte di Boezio (segno della fine della matematica nell'Impero Romano d'Occidente).



Severino Boezio