Esercizi II settimana *Ist. Matematiche A (Scienze Geologiche) – Prof. Fabio Vlacci*
A.A. 2026/2027

1. Siano $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-3, -1, 2, 5, 9\}$ due sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$. Allora funzioni iniettive e di dominio A e codominio B

   i esistono e sono esattamente 5 ii esistono e sono esattamente 4

   iii esistono e sono esattamente 3 iv non esistono

2. Siano$A_{25} = \{\text{numeri naturali minori o uguali a } 25\}$ e $B_{24} = \{\text{divisori di } 24\}$.

   Calcolare $\#([A_{25} \cup B_{24}] \cap \mathcal{P})$ ove $\mathcal{P}$ rappresenta l'insieme dei numeri pari.

3. Stabilire se la relazione definita da $x\mathcal{R}y \iff x \cdot y > 0$ per $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è o meno una relazione di equivalenza.

4. Mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, ...\}$ risulta

$$2 + 6 + 10 + \ldots + (4n - 2) = 2n^2.$$

   [ESERCIZIO PROPOSTO NELL'APPELLO AUTUNNALE 2022]

5. Mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il numero $d_n = n(17n^2 + 103)$ è un multiplo di 6.

   [PARTE DI ESERCIZIO PROPOSTO NEL PREAPPELLO DI DICEMBRE 2023]

6. Data la funzione $k \in \mathbb{N} \mapsto \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) := a_k \in \mathbb{Q}\ (k \geq 1)$ si consideri

$$b_n := a_2 \cdot a_3 \cdots a_n \; n \geq 2.$$

   Si mostri - usando il Principio di Induzione - che $b_n = \dfrac{n+1}{2n}$.

$$\{4a_2, 9a_3 - 6b_3, 4b_2 + 9a_3, a_1 + 3b_3\}.$$

   [PARTE DI ESERCIZIO PROPOSTO NELL'APPELLO AUTUNNALE 2024]

7. Sia $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione della somma dei primi n multipli di 6. Si mostri che $s_n = 3n(n + 1)$. Si trovi il valore mediano dei dati

$$\{s_3 - 3s_1, 2s_2 + s_1, s_1 + s_3, s_3 - s_2 + s_1\}.$$

   [PARTE DI ESERCIZIO PROPOSTO NELL'APPELLO ESTIVO 2024]

8. Mostrare che per ogni numero naturale $n \geq 1$, risulta

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$