# Gemini prova lo scritto di Analisi

Questa dispensa contiene la risoluzione tale e quale viene proposta da Gemini (versione gratuita). Il testo dell'esame è stato trasmesso all'IA. Dopo la risposta è stato chiesto di restituire il sorgente latex della risoluzione. Sono state riscontrate differenze fra la prima risposta e quella contenuta nel file latex, quindi l'IA ha migliorato la forma e corretto degli errori in questa fase. A volte l'IA ha fornito risposte sbagliate, in questi casi l'errore è stato segnalato, è stata data una nuova risposta e successivamente chiesto di nuovo la versione in latex.

Sotto ogni data si elencano gli esercizi proposti negli scritti di Analisi Matematica II per fisica e di Analisi 3 per matematica. Sono omesse eventuali varianti di poco conto nel caso i compiti avessero avuto diverse versioni. Alcuni esercizi sono comuni ai due esami.

Gli errori sono segnalati in rosso, eventuali commenti sono in blu. Si noti che l'intelligenza artificiale è molto prolissa nelle sue spiegazioni. Spesso il rigore matematico non è rispettato. Altre volte l'IA usano tecniche e metodologie non presentate durante il corso. A volte alcuni vocaboli suonano nuovi anche a me, sono lasciati intenzionalmente per un confronto, non è detto che siano corretti.

## 15 giugno 2026

### Esercizio 1

Discutere il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{-n^2}.$$

**1. Analisi del termine generale** Il termine generale della serie è definito da:

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{-n^2}$$

Poiché la variabile $n$ compare come esponente quadratico (ossia nella forma $-n^2$), il metodo più efficiente per studiare il comportamento asintotico della successione è il **criterio della radice**. **Sarebbe opportuno far notare che la serie è a termini positivi prima di applicare il criterio della radice.**

**2. Applicazione del criterio della radice** Il criterio della radice stabilisce che si deve calcolare il limite per $n \to +\infty$ della radice $n$-esima del termine generale:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{-n^2}\right]^{\frac{1}{n}}$$

Semplificando gli esponenti tramite le proprietà delle potenze, otteniamo:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{-n}$$

**3. Calcolo del limite** Per rimuovere il segno meno dall'esponente, invertiamo la frazione della base:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^n$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $1^\infty$. Per risolverlo, manipoliamo algebricamente il termine interno in modo da ricondurlo al limite notevole del numero di Nepero $e$:

$$\frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2n+3-2}{2n+3} = 1 - \frac{2}{2n+3}$$

Sostituendo questa espressione nel limite, abbiamo:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{2n+3}\right)^n$$

Utilizzando la proprietà esponenziale $f(n)^{g(n)} = e^{g(n)\ln(f(n))}$ e l'equivalenza asintotica $\ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0$, il limite all'esponente diventa:

$$L = e^{\lim_{n\to+\infty} n\cdot\left(-\frac{2}{2n+3}\right)} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n}{2n+3}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

**4. Conclusioni** Il criterio della radice afferma che se il valore del limite $L < 1$, la serie è convergente.

Nel nostro caso:

$$L = \frac{1}{e} \approx 0.368 < 1$$

Dato che il valore ottenuto è strettamente minore di 1, la condizione di convergenza è pienamente soddisfatta.

**Conclusione:** La serie numerica data è **convergente**.

## Esercizio 2

Classifica i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $f(x, y) = x^4 - y^4 - x^2 + y^2$. Scrivi il polinomio di Taylor di grado 2 che approssima la funzione $f$ nel punto $P_1 = (x_1, y_1) = (1, 2)$. Scrivi il polinomio di Taylor di grado 3 che approssima la funzione $f$ nel punto $P_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$.

**1. Classificazione dei punti critici** I punti critici si determinano annullando il gradiente della funzione, $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Calcoliamo le derivate parziali prime:

$$f_x(x, y) = -4x^3 + 2x = 2x(1 - 2x^2)$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 - 2y = 2y(2y^2 - 1)$$

Uguagliando a zero entrambe le derivate si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 2x(1-2x^2) = 0 \implies x = 0 \quad \text{oppure} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2y(2y^2-1) = 0 \implies y = 0 \quad \text{oppure} \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Combinando le soluzioni, otteniamo **9 punti critici**. Per classificarli calcoliamo la matrice Hessiana $H(x, y)$:

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2 + 2, \quad f_{yy}(x, y) = 12y^2 - 2, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0$$

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -12x^2 + 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

Analizziamo il determinante dell'Hessiana $D$ e il termine $f_{xx}$ nei punti trovati:

- **Punto** $A(0,0)$: $H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \implies D = -4 < 0 \implies$ **Punto di sella**.
- **Punti** $B_{1,2}\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \implies D = 8 > 0,\ f_{xx} = 2 > 0 \implies$ **Punti di minimo locale**.
- **Punti** $C_{1,2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$: $H = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \implies D = 8 > 0,\ f_{xx} = -4 < 0 \implies$ **Punti di massimo locale**.
- **Punti** $D_{1,2,3,4}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $H = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \implies D = -16 < 0 \implies$ **Punti di sella**.

**Si noti come invece di determinante e traccia, l'IA considera il determinante e la prima cella della matrice. Sapreste spiegare perché?**

**2. Polinomio di Taylor di grado 2 nel punto** $P_1(2,-1)$ La formula del polinomio di Taylor arrestato al secondo grado è:

$$T_2(x,y) = f(P_1) + f_x(P_1)(x-2) + f_y(P_1)(y+1) + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(P_1)(x-2)^2 + f_{yy}(P_1)(y+1)^2\right]$$

**Si noti che questa non è la formula generale, ma la riduzione di essa a questa situazione.**

Calcoliamo i valori della funzione e delle sue derivate in $P_1(2,-1)$:

- $f(2,-1) = (-1)^4 - 2^4 - (-1)^2 + 2^2 = 1 - 16 - 1 + 4 = -12$
- $f_x(2,-1) = 2(2)(1-2(4)) = -28$
- $f_y(2,-1) = 2(-1)(2(1)-1) = -2$
- $f_{xx}(2,-1) = -12(4) + 2 = -46$
- $f_{yy}(2,-1) = 12(1) - 2 = 10$

Sostituendo i valori numerici otteniamo:

$$T_2(x,y) = -12 - 28(x-2) - 2(y+1) - 23(x-2)^2 + 5(y+1)^2$$

**3. Polinomio di Taylor di grado 3 nel punto** $P_0(0,0)$ Poiché il punto di sviluppo è l'origine $(0,0)$ e la funzione è un polinomio, il polinomio di Taylor coincide semplicemente con la somma dei monomi di $f(x,y)$ aventi grado complessivo minore o uguale a quello richiesto.

La funzione originale è:

$$f(x,y) = \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{Grado 2}} + \underbrace{y^4 - x^4}_{\text{Grado 4}}$$

Troncando lo sviluppo al grado 3, tutti i termini di grado 4 vengono assorbiti nel resto di Peano $o(\|(x,y)\|^3)$. Di conseguenza, il polinomio cercato è:

$$T_3(x,y) = x^2 - y^2$$

**Questa è la risoluzione che mi aspettavo anche dagli studenti. Non era necessario applicare tutta la formula. In classe era stata accennata questa possibilità.**

## Esercizio 3

Calcola il momento di inerzia del solido a densità $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ che occupa la regione di spazio $E = E_1 \cup E_2$ dove

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq \alpha\},$$
$$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq \alpha\,,\ z \in [-3\sqrt{\alpha}, 0]\}.$$

Dare la risposta in termini della massa e del parametro $A$.

**1. Analisi geometrica e coordinate cilindriche** Passando alle coordinate cilindriche $(r,\theta,z)$ con Jacobiano di trasformazione $J = r$, la densità diventa $\rho = r$. **(Qui invece l'IA è troppo concisa)** L'insieme $E_1$ rappresenta una sfera di raggio $R = \sqrt{\alpha}$. L'insieme $E_2$ rappresenta un cilindro verticale di raggio $R = \sqrt{\alpha}$ che si estende al di sotto del piano $z = 0$.

Poiché la sezione massima della sfera ha raggio $\sqrt{\alpha}$, per ogni $z \leq 0$ la semisfera inferiore risulta interamente contenuta nel cilindro $E_2$. Pertanto, l'unione $E = E_1 \cup E_2$ può essere riscritta come unione disgiunta rispetto al piano $z = 0$:

- **Semisfera superiore ($E_1^+$):** dove $z \in [0, \sqrt{\alpha}]$ e $r \in [0, \sqrt{\alpha - z^2}]$.
- **Cilindro inferiore ($E_2$):** dove $z \in [-3\sqrt{\alpha}, 0]$ e $r \in [0, \sqrt{\alpha}]$.

**Meglio scrivere i precedenti insiemi come dominio normale.**

L'elemento di massa è $dM = r^2\,dr\,d\theta\,dz$, mentre l'elemento del momento di inerzia rispetto all'asse $z$ è $dI_z = r^2 \cdot dM = r^4\,dr\,d\theta\,dz$. **La frase precedente non è gradevole, evitate di scrivere così.**

**2. Contributo del Cilindro Inferiore ($E_2$)** Calcoliamo la massa $M_{\text{cil}}$ e il momento d'inerzia $I_{\text{cil}}$ integrando per fili paralleli all'asse $z$:

$$M_{\text{cil}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-3\sqrt{\alpha}}^{0} dz \int_0^{\sqrt{\alpha}} r^2\,dr = 2\pi \cdot \left(3\sqrt{\alpha}\right) \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{\alpha}} = 2\pi\alpha^2$$

$$I_{\text{cil}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-3\sqrt{\alpha}}^{0} dz \int_0^{\sqrt{\alpha}} r^4\,dr = 2\pi \cdot \left(3\sqrt{\alpha}\right) \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{\sqrt{\alpha}} = \frac{6\pi}{5}\alpha^3$$

Si nota immediatamente la relazione geometrica: $I_{\text{cil}} = \frac{3}{5}\alpha M_{\text{cil}}$.

**3. Contributo della Semisfera Superiore ($E_1^+$)** Calcoliamo la massa $M_{\text{sup}}$ ed il relativo momento d'inerzia $I_{\text{sup}}$ integrando per strati orizzontali:

$$M_{\text{sup}} = 2\pi \int_0^{\sqrt{\alpha}} \left( \int_0^{\sqrt{\alpha - z^2}} r^2\,dr \right) dz = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\sqrt{\alpha}} (\alpha - z^2)^{3/2}\,dz$$

Sostituendo $z = \sqrt{\alpha}\sin t$ con $dz = \sqrt{\alpha}\cos t\,dt$:

$$M_{\text{sup}} = \frac{2\pi}{3}\alpha^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t\,dt = \frac{2\pi}{3}\alpha^2 \left(\frac{3\pi}{16}\right) = \frac{\pi^2}{8}\alpha^2$$

**In sede d'esame è stato scritto alla lavagna il valore dell'integrale di $\cos^4 t$ su $[0,\pi]$.**

Per il momento d'inerzia della semisfera si ha:

$$I_{\text{sup}} = 2\pi \int_0^{\sqrt{\alpha}} \left( \int_0^{\sqrt{\alpha - z^2}} r^4\,dr \right) dz = \frac{2\pi}{5} \int_0^{\sqrt{\alpha}} (\alpha - z^2)^{5/2}\,dz$$

Utilizzando la medesima sostituzione trigonometrica:

$$I_{\text{sup}} = \frac{2\pi}{5}\alpha^3 \int_0^{\pi/2} \cos^6 t\, dt = \frac{2\pi}{5}\alpha^3 \left(\frac{5\pi}{32}\right) = \frac{\pi^2}{16}\alpha^3$$

**In sede d'esame è stato scritto alla lavagna il valore dell'integrale di $\cos^6 t$ su $[0, \pi]$.** Si nota la relazione geometrica: $I_{\text{sup}} = \frac{1}{2}\alpha M_{\text{sup}}$.

**4. Relazione in funzione della Massa Totale** La massa totale del solido è la somma dei due contributi, $M = M_{\text{cil}} + M_{\text{sup}}$, da cui ricaviamo $M_{\text{cil}} = M - M_{\text{sup}}$. Il momento d'inerzia totale $I_z$ è dato da:

$$I_z = I_{\text{cil}} + I_{\text{sup}} = \frac{3}{5}\alpha M_{\text{cil}} + \frac{1}{2}\alpha M_{\text{sup}}$$

Sostituendo l'espressione per $M_{\text{cil}}$ otteniamo:

$$I_z = \frac{3}{5}\alpha(M - M_{\text{sup}}) + \frac{1}{2}\alpha M_{\text{sup}} = \frac{3}{5}\alpha M - \frac{1}{10}\alpha M_{\text{sup}}$$

Sostituendo infine il valore esplicito precedentemente trovato per la sola massa della semisfera ($M_{\text{sup}} = \frac{\pi^2}{8}\alpha^2$):

$$I_z = \frac{3}{5}\alpha M - \frac{1}{10}\alpha\left(\frac{\pi^2}{8}\alpha^2\right) = \frac{3}{5}\alpha M - \frac{\pi^2}{80}\alpha^3$$

**Non è la risposta che desideravo, segue la versione che mi aspetto, scritta da me.**

Abbiamo, sommando le masse e i momenti di inerzia ottenuti

$$M = 2\pi\alpha^2 + \frac{\pi^2}{8}\alpha_2 = \alpha^2\left(2\pi + \frac{\pi^2}{8}\right), \qquad I = \frac{6}{5}\pi\alpha^3 + \frac{\pi^2}{16}\alpha^3 = \alpha^3\left(\frac{6}{5}\pi + \frac{\pi^2}{16}\right)$$

da cui

$$I = \frac{\frac{6}{5}\pi + \frac{\pi^2}{16}}{2\pi + \frac{\pi^2}{8}} M\alpha\,.$$

L'errore sta nel fatto che mi aspetto una rispsta in termini di prodotto tra una massa e una distanza al quadrato (in questo caso $\alpha$ è una misura di superficie).

## Esercizio 4, primo tentativo

**Il seguente esercizio non è stato risolto correttamente dall'IA al primo colpo. Per questo motivo si propongono nell'ordine le diverse risoluzioni. A dire la verità, il testo comunicato era leggermente diverso da quello del compito. Infatti il testo del compito è stato allungato per guidare gli studenti verso una risoluzione corretta.**

Risolvi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2t\sqrt{1-x^2}}{1+3t^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

**La risposta inizia con**

Si richiede di risolvere il seguente problema di Cauchy al primo ordine:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2t\sqrt{1-x^2}}{1+3t^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

**1. Separazione delle variabili** L'equazione differenziale assegnata è a variabili separabili del tipo $x' = g(t)h(x)$, definita nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ a causa della radice quadrata. Le funzioni $x(t) = 1$ e $x(t) = -1$ costituiscono le soluzioni stazionarie dell'equazione.

Poiché la condizione iniziale richiede $x(0) = 0$, cerchiamo una soluzione locale nell'intervallo aperto $-1 < x < 1$. **Si noti come l'IA dice di voler trovare una soluzione localmente.** Possiamo quindi dividere entrambi i membri per $\sqrt{1-x^2}$ e separare le variabili:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2t}{1+3t^2}\,dt$$

**2. Integrazione dei membri** Applichiamo l'operatore di integrazione indefinita a ciascun membro dell'equazione: **Il passaggio è matematicamente scorretto, anche se funziona. Non è questa l'operazione legale che si fa in questo passaggio. La funzione $x$ dipende dal tempo: in realta si fa una primitiva rispetto alla variabile $t$ e poi a membro sinistro si trova l'integrale di una funzione composta.**

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{2t}{1+3t^2}\,dt$$

- **Membro sinistro:** L'integrale è immediato e restituisce la funzione trigonometrica inversa arcoseno:
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)$$
- **Membro destro:** Moltiplichiamo e dividiamo l'integrando per 3 al fine di far comparire al numeratore la derivata esatta del denominatore, ossia $D[1+3t^2] = 6t$:
$$\int \frac{2t}{1+3t^2}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{6t}{1+3t^2}\,dt = \frac{1}{3}\ln(1+3t^2)$$
Notiamo che l'argomento del logaritmo è strettamente positivo per ogni $t \in \mathbb{R}$, rendendo superfluo l'utilizzo del valore assoluto.

Uguagliando i risultati ottenuti e introducendo la costante arbitraria d'integrazione $C \in \mathbb{R}$, ricaviamo l'integrale generale in forma implicita:

$$\arcsin(x) = \frac{1}{3}\ln(1+3t^2) + C$$

**3. Determinazione della costante dalle condizioni iniziali** Imponiamo la condizione iniziale del problema di Cauchy sostituendo i valori $t = 0$ e $x = 0$ nella relazione implicita appena trovata:

$$\arcsin(0) = \frac{1}{3}\ln(1+3(0)^2) + C$$

$$0 = \frac{1}{3}\ln(1) + C \implies 0 = 0 + C \implies C = 0$$

**Si noti come l'IA furbamente decida di sostituire i dati iniziali prima di invertire l'arcoseno.**

**4. Esplicitazione della soluzione unica** Sostituendo il valore della costante $C = 0$, l'equazione si riduce a:

$$\arcsin(x) = \frac{1}{3}\ln(1+3t^2)$$

Applicando la funzione inversa del seno (invertibile per l'intervallo considerato) ad ambo i membri, ricaviamo la soluzione esplicita e unica del problema di Cauchy:

$$x(t) = \sin\left(\frac{1}{3}\ln(1+3t^2)\right)$$

**Questa non è la soluzione corretta. Sarebbe corretta se venisse spiegato correttamente chi è il suo dominio, ma in ogni caso non sarebbe la soluzione massimale.**

## Esercizio 4, secondo tentativo

**Questa risposta è stata fornita dopo aver comunicato la presenza di un errore, senza dire dove si trovava.**

Si richiede di risolvere il seguente problema di Cauchy al primo ordine e di determinarne l'intervallo massimale di esistenza: **Si noti come l'IA ha aggiunto un dettaglio nella frase iniziale, deve aver capito dove ha sbagliato, in quanto segue apparirà più spesso il concetto di soluzione massimale e sparirà l'idea di soluzione locale.**

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2t\sqrt{1-x^2}}{1+3t^2} \\ \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

**1. Separazione delle variabili** L'equazione differenziale assegnata è a variabili separabili del tipo $x' = g(t)h(x)$, definita per $-1 \leq x \leq 1$. Le funzioni costanti $x(t) = 1$ e $x(t) = -1$ sono soluzioni stazionarie (singolari) del problema. **Reputo scorretto l'uso del termine singolari.**

Poiché la condizione iniziale impone $x(0) = 0$, la soluzione massimale deve muoversi inizialmente nell'intervallo aperto $-1 < x < 1$, dove la funzione $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ è regolarmente derivabile. Possiamo quindi dividere per $\sqrt{1-x^2}$ e separare le variabili:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2t}{1+3t^2}\,dt$$

**2. Integrazione ed applicazione della condizione iniziale** Applichiamo l'operatore di integrazione indefinita a ciascun membro dell'equazione: **Persiste il formalismo errato, alcuni calcoli vengono saltati, ma li ha già fatti, glielo perdoniamo.**

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{2t}{1+3t^2}\,dt \implies \arcsin(x) = \frac{1}{3}\ln(1+3t^2) + C$$

Imponiamo la condizione iniziale $x(0) = 0$ sostituendo i valori $t = 0$ e $x = 0$ nella relazione implicita appena trovata:

$$\arcsin(0) = \frac{1}{3}\ln(1+3(0)^2) + C \implies 0 = 0 + C \implies C = 0$$

Pertanto, la forma esplicita locale della soluzione è:

$$x(t) = \sin\left(\frac{1}{3}\ln(1+3t^2)\right)$$

**3. Determinazione dell'intervallo massimale di esistenza** La soluzione trovata è valida finché non interseca le soluzioni stazionarie $x = \pm 1$, punti in cui il membro destro dell'equazione differenziale perde la lipschitzianità locale e la derivabilità. Dobbiamo quindi imporre che:

$$-1 < x(t) < 1 \implies -1 < \sin\left(\frac{1}{3}\ln(1+3t^2)\right) < 1$$

Il che si traduce nella condizione sull'argomento del seno:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{3}\ln(1+3t^2) < \frac{\pi}{2}$$

Poiché $1+3t^2 \geq 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, il logaritmo è sempre non negativo, rendendo la disuguaglianza di sinistra sempre verificata. Risolviamo la disuguaglianza di destra:

$$\ln(1+3t^2) < \frac{3\pi}{2} \implies 1+3t^2 < e^{\frac{3\pi}{2}} \implies t^2 < \frac{e^{\frac{3\pi}{2}}-1}{3}$$

L'intervallo massimale di esistenza $I$ della soluzione è dunque l'intervallo aperto centrato nell'origine:

$$I = \left(-\sqrt{\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}-1}{3}}, \sqrt{\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}-1}{3}}\right)$$

**Non ci siamo ancora, ma il fatto che nell'intervallo $I$ la soluzione abbia effettivamente la forma precedentemente esposta è corretto.**

**Esercizio 4, terzo tentativo** **Dato che Gemini al secondo tentativo ha fallito, ho inserito il testo del problema come dato in sede d'esame (senza dire che la risoluzione precedente era errata).**

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \dfrac{t\sqrt{1-x^2}}{1+t^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

soddisfa le condizioni di Lipschitz? Se una funzione $x$ risolve il problema di Cauchy, è possibile determinare in quali punti essa è crescente/decrescente (debolmente o strettamente)? Fornisci una soluzione del precedente problema di Cauchy.

**Vediamo cosa cambia.**

Si prende in esame il seguente problema di Cauchy al primo ordine:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2t\sqrt{1-x^2}}{1+3t^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

**1. Verifica delle condizioni di Lipschitz** La funzione che definisce la derivata prima è $f(t,x) = \frac{2t\sqrt{1-x^2}}{1+3t^2}$, il cui dominio di definizione è la striscia $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

- **Lipschitzianità locale:** Per verificare la lipschitzianità rispetto alla variabile $x$, calcoliamo la derivata parziale prima:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{2t}{1+3t^2} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

In un qualunque intorno del punto iniziale $(t_0, x_0) = (0, 0)$ che non contenga le rette di frontiera $x = \pm 1$ (ovvero limitandosi alla striscia aperta $-1 < x < 1$), tale derivata parziale è continua e limitata. Di conseguenza, la funzione $f(t, x)$ è **localmente lipschitziana rispetto a** $x$. Questo garantisce, tramite il Teorema di Cauchy-Lipschitz, l'esistenza e l'unicità locale della soluzione. **Si ricordi che esistono funzioni non derivabili che sono localmente lipschitziane.**

- **Lipschitzianità globale:** La funzione **non** è globalmente lipschitziana sull'intero dominio $D$, poiché per $x \to \pm 1$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x} \to \pm\infty$, facendo saltare la limitatezza della derivata.

**2. Studio della monotonia della soluzione** Sia $x(t)$ una soluzione del problema di Cauchy. È possibile stabilire a priori dove essa sia crescente o decrescente analizzando unicamente il segno del membro destro dell'equazione, ossia il segno di $x'(t)$:

$$x'(t) = \frac{2t\sqrt{1-x^2}}{1+3t^2}$$

Notiamo che:

- Il fattore $\sqrt{1-x^2}$ è sempre non negativo ($\geq 0$) per ragioni di realtà della radice.
- Il denominatore $1 + 3t^2$ è strettamente positivo ($> 0$) per qualsiasi $t \in \mathbb{R}$.

Il segno di $x'(t)$ dipende perciò esclusivamente dal fattore lineare $2t$ posto al numeratore:

- Per $t < 0 \implies x'(t) < 0$: la soluzione è **strettamente decrescente**.
- Per $t = 0 \implies x'(0) = 0$: la soluzione presenta un punto stazionario (un minimo relativo ed assoluto).
- Per $t > 0 \implies x'(t) > 0$: la soluzione è **strettamente crescente**.

**La soluzione sarà debolmente crescente per $t > 0$, perché se raggiungo il valore $x = 1$, la derivata sarà nulla. Analogamente sarà debolmente decrescente per $t < 0$.**

**3. Soluzione esplicita del problema di Cauchy** Risolvendo per separazione delle variabili nell'intervallo aperto $-1 < x < 1$ si ottiene:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{2t}{1+3t^2}\,dt \implies \arcsin(x) = \frac{1}{3}\ln(1+3t^2) + C$$

Imponendo la condizione iniziale $x(0) = 0$, si ricava $C = 0$. Esplicitando la variabile dipendente $x$, otteniamo la soluzione unica:

$$x(t) = \sin\left(\frac{1}{3}\ln(1+3t^2)\right)$$

**Accettiamo che diversi passaggi siano stati saltati, del resto è la terza volta che ci prova.** Tale soluzione è definita nel suo **intervallo massimale di esistenza** $I$, ricavato imponendo la condizione di non intersezione con le soluzioni singolari stazionarie $x = \pm 1$:

$$-1 < \sin\left(\frac{1}{3}\ln(1+3t^2)\right) < 1 \implies -\frac{\pi}{2} < \frac{1}{3}\ln(1+3t^2) < \frac{\pi}{2}$$

Risolvendo rispetto a $t$, si ottiene l'intervallo aperto e simmetrico:

$$I = \left(-\sqrt{\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}-1}{3}}, \sqrt{\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}-1}{3}}\right)$$

**Nessuna miglioria, proviamo ancora.**

## Esercizio 4, quarto tentativo

**Ho fatto notare a Gemini che il termine $f(t,x)$ è a crescita al massimo lineare in $x$ e che quindi mi aspetto soluzioni definite globalmente (per il teorema di esistenza globale).**

Un noto corollario del Teorema di Cauchy-Lipschitz afferma che se una funzione $f(t,x)$ ha una crescita al più lineare rispetto a $x$, allora le soluzioni locali possono essere prolungate globalmente su tutto l'asse dei tempi $\mathbb{R}$, escludendo il fenomeno del *blow-up* (esplosione in tempo finito). **Siete sicuri che l'affermazione sia completamente corretta? Sarà sempre definita su $\mathbb{R}$ qualsiasi $f(t,x)$ prendete? L'IA sta citando in maniera imprecisa il teorema di esistenza globale.**

Nel nostro problema specifico:

$$f(t,x) = \frac{2t\sqrt{1-x^2}}{1+3t^2}$$

si nota che il termine è strutturalmente limitato rispetto a $x$ (poiché $|x| \leq 1$) e ha un comportamento asintotico controllato rispetto a $t$. Di conseguenza, la soluzione non corre alcun rischio di divergere a $\pm\infty$.

Tuttavia, la soluzione **non può essere globale** su tutto $\mathbb{R}$ per un secondo motivo geometrico e analitico: la presenza di una **barriera di frontiera non-lipschitziana**. **Quest'ultima affermazione non è corretta.**

**Il meccanismo di arresto della soluzione** Il dominio della variabile $x$ è rigidamente confinato nell'intervallo chiuso $[-1,1]$. Le funzioni costanti $x(t) = 1$ e $x(t) = -1$ sono soluzioni stazionarie dell'equazione. Sulla frontiera $x = \pm 1$, la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ diverge a $\pm\infty$, determinando la perdita della lipschitzianità locale.

La soluzione particolare che parte dall'origine, ovvero:

$$x(t) = \sin\left(\frac{1}{3}\ln(1+3t^2)\right)$$

è strettamente crescente per $t > 0$. Al raggiungimento del tempo critico:

$$t_+ = \sqrt{\frac{e^{\frac{3\pi}{2}} - 1}{3}}$$

l'argomento del seno assume il valore $\frac{\pi}{2}$, il che implica che la curva soluzione tocca la retta di frontiera:

$$x(t_+) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

In questo istante la derivata si annulla ($x'(t_+) = 0$) e la soluzione si "scontra" con la soluzione stazionaria $x = 1$. Poiché in tale punto di contatto viene a mancare la condizione di Lipschitz, il prolungamento univoco della soluzione classica cessa di esistere. **OK, non ho più unicità. Ma posso proseguire oltre $t = t_+$?**

Pertanto, l'intervallo massimale rimane limitato a:

$$I = \left(-\sqrt{\frac{e^{\frac{3\pi}{2}} - 1}{3}}, \sqrt{\frac{e^{\frac{3\pi}{2}} - 1}{3}}\right)$$

non a causa di un'esplosione della funzione (crescita), ma a causa del raggiungimento del bordo del dominio di derivabilità dell'equazione differenziale. **Non ci siamo.**

## Esercizio 4, quinto tentativo

**Ho suggerito a Gemini** *Non è che posso definire la soluzione a tratti?*

L'osservazione secondo cui la soluzione può essere definita a tratti oltre il tempo critico $t_+$ è analiticamente fondata e introduce il concetto di **soluzione in senso generalizzato** (o debole). **Qui l'IA si arrampica sugli specchi. Le soluzioni in senso debole in analisi sono argomento della magistrale di matematica e sono un'altra cosa.**

Al tempo critico $t_+ = \sqrt{\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}-1}{3}}$, la soluzione locale soddisfa le seguenti condizioni di raccordo sulla frontiera $x = 1$:

$$x(t_+) = 1, \quad \lim_{t \to t_+^-} x'(t) = 0$$

Poiché la retta $x(t) = 1$ è una soluzione stazionaria dell'equazione differenziale (avendo essa stessa derivata identicamente nulla), è possibile definire una funzione prolungata a tratti $x_{\text{ext}}(t)$ per $t \geq 0$ nel seguente modo:

$$x_{\text{ext}}(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{3}\ln(1+3t^2)\right) & \text{se } 0 \leq t \leq t_+ \\ 1 & \text{se } t > t_+ \end{cases}$$

**Analisi della regolarità del prolungamento** Verifichiamo la ammissibilità di tale funzione nel punto di giunzione $t_+$:

- **Continuità:** $\lim_{t \to t_+^-} x_{\text{ext}}(t) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ e $\lim_{t \to t_+^+} x_{\text{ext}}(t) = 1$. La funzione è globale e continua in $[0, +\infty)$.
- **Derivabilità:** La derivata sinistra e la derivata destra in $t_+$ coincidono:

$$x'_{\text{ext}}(t_+^-) = 0 = x'_{\text{ext}}(t_+^+)$$

  La funzione risulta pertanto di classe $C^1([0, +\infty))$ e soddisfa l'equazione differenziale in ogni punto del semiasse positivo. Una costruzione speculare può essere effettuata per il semiasse negativo tramite il tempo critico $t_-$.

**Bene. Finalmente ci siamo. Manca cosa succede nei tempi $t < 0$, ma sostanzialmente per $t < t_- = -\sqrt{\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}-1}{3}}$ la soluzione va prolungate con valore costante 1. Si noti come la soluzione sia debolmente crescente per $t \geq 0$ e debolmente decrescente per $t \leq 0$. Ah, c'è ancora qualcosa... chissà se cercando di vantarsi dice qualche castroneria.**

## Il fenomeno del "bivio" (Non-unicità)

Sebbene il prolungamento a tratti sia geometricamente regolare ($C^1$), esso non rappresenta l'unica estensione possibile. A causa della mancanza di lipschitzianità sulla retta $x = 1$, nel punto $t_+$ l'equazione ammette **infinite soluzioni** classiche. **Finora va bene.** Ad esempio, per un qualunque tempo $\tau > t_+$, una traiettoria valida potrebbe rimanere sulla retta $x = 1$ nell'intervallo $[t_+, \tau]$ per poi "staccarsi" nuovamente e decrescere seguendo una dinamica speculare. **No! Non succede, la soluzione non può staccarsi e decrescere, aveva fatto lo studio del segno della derivata e detto che doveva essere crescente! Quello che è corretto affermare invece è che eventuali soluzioni di problemi di Cauchy con dati iniziali $(t_0, x_0)$ con $t_0 > 0$ e $x_0 = 1$ sono costanti nel futuro (per $t > t_0$) ma nel passato (per $t < t_0$) possono decidere di staccarsi dal valore $x = 1$ e scendere (ma tornando**

**indietro nel tempo e prima di raggiungere $t = 0$). Simmetricamente soluzioni di problemi di Cauchy con dati iniziali $(t_0, x_0)$ con $t_0 < 0$ e $x_0 = 1$ sono costanti nel passato ma nel futuro possono decidere di staccarsi dal valore $x = 1$ e scendere (prima di raggiungere $t = 0$).**

**Conclusione:** È matematicamente legittimo definire la soluzione a tratti su tutto $\mathbb{R}$, ma l'intervallo massimale della *soluzione classica unica* del problema di Cauchy originario rimane confinato a $I$, poiché oltre tale intervallo il determinismo della traiettoria viene perso. **Qui l'IA vincola il concetto di intervallo massimale di esistenza di una soluzione a quando le soluzioni sono uniche, in realtà questa situazione non è obbligatoria, ma agevola le spiegazioni.**

**Concludo sottolineando che avendo chiesto una soluzione del problema di Cauchy, c'era libertà di considerare un dominio a piacere. In fondo, una soluzione mi è stata data, ma non quella col dominio più grande possibile.**

## Esercizio 5

Scegli tre punti a piacere $A, B, C \in \mathbb{R}^3$. Considera il triangolo $T$ avente questi punti come vertici. Dato il rettangolo $Q = [0,1] \times [0,1]$ definisci una parametrizzazione $\sigma : Q \to T$ del triangolo. Costruisci secondo la procedura vista durante il corso il bordo orientato $\partial\sigma$ e descrivi come si riduce il calcolo dell'integrale $\int_\sigma \omega$ dove $\omega$ è una generica 1-forma differenziale definita su $\mathbb{R}^3$ come

$$\omega(x, y, z) = f_1(x, y, z)\, dx + f_2(x, y, z)\, dy + f_3(x, y, z)\, dz\,.$$

**Risoluzione:** Scegliamo tre punti arbitrari in $\mathbb{R}^3$ per identificare i vertici del triangolo $T$:

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0), \quad C = (0, 0, 1)$$

**Personalmente avrei preso l'origine e due dei punti sopra, per semplificare i calcoli.**

**1. Parametrizzazione del triangolo** Per parametrizzare il triangolo $T$ a partire dal quadrato unitario $Q = [0,1] \times [0,1]$, possiamo utilizzare una combinazione convessa riscalata dei vertici. Fissato il vertice $A$, ci muoviamo lungo le direzioni dei vettori $(B - A)$ e $(C - B)$ contraendo opportunamente il dominio:

$$\sigma(u, v) = A + u(B - A) + uv(C - B) \quad \text{con } (u, v) \in Q$$

Sostituendo i valori numerici dei punti scelti otteniamo:

$$\sigma(u, v) = (1, 0, 0) + u(-1, 1, 0) + uv(0, -1, 1)$$

Sviluppando le singole componenti, la parametrizzazione $\sigma : Q \to T$ risulta:

$$\sigma(u, v) = (1 - u,\ u - uv,\ uv)$$

**2. Costruzione del bordo orientato** Il bordo del quadrato $\partial Q$ è composto da 4 segmenti orientati perimetralmente in senso antiorario. La mappa $\sigma$ trasferisce questa orientazione sul bordo del triangolo $\partial\sigma$. Analizziamo i 4 lati del dominio parametrico:

- **Lato 1 ($\gamma_1$):** da $(0, 0)$ a $(1, 0)$, dove $v = 0$ e $u \in [0, 1]$.

  $$\sigma(u, 0) = (1 - u, u, 0)$$

  Questo segmento congiunge il punto $A$ al punto $B$.

- **Lato 2 ($\gamma_2$):** da $(1,0)$ a $(1,1)$, dove $u=1$ e $v \in [0,1]$.

$$\sigma(1,v) = (0, 1-v, v)$$

  Questo segmento congiunge il punto $B$ al punto $C$.

- **Lato 3 ($\gamma_3$):** da $(1,1)$ a $(0,1)$, dove $v=1$ e $u$ decresce da 1 a 0.

$$\sigma(u,1) = (1-u, 0, u)$$

  Questo segmento congiunge il punto $C$ al punto $A$.

- **Lato 4 ($\gamma_4$):** da $(0,1)$ a $(0,0)$, dove $u=0$ e $v$ decresce da 1 a 0.

$$\sigma(0,v) = (1,0,0) = A$$

  Questo intero lato si contrae nel singolo punto $A$. Essendo la sua derivata identicamente nulla, il suo contributo geometrico e analitico è nullo.

Il bordo orientato indotto $\partial\sigma$ coincide quindi con la frontiera geometrica del triangolo percorsa lungo il cammino chiuso e orientato $A \to B \to C \to A$.

**3. Calcolo dell'integrale della 1-forma** Data la generica 1-forma differenziale su $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(x,y,z) = f_1(x,y,z)\,dx + f_2(x,y,z)\,dy + f_3(x,y,z)\,dz$$

L'integrale sul bordo orientato si riduce alla somma degli integrali curvilinei sui singoli lati non degeneri:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega$$

Sostituendo le rispettive parametrizzazioni e i relativi differenziali otteniamo tre integrali definiti in una sola variabile sull'intervallo $[0,1]$:

**In quanto segue l'IA spesso adotta tecniche diverse da quanto esposto in classe. Si prega di riscrivere quanto segue col formalismo visto durante il corso.**

1. **Su $\gamma_1$:** $(x = 1-u,\ y = u,\ z = 0 \implies dx = -du,\ dy = du,\ dz = 0)$

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^1 \left[-f_1(1-u,u,0) + f_2(1-u,u,0)\right] du$$

2. **Su $\gamma_2$:** $(x = 0,\ y = 1-v,\ z = v \implies dx = 0,\ dy = -dv,\ dz = dv)$

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^1 \left[-f_2(0,1-v,v) + f_3(0,1-v,v)\right] dv$$

3. **Su $\gamma_3$:** $(x = 1-u,\ y = 0,\ z = u \implies dx = -du,\ dy = 0,\ dz = du$, invertendo gli estremi per l'orientazione)

$$\int_{\gamma_3} \omega = \int_1^0 \left[-f_1(1-u,0,u) + f_3(1-u,0,u)\right] du = \int_0^1 \left[f_1(1-u,0,u) - f_3(1-u,0,u)\right] du$$

Il calcolo della forma differenziale si riduce così alla risoluzione algebrica di questi tre integrali unidimensionali.

## Esercizio 6

Calcola $\int_\sigma \omega$ dove

$$\omega(p,q,r,s) = p\,dpdr + t\,dqds$$

e $\sigma : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}^5$ è definita come

$$\sigma(x,y) = (x^2\,,\ y^2 + x\,,\ 3x - 2y\,,\ x^3)\,.$$

**L'IA risolve questo tipo di esercizi con strategie e terminologie diverse da come fatto in classe. Si lascia la risoluzione per un confronto.**

**1. Calcolo dei differenziali delle componenti** Identifichiamo le funzioni componenti della parametrizzazione ponendo $\sigma(x,y) = (p,q,r,s)$:

$$p = x^2, \quad q = y^2 + x, \quad r = 3x - 2y, \quad s = x^3$$

Calcoliamo i differenziali totali rispetto alle variabili parametriche $x$ e $y$:

$$\begin{aligned} dp &= 2x\,dx \\ dq &= dx + 2y\,dy \\ dr &= 3\,dx - 2\,dy \\ ds &= 3x^2\,dx \end{aligned}$$

**2. Pull-back dei prodotti esterni** Applichiamo il pull-back ai prodotti esterni delle forme differenziali, ricordando le proprietà dell'algebra esterna ($dx \wedge dx = 0$ e $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$):

- **Primo termine ($dp \wedge dr$):**

$$dp \wedge dr = (2x\,dx) \wedge (3\,dx - 2\,dy) = -4x\,dx \wedge dy$$

- **Secondo termine ($dq \wedge ds$):**

$$dq \wedge ds = (dx + 2y\,dy) \wedge (3x^2\,dx) = 6x^2 y\,dy \wedge dx = -6x^2 y\,dx \wedge dy$$

**3. Sostituzione dei coefficienti nella forma** Moltiplichiamo i prodotti esterni ottenuti per i rispettivi coefficienti definiti dalla mappa $\sigma$:

$$\begin{aligned} p\,dp \wedge dr &= (x^2) \cdot (-4x\,dx \wedge dy) = -4x^3\,dx \wedge dy \\ t\,dq \wedge ds &= t \cdot (-6x^2 y\,dx \wedge dy) = -6tx^2 y\,dx \wedge dy \end{aligned}$$

La forma differenziale pull-backata sul dominio $Q = [0,1] \times [0,2]$ è quindi:

$$\sigma^*\omega = (-4x^3 - 6tx^2 y)\,dx \wedge dy$$

**4. Integrazione sul dominio rettangolare** Risolviamo l'integrale doppio sul rettangolo applicando il teorema di riduzione per integrali iterati:

$$\int_\sigma \omega = \int_0^1 \left( \int_0^2 (-4x^3 - 6tx^2 y)\,dy \right) dx$$

Risolviamo prima l'integrale interno rispetto a $y$:

$$\int_0^2 (-4x^3 - 6tx^2 y)\,dy = \left[ -4x^3 y - 3tx^2 y^2 \right]_{y=0}^{y=2} = -8x^3 - 12tx^2$$

Ora integriamo l'espressione risultante rispetto a $x$ sull'intervallo $[0,1]$:

$$\int_0^1 (-8x^3 - 12tx^2)\,dx = \left[ -2x^4 - 4tx^3 \right]_0^1 = -2 - 4t$$

**Nota sul testo dell'esercizio** Se la variabile $t$ presente nel testo fosse un refuso per la quarta coordinata $s$, allora avremmo $t = s = x^3$. **Spiazzante come abbia trovato l'errore di battitura riscontrato durante l'esame.** In tal caso il secondo pezzo diventerebbe:

$$s\,dq \wedge ds = (x^3)(-6x^2y\,dx \wedge dy) = -6x^5y\,dx \wedge dy$$

L'integrazione finale produrrebbe:

$$\int_0^1 \int_0^2 -6x^5y\,dy\,dx = \int_0^1 -12x^5\,dx = \left[-2x^6\right]_0^1 = -2$$

Il valore finale dell'integrale in questo scenario specifico sarebbe quindi: $-2 - 2 = -4$.

# 29 giugno 2026

## Esercizio 1

**Testo:** Studiare il carattere della seguente serie numerica al variare del parametro reale $\alpha > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4\alpha - 1}{\alpha \sqrt[n]{n}} \right]^n$$

**In questo esercizio l'IA commette un errore comune non tratta adeguatamente la serie come serie a segno non definito, in quanto a volte il termine generale è negativo. Qui l'IA spesso dimentica di controllare il segno dei termini.**

**Svolgimento:** Consideriamo il termine generale della serie definito da $a_n = \left[ \frac{4\alpha-1}{\alpha \sqrt[n]{n}} \right]^n$. Poiché l'intero termine è elevato alla potenza $n$, il metodo più appropriato per studiarne la convergenza è l'applicazione del **Criterio della Radice** in forma asintotica.

Calcoliamo quindi il limite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4\alpha - 1}{\alpha \sqrt[n]{n}} \right|$$

Sfruttando il limite notevole fondamentale dell'analisi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, e ricordando che per ipotesi il parametro è strettamente positivo ($\alpha > 0$), il valore del limite $L$ in funzione di $\alpha$ risulta:

$$L = \frac{|4\alpha - 1|}{\alpha}$$

Il Criterio della Radice stabilisce che la serie converge se $L < 1$ e diverge se $L > 1$. **Qui l'IA cita bene il criterio della radice, ma sta valutando se la serie converge assolutamente. Se $L > 1$ la serie risulta divergente solo se $\frac{4\alpha-1}{\alpha} > 0$. Tale errore avrà in seguito le sue conseguenze.** Analizziamo i diversi scenari:

**1. Studio della Convergenza Assoluta ($L < 1$)** Risolviamo la disequazione associata alla convergenza:

$$\frac{|4\alpha - 1|}{\alpha} < 1 \implies |4\alpha - 1| < \alpha$$

Poiché $\alpha > 0$, possiamo esplicitare il valore assoluto nella seguente doppia disequazione lineare:

$$-\alpha < 4\alpha - 1 < \alpha$$

Risolviamo il sistema intersecando le due condizioni:

1. $-\alpha < 4\alpha - 1 \implies 5\alpha > 1 \implies \alpha > \frac{1}{5}$
2. $4\alpha - 1 < \alpha \implies 3\alpha < 1 \implies \alpha < \frac{1}{3}$

Dunque, per $\alpha \in \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$ il limite soddisfa $L < 1$ e la serie **converge assolutamente** (e quindi semplicemente).

**2. Studio della Divergenza ($L > 1$)** La serie **(in cui si aggiunge il valore assoluto, non quella originale!)** diverge quando il limite soddisfa $L > 1$, ovvero quando $|4\alpha - 1| > \alpha$. Risolvendo la disequazione per valori esterni otteniamo:

$$4\alpha - 1 < -\alpha \quad \cup \quad 4\alpha - 1 > \alpha \implies \alpha < \frac{1}{5} \quad \cup \quad \alpha > \frac{1}{3}$$

Tenendo conto del vincolo iniziale $\alpha > 0$, la serie **diverge** per ogni valore appartenente all'insieme $\alpha \in \left(0, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

**Quando $\alpha \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$ la serie non è a termini positivi e la serie sarà indeterminata, quando invece $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ la serie sarà a termini positivi e sarà divergente.**

**3. Analisi dei Casi Limite ($L = 1$)** Il criterio della radice è inconcludente quando $L = 1$, il che avviene esattamente nei punti di frontiera $\alpha = \frac{1}{3}$ e $\alpha = \frac{1}{5}$. Svolgiamo uno studio diretto per questi due valori:

- **Caso $\alpha = \frac{1}{3}$:** Sostituendo il valore nel termine generale si ottiene:

$$a_n = \left[\frac{4(\frac{1}{3}) - 1}{\frac{1}{3}\sqrt[n]{n}}\right]^n = \left[\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\sqrt[n]{n}}\right]^n = \left[\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right]^n = \frac{1}{n}$$

  La serie si riduce alla **serie armonica fondamentale** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, la quale **diverge** a $+\infty$.

- **Caso $\alpha = \frac{1}{5}$:** Sostituendo il valore nel termine generale si ottiene:

$$a_n = \left[\frac{4(\frac{1}{5}) - 1}{\frac{1}{5}\sqrt[n]{n}}\right]^n = \left[\frac{-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}\sqrt[n]{n}}\right]^n = \left[-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right]^n = \frac{(-1)^n}{n}$$

  La serie si trasforma nella **serie armonica a segni alterni** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Questa serie soddisfa i requisiti del **Criterio di Leibniz**:

  - I termini in valore assoluto sono decrescenti: $b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$.
  - Il termine generale è infinitesimo: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

  Pertanto, per il Criterio di Leibniz, la serie **converge** per $\alpha = \frac{1}{5}$.

**Conclusione e Sintesi del Carattere** Raggruppando tutti gli intervalli e i punti critici analizzati, possiamo riassumere definitivamente il comportamento della serie al variare di $\alpha > 0$:

- La serie **converge** se $\alpha \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$
- La serie **diverge** se $\alpha \in \left(0, \frac{1}{5}\right) \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

**Correggere la precedente affermazione alla luce delle precedenti considerazioni.**

# Esercizio 2

**Testo:** Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

dire in quali punti è continua e in quali punti è differenziabile. Scrivere il gradiente di $f$ nei punti in cui esiste. Inoltre, calcolare il massimo e il minimo della funzione sulla frontiera della palla chiusa di raggio 1 centrata nell'origine.

**Svolgimento:**

## 1. Studio della Continuità

- **Per** $(x, y) \neq (0, 0)$**:** La funzione è una funzione razionale (rapporto di polinomi) il cui denominatore $x^2 + y^2$ non si annulla mai. Di conseguenza, $f$ è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- **Nell'origine** $(0, 0)$**:** Verifichiamo la continuità calcolando il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ tramite maggiorazione. Per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ vale:

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| = |x| \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |x| \cdot 1 = |x|$$

  Poiché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$, per il teorema del confronto si ha che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$.

La funzione è pertanto **continua su tutto** $\mathbb{R}^2$.

## 2. Derivabilità Parziale e Gradiente

- **Per** $(x, y) \neq (0, 0)$**:** Calcoliamo le derivate parziali applicando la regola di derivazione del quoziente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - x^3(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - x^3(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$$

- **Nell'origine** $(0, 0)$**:** Ricorriamo alla definizione mediante limite del rapporto incrementale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

Il gradiente di $f$ esiste in ogni punto dello spazio ed è espresso da:

$$\nabla f(x, y) = \begin{cases} \left( \dfrac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, -\dfrac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} \right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ (1, 0) & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

## 3. Studio della Differenziabilità

- **Per** $(x, y) \neq (0, 0)$**:** Le componenti del gradiente sono funzioni razionali con denominatore non nullo, quindi sono continue. Per il **Teorema del Differenziale Totale**, la funzione è differenziabile in tutti i punti esterni all'origine. **(punti esterni all'origine?)**
- **Nell'origine** $(0, 0)$**:** Verifichiamo la differenziabilità tramite definizione, analizzando l'esistenza del limite:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2} - h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} -\frac{hk^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$$

Restringendo il limite lungo le rette passanti per l'origine della forma $k = mh$, si ottiene:

$$\lim_{h\to 0^+} -\frac{h(mh)^2}{(h^2+m^2h^2)^{3/2}} = \lim_{h\to 0^+} -\frac{m^2h^3}{h^3(1+m^2)^{3/2}} = -\frac{m^2}{(1+m^2)^{3/2}}$$

Il valore del limite dipende dalla pendenza $m$ della direzione scelta. Non esistendo un valore unico ed indipendente dalla direzione, **la funzione non è differenziabile in** $(0,0)$. **L'affermazione è corretta ma fuorviante. Se ottenessi un unico valore indipendentemente dalla direzione non avrei la differenziabilità. Per averla questo valore deve essere zero e ancora non basterebbe a dimostrarla, in quanto sto considerando il limite solo lungo semirette. Ovviamente, ottenendo più valori, non possono essere tutti zero. Tale procedura è efficace solo per concludere con una risposta negativa.**

## 4. Ottimizzazione sulla Frontiera della Palla

La frontiera della palla chiusa di raggio 1 centrata nell'origine è la circonferenza unitaria descritta dall'equazione vincolata $\partial B_1(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$.

Sostituendo il vincolo $x^2+y^2=1$ nell'espressione della funzione, il denominatore diventa costantemente pari a 1 e la funzione si riduce a:

$$g(x) = f(x,y)\Big|_{\partial B_1} = \frac{x^3}{1} = x^3$$

Poiché i punti appartenenti alla circonferenza unitaria limitano la coordinata $x$ all'intervallo chiuso $[-1,1]$, andiamo a studiare i valori estremi assunti dalla funzione cubica $g(x) = x^3$ in tale intervallo:

- Il valore **massimo assoluto** è 1, ed è assunto nel punto di coordinate $(1,0)$.
- Il valore **minimo assoluto** è $-1$, ed è assunto nel punto di coordinate $(-1,0)$.

## Esercizio 3: Integrale Doppio con Cambio di Variabili

**Testo:** Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_E xy^2\,dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x \le y \le 4x\,, 1 < xy < 2\}$. Disegnare $E$ sottolineando quali punti di $\partial E$ appartengono (o non appartengono) all'insieme.

**Svolgimento:** Introduciamo il cambio di variabili suggerito dalla forma del dominio:

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = xy \implies 3 \le u \le 4, \quad 1 < v < 2$$

Esplicitando le variabili $x$ e $y$ in funzione di $u$ e $v$ si ottiene $x = v^{1/2}u^{-1/2}$ e $y = u^{1/2}v^{1/2}$. Calcoliamo lo Jacobiano della trasformazione: **Non mi piace la scelta della notazione nei primi due membri qui sotto.**

$$|J| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right| = \left|\left(-\frac{1}{2}v^{1/2}u^{-3/2}\right)\left(\frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2}\right) - \left(\frac{1}{2}v^{-1/2}u^{-1/2}\right)\left(\frac{1}{2}u^{-1/2}v^{1/2}\right)\right| = \frac{1}{2u}$$

L'integranda diventa $xy^2 = u^{1/2}v^{3/2}$. Sostituendo nell'integrale sul nuovo dominio rettangolare $D$:

$$\int_E xy^2\,dxdy = \int_1^2\int_3^4 \left(u^{1/2}v^{3/2}\right)\frac{1}{2u}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^2 v^{3/2}\,dv \int_3^4 u^{-1/2}\,du$$

Risolviamo i singoli integrali definiti:

$$\int_1^2 v^{3/2}\,dv = \left[\frac{2}{5}v^{5/2}\right]_1^2 = \frac{2}{5}(4\sqrt{2}-1), \quad \int_3^4 u^{-1/2}\,du = \left[2\sqrt{u}\right]_3^4 = 2(2-\sqrt{3})$$

Il valore finale dell'integrale è:

$$\int_E xy^2\,dxdy = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}(4\sqrt{2}-1)\cdot 2(2-\sqrt{3}) = \frac{2}{5}(4\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{3})$$

**Analisi della Frontiera $\partial E$:** L'insieme $E$ è delimitato lateralmente dai segmenti rettilinei $y = 3x$ e $y = 4x$, e inferiormente/superiormente dagli archi di iperbole $xy = 1$ e $xy = 2$.

- I segmenti delle rette $y = 3x$ e $y = 4x$ **appartengono** alla frontiera inclusa (presenza dei segni $\leq$).
- Gli archi delle iperboli $xy = 1$ e $xy = 2$ **non appartengono** alla frontiera (presenza dei segni di disuguaglianza stretta $<$).
- I quattro vertici di intersezione **non appartengono** all'insieme poiché giacciono sulle iperboli escluse.

**Più sotto ci sono le immagini proposte dall'IA.**

## Esercizio 4

**Testo:** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'' - 2x' + 5x = 5t^2 + t \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

**Svolgimento: 1. Soluzione dell'equazione omogenea associata:** L'equazione omogenea è $x'' - 2x' + 5x = 0$. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Il discriminante è $\Delta = 4 - 20 = -16$, da cui ricaviamo le radici complesse coniugate $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. La soluzione generale dell'omogenea è:

$$x_0(t) = e^t(C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t))$$

**2. Ricerca della soluzione particolare:** Poiché il termine noto $f(t) = 5t^2 + t$ è un polinomio di secondo grado e $\lambda = 0$ non è radice caratteristica, **(Perché questa affermazione? Cosa sarebbe successo se $\lambda = 0$ fosse stata radice caratteristica?)** cerchiamo una soluzione particolare del tipo $x_p(t) = At^2 + Bt + C$. Le sue derivate sono $x_p'(t) = 2At + B$ e $x_p''(t) = 2A$. Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene:

$$(2A) - 2(2At + B) + 5(At^2 + Bt + C) = 5t^2 + t$$

Uguagliando i coefficienti dei termini simili ricaviamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} 5A = 5 \\ -4A + 5B = 1 \\ 2A - 2B + 5C = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 0 \end{cases}$$

Quindi, la soluzione particolare è $x_p(t) = t^2 + t$.

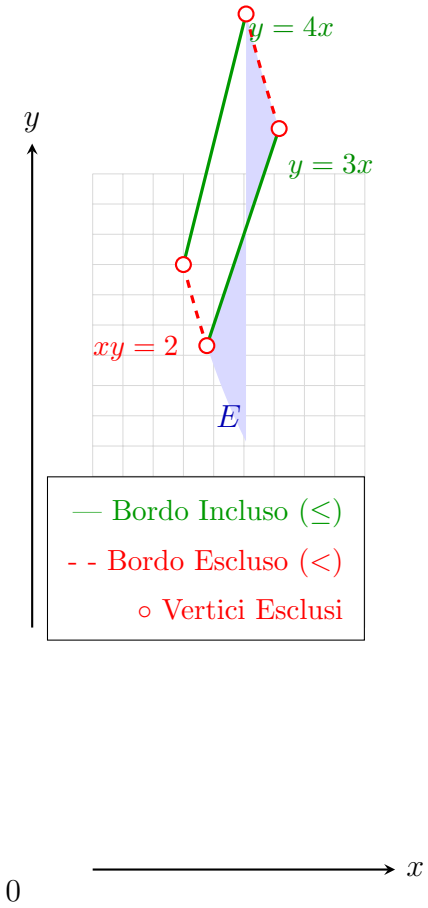


Figura 1: Rappresentazione geometrica del dominio d'integrazione $E$ con specifica dei dettagli di frontiera. **Questo è il primo tentativo.**

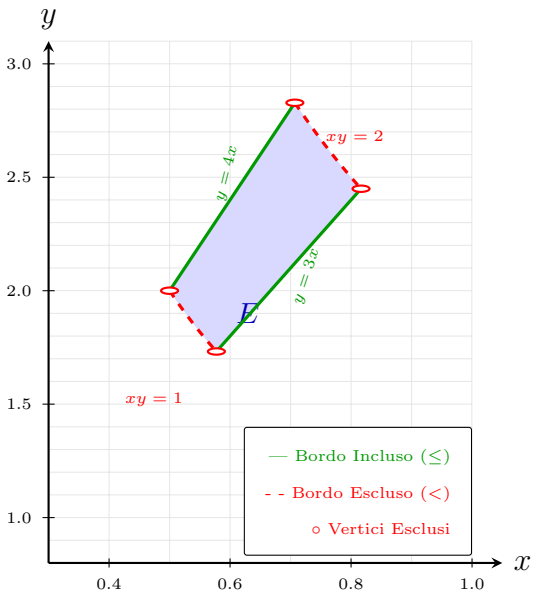


Figura 2: Rappresentazione geometrica del dominio d'integrazione $E$ con specifica dei dettagli di frontiera. **Questo è il secondo tentativo. Da questo disegno non si evince però la forma delle rette e delle iperboli che costituiscono il bordo della figura**

**3. Condizioni iniziali:** La soluzione generale dell'equazione completa è $x(t) = e^t(C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)) + t^2 + t$. Calcoliamo la derivata prima:

$$x'(t) = e^t\left[(C_1 + 2C_2)\cos(2t) + (C_2 - 2C_1)\sin(2t)\right] + 2t + 1$$

Imponiamo le condizioni iniziali nell'origine $t = 0$:

$$x(0) = C_1 = 1$$

$$x'(0) = (C_1 + 2C_2) + 1 = 0 \implies 1 + 2C_2 + 1 = 0 \implies C_2 = -1$$

La soluzione finale del problema di Cauchy è:

$$x(t) = t^2 + t + e^t(\cos(2t) - \sin(2t))$$

## Esercizio 5

**Testo:** Calcolare $\displaystyle\int_\sigma \omega$ dove

$$\omega(x, y, z, w) = y\,dy \wedge dz \wedge dw + z^2\,dx \wedge dy \wedge dw + xy\,dx \wedge dy \wedge dz$$

e $\sigma : [0, 1] \times [0, 3] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^4$ è definita come $\sigma(u, v, t) = (u, v, t, u^2 + v^2 + t^2)$.

**Svolgimento:** **Notare la differenza di approccio e la terminologia (che ricorda la parte finale delle dispense). Per favore non preferite questo approccio rispetto a quanto visto in classe.** Utilizziamo il metodo del pull-back diretto sul dominio tridimensionale $V = [0, 1] \times [0, 3] \times [0, 2]$. La parametrizzazione della superficie fornisce il cambio di coordinate:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = t, \quad w = u^2 + v^2 + t^2 \implies dw = 2u\,du + 2v\,dv + 2t\,dt$$

Sostituiamo i differenziali all'interno della forma $\omega$, sfruttando l'antisimmetria del prodotto esterno per riordinare i termini nella base $du \wedge dv \wedge dt$:

$$\begin{aligned}
&1^\circ \text{ termine:} && v\,dv \wedge dt \wedge (2u\,du + 2v\,dv + 2t\,dt) = 2uv\,du \wedge dv \wedge dt \\
&2^\circ \text{ termine:} && t^2\,du \wedge dv \wedge (2u\,du + 2v\,dv + 2t\,dt) = 2t^3\,du \wedge dv \wedge dt \\
&3^\circ \text{ termine:} && uv\,du \wedge dv \wedge dt
\end{aligned}$$

Sommando i contributi otteniamo la forma pull-back $\sigma^*\omega = (3uv + 2t^3)\,du \wedge dv \wedge dt$. L'integrale si riduce a:

$$\int_\sigma \omega = \int_0^1 \int_0^3 \int_0^2 (3uv + 2t^3)\,dt\,dv\,du$$

Calcoliamo i due contributi separatamente:

$$\int_0^1 \int_0^3 \int_0^2 3uv\,dt\,dv\,du = 3\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^3 \big[t\big]_0^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 2 = \frac{27}{2}$$

$$\int_0^1 \int_0^3 \int_0^2 2t^3\,dt\,dv\,du = 2\big[u\big]_0^1 \big[v\big]_0^3 \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Sommando i due valori parziali otteniamo il risultato finale:

$$\int_\sigma \omega = \frac{27}{2} + 24 = \frac{75}{2}$$

## Esercizio 6

**Testo:** Considerare una 2-superficie $\sigma$ avente come supporto l'insieme $S = S_1 \cup S_2$ dove:

$$S_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 = 4\,, |c| \leq 3\}$$
$$S_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 \leq 4\,, |c| = 3\}$$

Sceglierne un'orientazione e calcolare $\displaystyle\int_\sigma \omega$ dove $\omega(a,b,c) = a^2c^3\, da \wedge db + ac\, da \wedge dc - b^2c\, db \wedge dc$.

**Svolgimento:** Il supporto $S = S_1 \cup S_2$ costituisce la frontiera chiusa di un cilindro pieno $V$ di raggio $R = 2$ ed estensione verticale $c \in [-3, 3]$. Scegliamo l'orientazione standard indotta dal versore normale uscente. Per il Teorema di Stokes generalizzato (Teorema della Divergenza), l'integrale si riduce a un integrale triplo sul volume $V$:

$$\int_\sigma \omega = \int_V d\omega$$

Calcoliamo il differenziale esterno della 2-forma $\omega$:

$$d\omega = d(a^2c^3\, da \wedge db) + d(ac\, da \wedge dc) + d(-b^2c\, db \wedge dc)$$

$$d\omega = (3a^2c^2\, dc \wedge da \wedge db) + 0 + 0 = 3a^2c^2\, da \wedge db \wedge dc$$

Passiamo alle coordinate cilindriche per calcolare l'integrale sul volume del cilindro $V$:

$$a = \rho\cos\theta, \quad b = \rho\sin\theta, \quad c = c \quad \text{con } \rho \in,\, \theta \in [0, 2\pi],\, c \in [-3, 3]$$

Ricordando il fattore di scala jacobiano $J = \rho$, l'integrale diventa:

$$\int_V 3a^2c^2\, dadbdc = \int_{-3}^{3}\int_0^{2\pi}\int_0^2 3(\rho\cos\theta)^2c^2 \cdot \rho\, d\rho\, d\theta\, dc$$

Separando le variabili otteniamo il prodotto di tre integrali monodimensionali:

$$= 3\left(\int_0^2 \rho^3\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_{-3}^{3} c^2\, dc\right)$$

Risolvendo i singoli fattori:

$$\int_0^2 \rho^3\, d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = 4, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \pi, \quad \int_{-3}^{3} c^2\, dc = \left[\frac{c^3}{3}\right]_{-3}^{3} = 18$$

Moltiplicando i risultati insieme alla costante iniziale otteniamo la soluzione finale:

$$\int_\sigma \omega = 3 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 18 = 216\pi$$