RIASSUMENDO

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 \qquad v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt$$

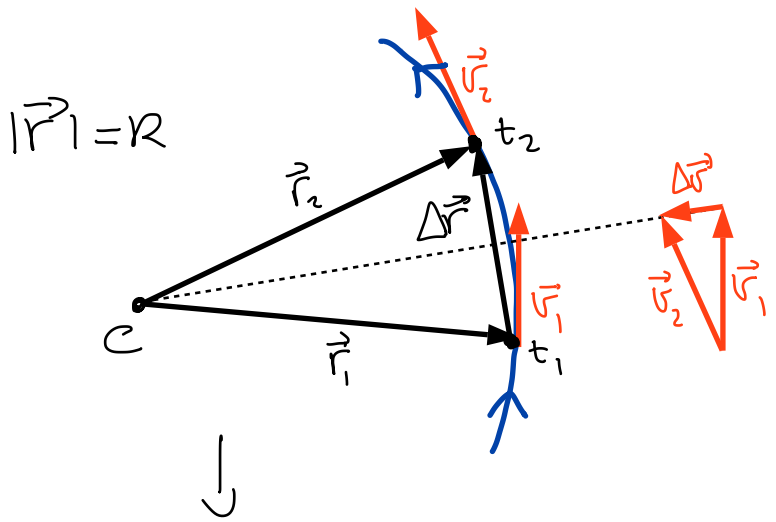
$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta_0)t \qquad y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = y_0 + \tan\theta_0 (x - x_0) - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}(x - x_0)^2$$

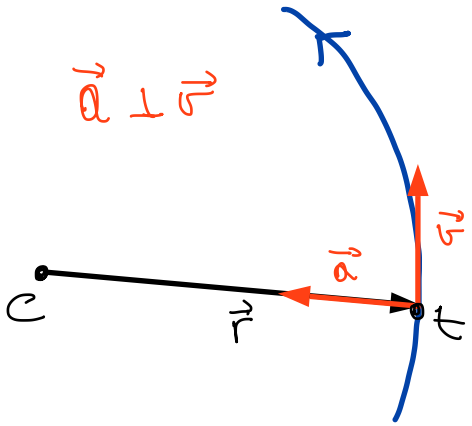
MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Traiettoria CIRCOLARE con $|\vec{v}|$ = COSTANTE $\rightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$

FINITO

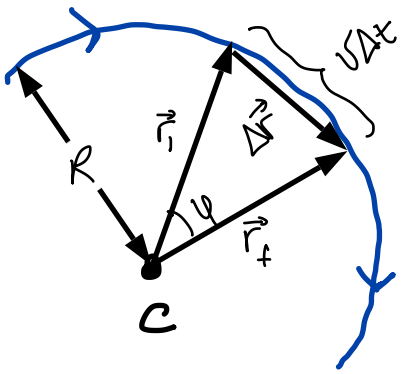


INFINITESIMA



Triangoli simili

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{R} \rightarrow a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{R} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$



$$|\Delta\vec{r}| \ll R \rightarrow |\Delta\vec{r}| \approx v\Delta t$$

$$a = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

ACCELERAZIONE CENTRIPETA

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$ → misura di quanto velocemente varia φ

$\Delta s \equiv$ arco circonferenza → $\Delta s = R\Delta\varphi \xrightarrow{|\Delta\vec{r}| \to 0} \Delta s = |\Delta\vec{r}| = v\Delta t$

VELOCITÀ ANGOLARE → $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{R}\frac{v\Delta t}{\Delta t} = \frac{v}{R}$

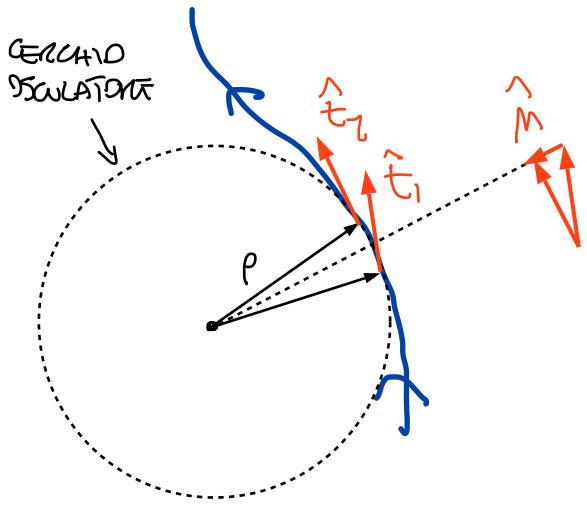
RIASSUMENDO $\quad a = \frac{v^2}{R} \qquad \omega = \frac{v}{R}$

ACCELERAZIONE CENTRIPETA (O NORMALE) ED ACCELERAZIONE TANGENZIALE

VELOCITÀ è sempre TANGENTE alla TRAIETTORIA → $\vec{v} = v\hat{t}$, $\hat{t} \equiv$ versore tangente alla traiettoria

NB. In generale $\vec{v}(t) = v(t)\hat{t}(t)$ se voglio una formula del moto

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v(t)\hat{t}(t))}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}\hat{t}(t) + \frac{d\hat{t}(t)}{dt}v(t)$$



$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{v}{\rho}\hat{n}$ per $|\Delta\hat{t}| \ll \rho$, $\hat{n} \perp \hat{t}$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}$$

FORMULA GENERALE $\vec{a}$

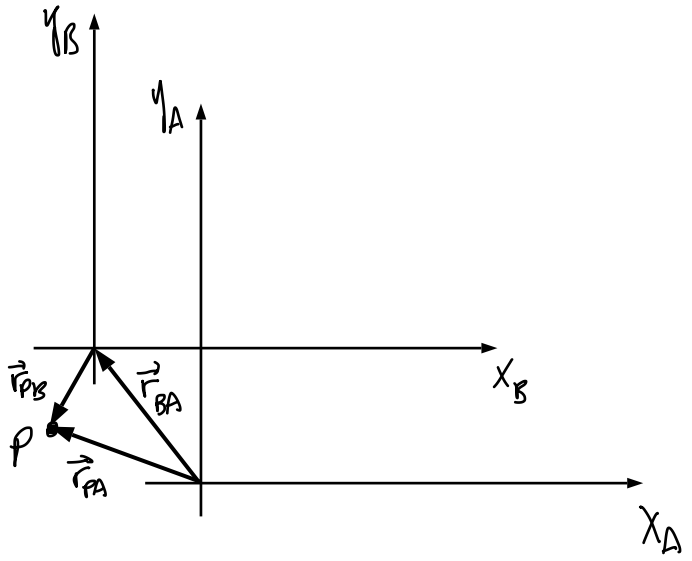
MOTI RELATIVI

DESCRIZIONE DEL MOTO → dipende dal sistema di riferimento da cui l'osservatore misura

Affrontiamo differenti casi in cui vogliamo descrivere il moto di un punto P rispetto a due osservatori A e B in due sistemi di riferimento diversi.

NB. $\vec{r}_{ek}$ posizione di k rispetto all'osservatore e
(stessa notazione per $\vec{v}_{ek}$ e $\vec{a}_{ek}$)

$|\vec{v}_A| = v_A$, $|\vec{v}_B| = v_B$ → sistemi in moto con $|\vec{v}|$ costante



$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

$$\vec{v}_{PA} = \frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$$

$$= \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

$$\boxed{\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}, \quad \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}}$$

(ex.) Automobilista ($\vec{v}_{BA} = 20\ m/s\,\hat{i}$) lancia oggetto con

$\vec{v}_{PB} = (-10\ m/s)\,\hat{i} + (-10\ m/s)\,\hat{j}$

$\vec{v}_{PA} = (10\ m/s)\,\hat{i} + (-10\ m/s)\,\hat{j}$ → colpisce osservatore A

$|\vec{a}_A| = a_A$, $|\vec{a}_B| = a_B$ → sistemi in moto con $|\vec{a}|$ costante

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA} \quad , \quad \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA} \quad , \quad \vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{BA}$$

$|\vec{\omega}_B| = 0$, B NON RUOTA → moto di B di pura rotazione, senza traslazione

→ poniamo origine dei sistemi di riferimento coincidente → $|\vec{r}_{BA}| = 0$

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + 0 = x_{PB}\hat{i}_B + y_{PB}\hat{j}_B + z_{PB}\hat{k}_B$$

$$\vec{v}_{PA} = \frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_{PB}\hat{i}_B + y_{PB}\hat{j}_B + z_{PB}\hat{k}_B\right)$$

$$= \left(\frac{dx_{PB}}{dt}\hat{i}_B + \frac{dy_{PB}}{dt}\hat{j}_B + \frac{dz_{PB}}{dt}\hat{k}_B\right) + \left(\frac{d\hat{i}_B}{dt}x_{PB} + \frac{d\hat{j}_B}{dt}y_{PB} + \frac{d\hat{k}_B}{dt}z_{PB}\right)$$

$$\equiv \vec{v}_{PB} + \left(x_{PB}\,\vec{\omega}\times\hat{i}_B + y_{PB}\,\vec{\omega}\times\hat{j}_B + z_{PB}\,\vec{\omega}\times\hat{k}_B\right)$$

$$= \vec{v}_{PB} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{PB}$$

NB. $\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{m}$, $\hat{m} \perp \hat{u}$

$\vec{\omega}\times\vec{r}_{PB}$ → termine di trascinamento che dipende sia dalla rotazione, sia dalla posizione P rispetto a B

Possiamo ora calcolare anche l'accelerazione di un corpo P in questo sistema di riferimento

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{PB} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(v_{PBx}\hat{i}_B + v_{PBy}\hat{j}_B + v_{PBz}\hat{k}_B\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{PB} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt}$$

$$= \vec{a}_{PB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{PB} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{PB} + \vec{\omega} \times \left(\vec{v}_{PB} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB}\right)$$

$$= \vec{a}_{PB} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{PB} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB} + 2\left(\vec{\omega} \times \vec{v}_{PB}\right)$$

$$= \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{Tras} + \vec{a}_{Cor}$$

$\vec{a}_{Tras} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{PB} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB}$ → termine cinematico dovuto al moto di trascinamento del riferimento di B e alla posizione P rispetto a B

$\vec{a}_{Cor} = 2\left(\vec{\omega} \times \vec{v}_{PB}\right)$ → ACCELERAZIONE DI CORIOLIS che dipende dalla velocità angolare $\vec{\omega}$ del sistema B rispetto ad A, sia dalla velocità di P rispetto a B

$|\vec{v}_B| \neq 0$, B MOBILE → caso più generale di ROTO-TRASLAZIONE

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB} \qquad \vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{Tras} + \vec{a}_{Cor}$$

$$\vec{a}_{Tras} = \vec{a}_{BA} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{PB} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB}$$

$$\vec{a}_{Cor} = 2\left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{PB}\right)$$