UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE
Dipartimento di Ingegneria e Architettura

AZIONAMENTI ELETTRICI

a.a. 2026/2027 – 9 CFU

Matteo Olivo, PhD – *matteo.olivo@units.it*

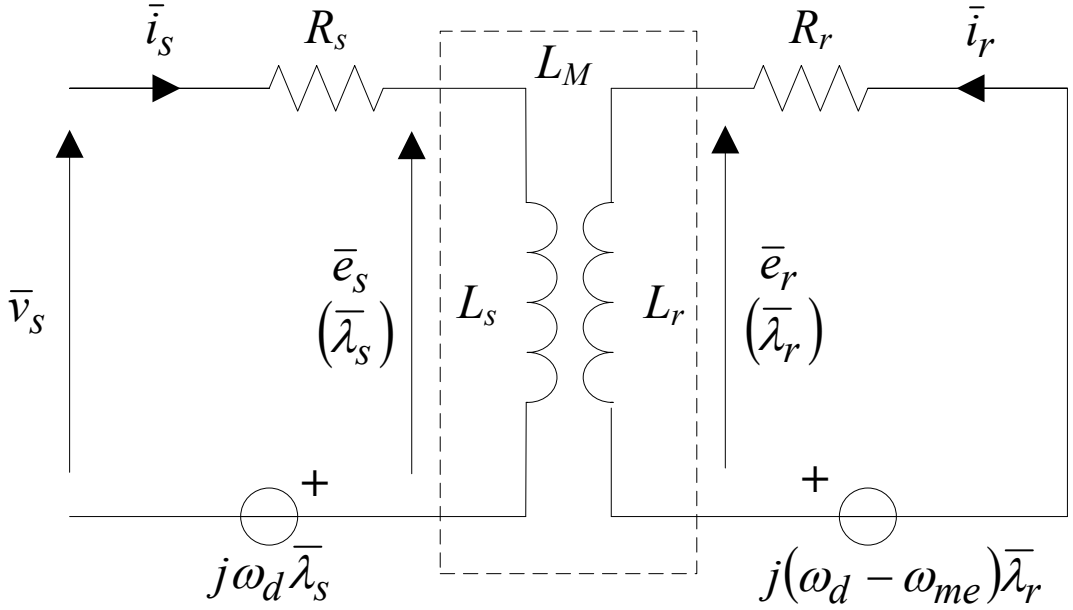
CIRCUITI EQUIVALENTI DELLA MACCHINA ASINCRONA

CIRCUITO EQUIVALENTE DINAMICO

Si parte dall'equazione dinamica (prima del riporto a statore) scritta su riferimento unico generico:

$$\begin{cases} \bar{v}_{\mathrm{s}}^{(d)} = R_s \bar{\imath}_s^{(d)} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_s^{(d)} + j\omega_d \bar{\lambda}_s^{(d)} \\ 0 = R_{\mathrm{r}} \bar{\imath}_{\mathrm{r}}^{(d)} + \dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\lambda}_r^{(d)} + j(\omega_d - \omega_{\mathrm{me}})\bar{\lambda}_r \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\lambda}_{\mathrm{s}}^{(d)} = L_{\mathrm{s}}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + \dfrac{3}{2}\widehat{M}_{\mathrm{sr}}\bar{\imath}_{\mathrm{r}}^{(d)} = L_{\mathrm{s}}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + \dfrac{N_{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{s}}}L_{\mathrm{M}}\bar{\imath}_{\mathrm{r}}^{(d)} \\ \bar{\lambda}_{\mathrm{r}}^{(d)} = \dfrac{3}{2}\widehat{M}_{\mathrm{sr}}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + L_r\bar{\imath}_{\mathrm{r}}^{(d)} = \dfrac{N_{\mathrm{r}}}{N_{\mathrm{s}}}L_{\mathrm{M}}\bar{\imath}_{\mathrm{s}}^{(d)} + L_{\mathrm{r}}\bar{\imath}_{\mathrm{r}}^{(d)} \end{cases}$$

Tali equazioni possono essere sintetizzate nel seguente circuito dinamico:



Si può osservare che le due maglie di questo circuito realizzano perfettamente le equazioni elettriche (considerando $\bar{e}_{\mathrm{s}}$ e $\bar{e}_{\mathrm{r}}$ pari alle f.e.m. trasformatoriche). Inoltre si può vedere che la potenza complessivamente associata ai due generatori di tensione (f.e.m. mozionali) è pari alla potenza meccanica. Infatti si è già mostrato che risulta:

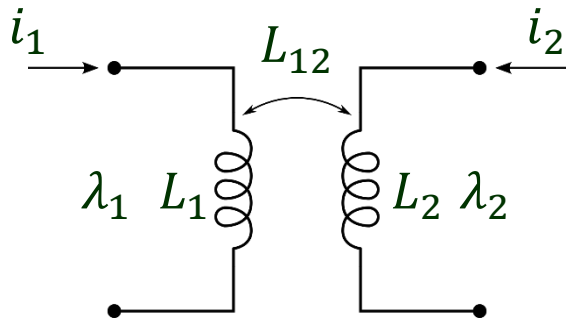
$$\omega_d\left(j\bar{\lambda}_{\mathrm{s}}\right)\cdot\bar{\imath}_{\mathrm{s}} + (\omega_d - \omega_{\mathrm{me}})\left(j\bar{\lambda}_{\mathrm{r}}\right)\bar{\imath}_{\mathrm{r}} = C_{\mathrm{m}}\omega_{\mathrm{m}}$$

TEORIA DEI CIRCUITI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

Manca una rappresentazione esplicita delle equazioni di legame magnetico, ovvero un equivalente circuitale semplice che riassuma l'interdipendenza dei flussi di statore e rotore con le corrispondenti correnti.

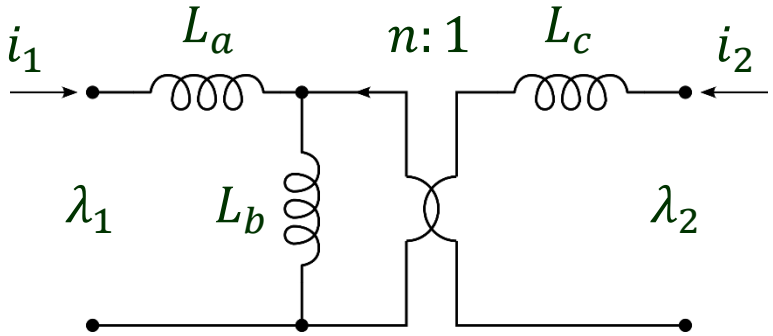
Conviene analizzare il comportamento degli avv. di statore e rotore per mezzo di due circuiti mutuamente accoppiati, in cui sia soddisfatta l'equazione:

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_1 i_1 + L_{12} i_2 \\ \lambda_2 = L_{12} i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$



Una possibile realizzazione circuitale di questo accoppiamento fa uso di un trasformatore reale (ovvero dotato di induttanze a ingresso e uscita più un'induttanza trasversale di magnetizzazione):

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_a i_1 + L_b (i_1 + i_2/n) \\ \lambda_2 = L_c i_2 + \dfrac{1}{n} L_b (i_1 + i_2/n) \end{cases}$$



TEORIA DEI CIRCUITI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

Per confronto tra i due modelli si ottiene dunque:

$$\begin{cases} \lambda_1 = (L_a + L_b) i_1 + \dfrac{L_b}{n} i_2 \,) = L_1 i_1 + L_{12} i_2 \\ \lambda_2 = \dfrac{L_b}{n} i_1 + \left(L_c + \dfrac{L_b}{n^2} \right) i_2 = L_{12} i_1 + L_2 i_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 = L_a + L_b \\ L_{12} = L_b / n \\ L_2 = L_c + L_b / n^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} L_a = L_1 - n L_{12} \\ L_b = n\, L_{12} \\ L_c = L_2 - L_{12} / n \end{cases}$$

dunque sono determinati i parametri della soluzione circuitale cercata. Nel caso della macchina asincrona osserviamo che risulta:

$$L_1 = L_\mathrm{s} \qquad L_2 = L_\mathrm{r} \qquad L_{12} = \frac{N_r}{N_s} L_\mathrm{M}$$

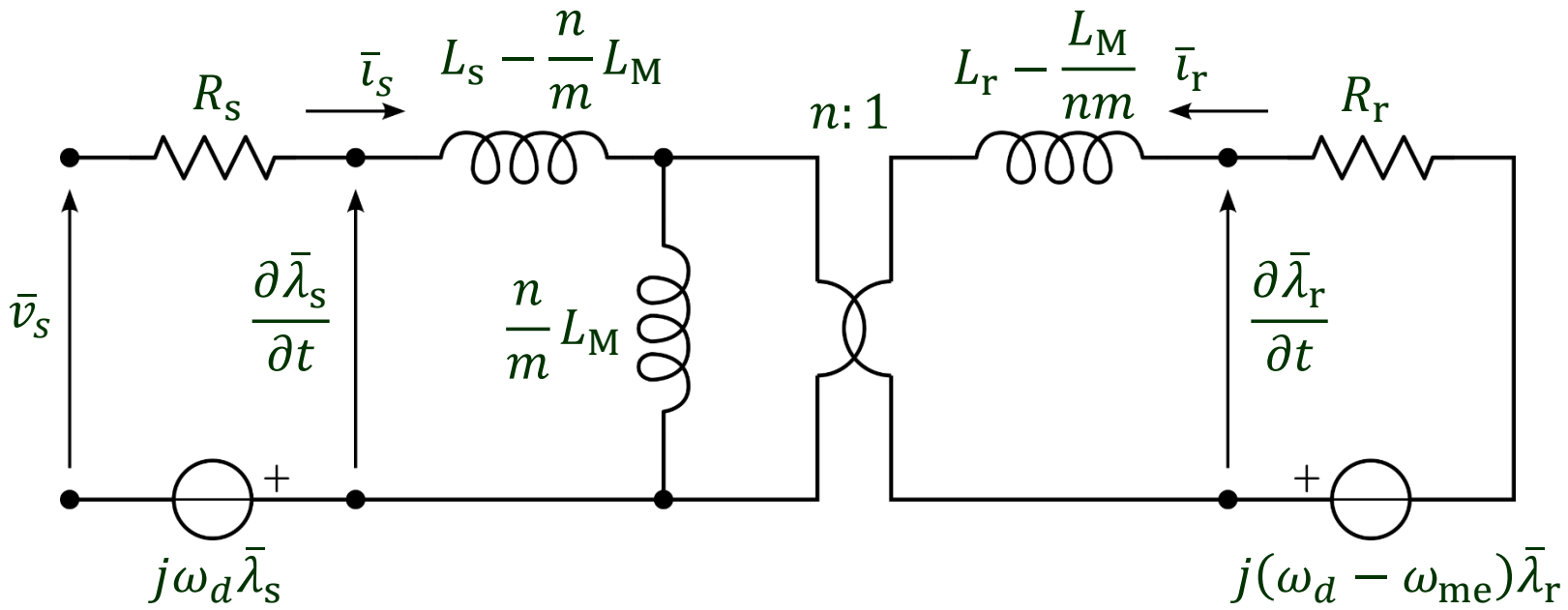
e quindi la scelta:

$$L_a = L_\mathrm{s} - n \frac{N_r}{N_s} L_M \qquad L_b = n \frac{N_r}{N_s} L_M \qquad L_c = L_r - \frac{1}{n} \frac{N_r}{N_s} L_M$$

realizza l'accoppiamento tra la maglia elettrica di statore e la maglia elettrica di rotore, completando il modello circuitale.

CIRCUITO DINAMICO COMPLETO

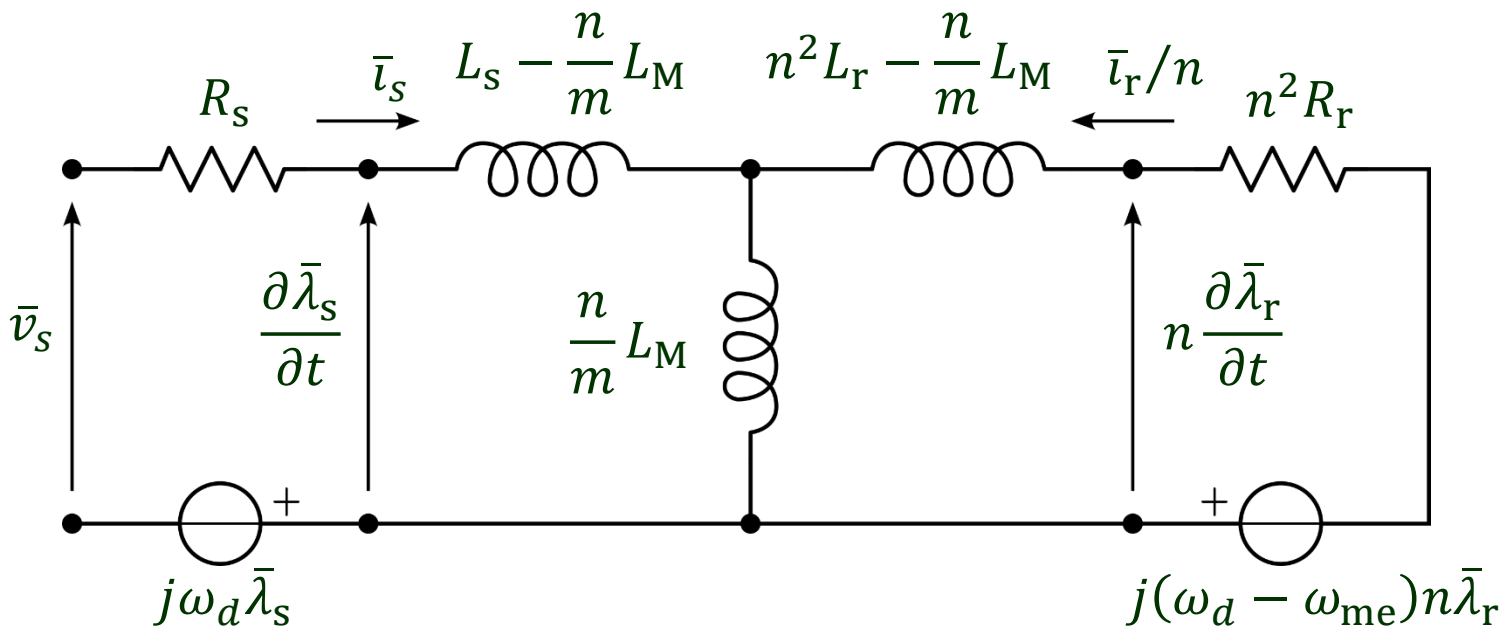
Integrando la rappresentazione circuitale così determinata nel circuito dinamico si intende il modello circuitale completo (per il momento con le grandezze rotoriche non riportate a statore). Per semplicità da qui in avanti si omette l'esplicita indicazione del riferimento (d) nelle grandezze, se non c'è il rischio di ambiguità.



in cui si è indicato con $m = N_s/N_r$ il reale rapporto spire di macchina. Va osservato infatti che il modello circuitale del mutuo accoppiamento che è stato introdotto, prevedendo 4 parametri ma solo 3 condizioni di equivalenza (data la simmetria della matrice delle induttanze) non è univocamente determinato, ovvero dei 4 parametri uno (il rapporto spire n) può essere scelto in maniera arbitraria.

CIRCUITO DINAMICO COMPLETO

Si può riportare ciò che è a valle del trasformatore di accoppiamento al lato di statore con le usuali regole (flussi e tensioni $\times n$, correnti $\times 1/n$, induttanze e resistenze $\times n^2$)



Tra tutte le possibili scelte di n, tre sono le più significative:

- $n = m$ produce il classico circuito a T;
- $n = m\, L_\mathrm{s}/L_\mathrm{M}$ annulla l'induttanza longitudinale lato statore e produce il circuito a Γ;
- $n = L_\mathrm{M}/mL_\mathrm{r}$ annulla l'induttanza longitudinale lato rotore e produce il circuito a Γ rovesciata.

CIRCUITO EQUIVALENTE A T

La scelta $n = m$ porta al classico circuito equivalente a T, in cui può essere determinato il flusso magnetizzante sul ramo trasversale, $\bar{\lambda}_\mu = L_\mathrm{M}(\bar{\imath}_\mathrm{s} + \bar{\imath}_\mathrm{rs})$.
NB: data l'arbitrarietà nella scelta del rapporto spire n (che potrebbe in generale essere diverso dal reale m) si indicherà con il pedice «sr» solamente le grandezze relative al vero riporto (ossia quello associato con $n = m$).

$$\lambda_\mathrm{rs} = m\lambda_\mathrm{rs} \qquad i_\mathrm{rs} = i_\mathrm{r}/m \qquad R_\mathrm{rs} = m^2 R_\mathrm{r} \qquad L_\mathrm{rs} = m^2 L_\mathrm{r} \qquad L_{\sigma\mathrm{rs}} = m^2 L_{\sigma\mathrm{r}}$$

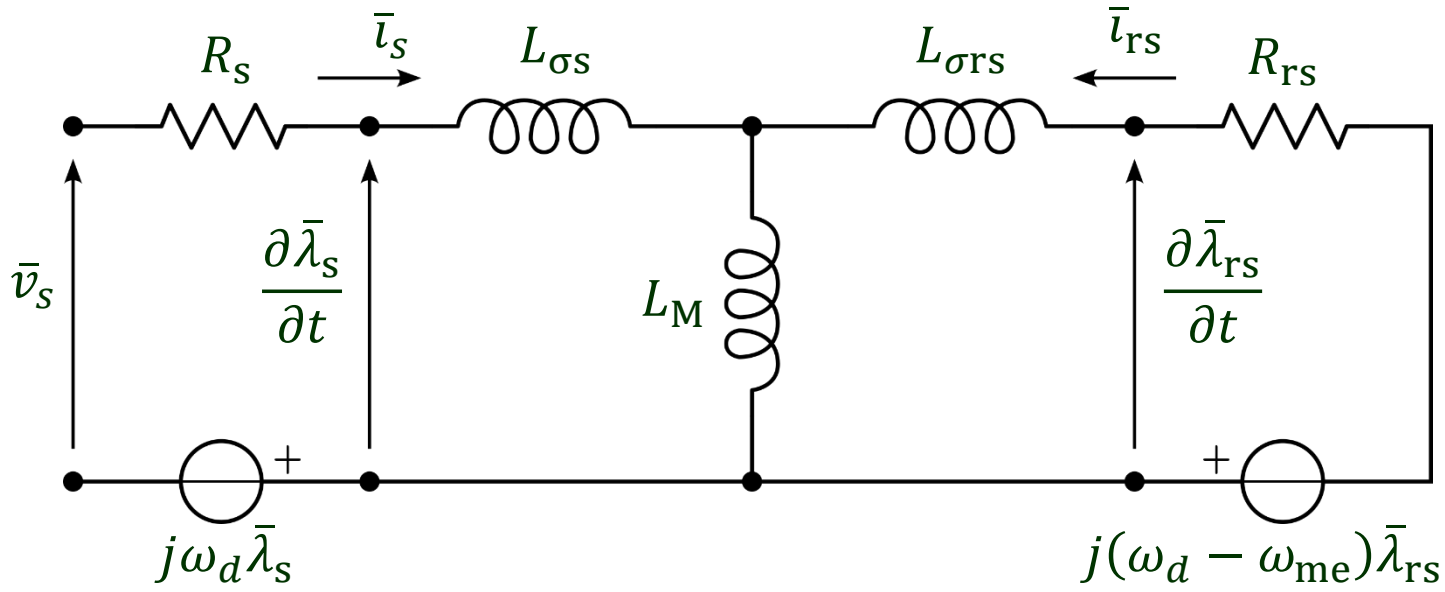
Ricordando le relazioni introdotte in precedenza si osserva che risulta:

$$L_\mathrm{s} - \frac{n}{m} L_\mathrm{M} \qquad L_\mathrm{s} - L_\mathrm{M} = L_{\sigma\mathrm{s}}$$

$$n = m$$

$$\frac{n}{m} L_\mathrm{M} \qquad L_\mathrm{M}$$

$$n^2 L_\mathrm{r} - \frac{n}{m} L_\mathrm{M} \qquad L_\mathrm{rs} - L_\mathrm{M} = L_{\sigma\mathrm{rs}}$$



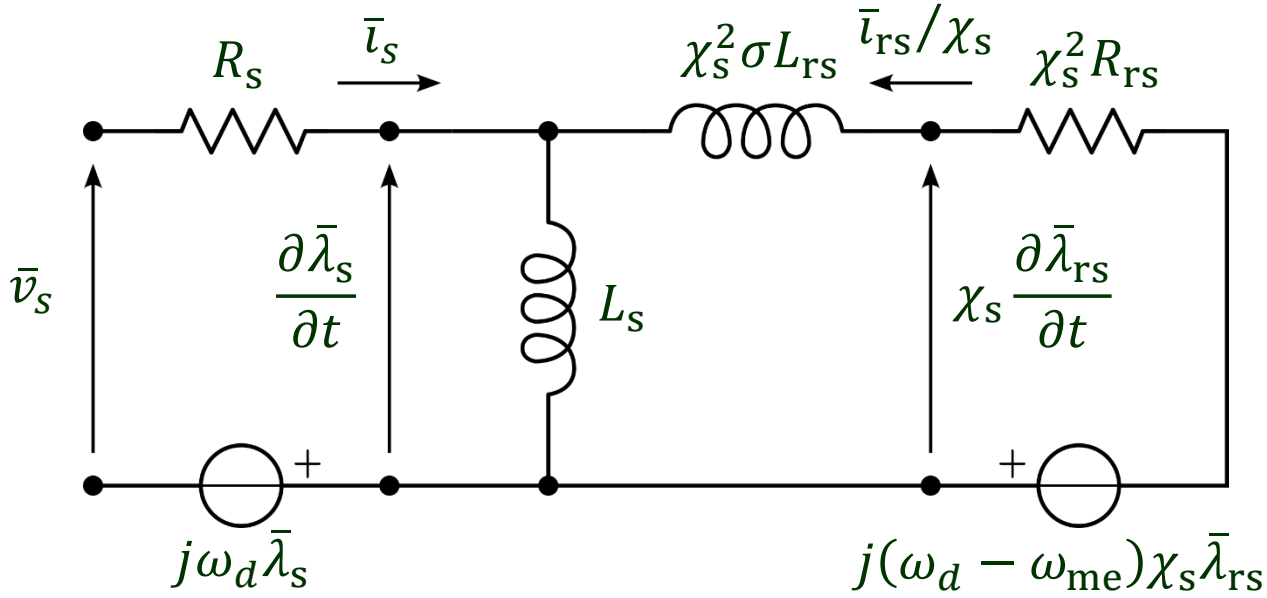
CIRCUITO EQUIVALENTE A Γ

Scegliendo $n = mL_\mathrm{s}/L_\mathrm{M}$ si ottiene il circuito a Γ, in cui viene evidenziato il flusso di statore.

$$L_\mathrm{s} - \frac{n}{m}L_\mathrm{M} \qquad n = m\frac{L_\mathrm{s}}{L_\mathrm{M}} \qquad 0$$

$$\frac{n}{m}L_\mathrm{M} \qquad\Rightarrow\qquad L_\mathrm{s}$$

$$n^2 L_\mathrm{r} - \frac{n}{m}L_\mathrm{M} \qquad \left(\frac{L_\mathrm{s}}{L_\mathrm{M}}\right)^2\left(1 - \frac{L_\mathrm{M}^2}{L_\mathrm{s}L_\mathrm{rs}}\right)L_\mathrm{rs}$$



Si introduce il fattore di dispersione totale:

$$\sigma := 1 - \frac{L_\mathrm{M}^2}{L_\mathrm{s}L_\mathrm{rs}}$$

e il fattore di scala per il riporto a statore:

$$\chi_\mathrm{s} := L_\mathrm{s}/L_\mathrm{M}$$

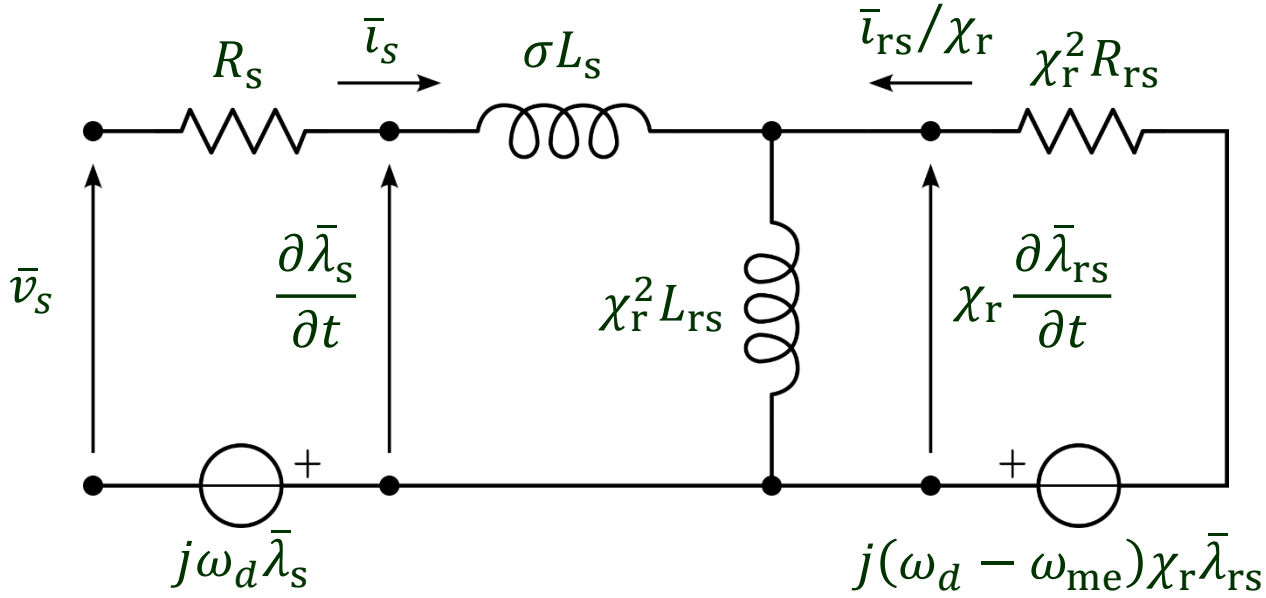
CIRCUITO EQUIVALENTE A Γ ROVESCIATA

Scegliendo $n = L_{\mathrm{M}}/mL_{\mathrm{r}} = m\,L_{\mathrm{M}}/L_{\mathrm{rs}}$ si ottiene il circuito a Γ rovesciata, in cui viene evidenziato il flusso di rotore.

$L_{\mathrm{s}} - \frac{n}{m}L_{\mathrm{M}}$	$n = m\frac{L_{\mathrm{M}}}{L_{\mathrm{rs}}}$	$L_{\mathrm{s}}\left(1 - \frac{L_{\mathrm{M}}^2}{L_{\mathrm{s}}L_{\mathrm{rs}}}\right)$
$\frac{n}{m}L_{\mathrm{M}}$	⇒	$\frac{L_{\mathrm{M}}^2}{L_{\mathrm{rs}}^2}L_{\mathrm{rs}}$
$n^2L_{\mathrm{r}} - \frac{n}{m}L_{\mathrm{M}}$		0

Si riconosce nuovamente il fattore di dispersione totale e si introduce il fattore di scala per il riporto:

$$\chi_{\mathrm{r}} := L_{\mathrm{M}}/L_{\mathrm{rs}}$$



CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE

Si è già mostrato che, qualunque sia il sistema di riferimento scelto, in condizioni di regime sinusoidale le equazioni elettriche si riducono a:

$$\begin{cases} \bar{V}_\mathrm{s} = R_\mathrm{s}\bar{I}_\mathrm{s} + j\omega_\mathrm{s}\bar{\Lambda}_\mathrm{s} \\ 0 = R_\mathrm{rs}\bar{I}_\mathrm{rs} + j\omega_\mathrm{sce}\bar{\Lambda}_\mathrm{rs} \end{cases}$$

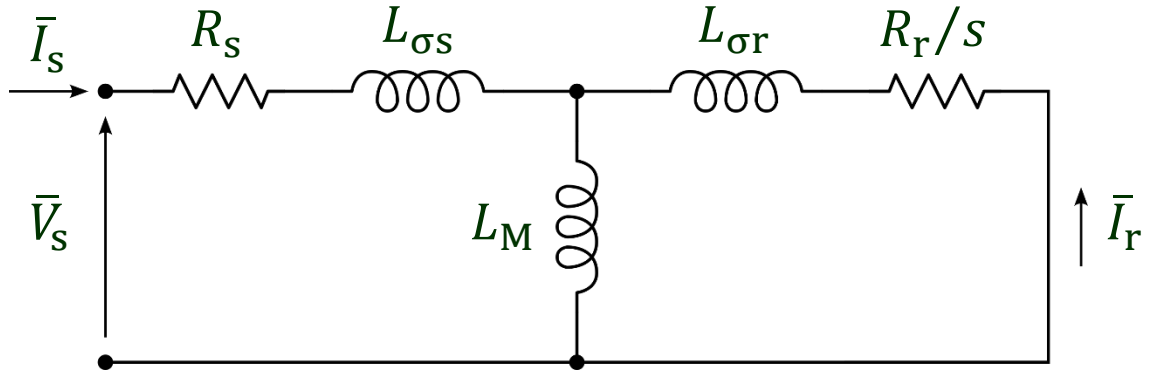
in cui si è introdotta la pulsazione di scorrimento $\omega_\mathrm{sce} = \omega_\mathrm{s} - \omega_\mathrm{me} = s\omega_\mathrm{s}$. Questo consente di ridefinire la seconda equazione:

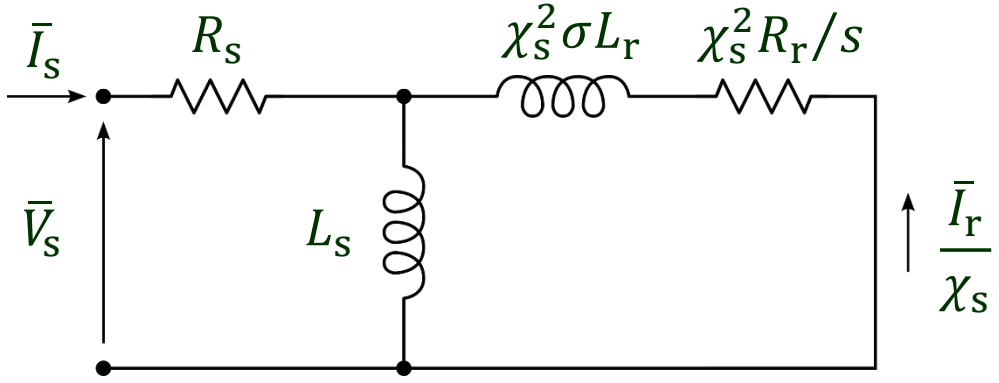
$$\begin{cases} \bar{V}_\mathrm{s} = R_\mathrm{s}\bar{I}_\mathrm{s} + j\omega_\mathrm{s}\bar{\Lambda}_\mathrm{s} \\ 0 = \dfrac{R_\mathrm{rs}}{s}\bar{I}_\mathrm{rs} + j\omega_\mathrm{s}\bar{\Lambda}_\mathrm{rs} \end{cases}$$

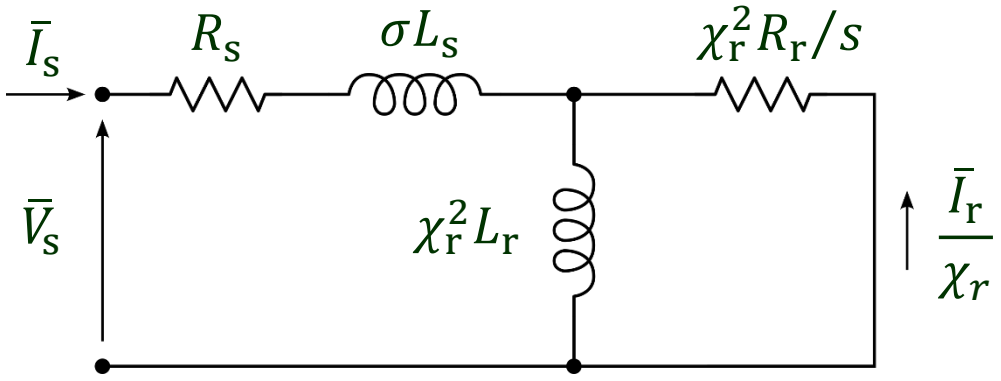
Le espressioni dei flussi concatenati vanno ricavate dalle equazioni di legame. Tuttavia, essendo la struttura formale di queste invariata tra il regime dinamico e quello sinusoidale, è possibile utilizzare le tre rappresentazioni circuitali ottenute in precedenza sfruttando la teoria dei circuiti mutuamente accoppiati.
In particolare si osservi che la seconda delle equazioni elettriche può essere trasformata in quella tipicamente associata al circuito a Γ o a Γ rovesciata moltiplicando per i corrispondenti fattori di scala χ_s e χ_r.

Da qui in avanti si indicheranno le grandezze riportate a statore (secondo il vero rapporto spire) con il solo pedice «r».

CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE



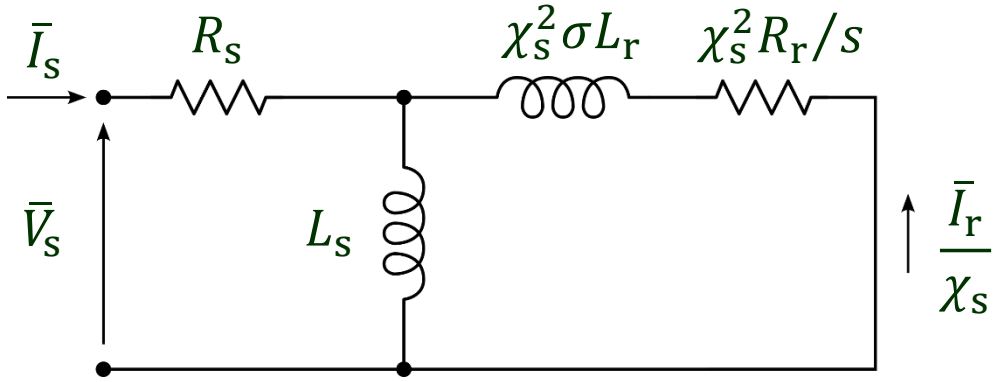




RELAZIONI NOTEVOLI

Si dimostrano ora alcune relazioni notevoli valide in regime sinusoidale. Si pone:

$$\tau_s = L_s/R_s \qquad \tau_r = L_r/R_r$$



Si determina innanzitutto il legame tra flusso e corrente di statore, sfruttando il circuito a Γ:

$$\bar{\Lambda}_s = L_s(\bar{I}_s + \bar{I}_r/\chi_s)$$

$$\frac{\bar{I}_r}{\chi_s} = -\bar{I}_s \frac{j\omega_s L_s}{\chi_s^2 \frac{R_r}{s} + j\omega_s(L_s + \chi_s^2\sigma L_r)}$$ (Partitore di corrente)

$$\bar{\Lambda}_s = L_s\bar{I}_s\left(1 - \frac{j\omega_{sce}L_s}{\chi_s^2 R_r + j\omega_{sce}(L_s + \chi_s^2\sigma L_r)}\right) = L_s\bar{I}_s \frac{\chi_s^2 R_r + j\omega_{sce}\chi_s^2\sigma L_r}{\chi_s^2 R_r + j\omega_{sce}(L_s + \chi_s^2\sigma L_r)} = L_s\bar{I}_s \frac{R_r + j\omega_{sce}\sigma L_r}{R_r + j\omega_{sce}\left(\frac{L_s}{\chi_s^2} + \sigma L_r\right)}$$

$$\frac{L_s}{\chi_s^2} + \sigma L_r = \frac{L_M^2}{L_s} + L_r\left(1 - \frac{L_M^2}{L_s L_r}\right) = L_r \quad \Rightarrow \quad \bar{\Lambda}_s = L_s\bar{I}_s \frac{1 + j\omega_{sce}\sigma\tau_r}{1 + j\omega_{sce}\tau_r}$$

RELAZIONI NOTEVOLI

Sfruttando l'equazione elettrica di statore si determina il legame tra flusso e tensione di statore:

$$\bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j\omega_s \bar{\Lambda}_s \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{V}_s}{\bar{I}_s} = R_s + j\omega_s \frac{\bar{\Lambda}_s}{\bar{I}_s} \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{\Lambda}_s}{\bar{V}_s} = \frac{\bar{\Lambda}_s}{\bar{I}_s}\frac{\bar{I}_s}{\bar{V}_s} = \frac{\bar{\Lambda}_s/\bar{I}_s}{R_s + j\omega_s\,\bar{\Lambda}_s/\bar{I}_s}$$

Dalla relazione precedente risulta:

$$\bar{\Lambda}_s = \frac{L_s\dfrac{1+j\omega_{sce}\sigma\tau_r}{1+j\omega_{sce}\tau_r}}{R_s + j\omega_s L_s\dfrac{1+j\omega_{sce}\sigma\tau_r}{1+j\omega_{sce}\tau_r}}\bar{V}_s = \frac{L_s(1+j\omega_{sce}\sigma\tau_r)}{R_s(1+j\omega_{sce}\tau_r) + j\omega_s L_s - \omega_s\omega_{sce}\sigma L_s\tau_r}\bar{V}_s$$

$$\bar{\Lambda}_s = \frac{\tau_s(1+j\omega_{sce}\sigma\tau_r)}{(1-s\omega_s^2\sigma\tau_s\tau_r) + j\omega_s(\tau_s + s\tau_r)}\bar{V}_s$$

RELAZIONI NOTEVOLI

Si può ora calcolare la coppia per mezzo della relazione:

$$C_{\mathrm{m}} = \frac{3}{2} p \, (j\bar{\Lambda}_{\mathrm{s}}) \cdot \bar{I}_{\mathrm{s}}$$

Si inverte la relazione flusso-corrente:

$$(j\bar{\Lambda}_{\mathrm{s}}) \cdot \bar{I}_{\mathrm{s}} = (j\bar{\Lambda}_{\mathrm{s}}) \cdot \left[\frac{\bar{\Lambda}_s}{L_{\mathrm{s}}} \frac{1 + j\omega_{\mathrm{sce}}\tau_{\mathrm{r}}}{1 + j\omega_{\mathrm{sce}}\sigma\tau_{\mathrm{r}}} \right] = \mathrm{Re}\left\{ j\bar{\Lambda}_{\mathrm{s}} \frac{1 - j\omega_{\mathrm{sce}}\tau_{\mathrm{r}}}{1 - j\omega_{\mathrm{sce}}\sigma\tau_{\mathrm{r}}} \frac{\bar{\Lambda}_s^*}{L_s} \right\} =$$

$$= -\frac{\|\Lambda_s\|^2}{L_{\mathrm{s}}(1 + \omega_{\mathrm{sce}}^2\sigma^2\tau_{\mathrm{r}}^2)} \mathrm{Im}\{(1 - j\omega_{\mathrm{sce}}\tau_{\mathrm{r}})(1 + j\omega_{\mathrm{sce}}\sigma\tau_r)\} = \frac{\|\Lambda_{\mathrm{s}}\|^2}{L_{\mathrm{s}}} \frac{(1-\sigma)\omega_{\mathrm{sce}}\tau_{\mathrm{r}}}{1 + \sigma^2\omega_{\mathrm{sce}}^2\tau_{\mathrm{r}}^2}$$

$$C_{\mathrm{m}} = \frac{3}{2} p \frac{(1-\sigma)\omega_{\mathrm{sce}}\tau_{\mathrm{r}}}{1 + \sigma^2\omega_{\mathrm{sce}}^2\tau_{\mathrm{r}}^2} \frac{\|\Lambda_{\mathrm{s}}\|^2}{R_{\mathrm{s}}}$$

Si nota che questa espressione non dipende esplicitamente dalla pulsazione di statore. Ciò significa che se il flusso di statore resta costante la forma della caratteristica di coppia al variare dello scorrimento resta invariata, ovvero la caratteristica si sposta nel piano coppia velocità mantenendo le medesime proporzioni.

RELAZIONI NOTEVOLI

Nell'espressione precedente, sostituendo la relazione che dà il flusso in funzione della tensione si ottiene l'espressione della coppia a tensione costante:

$$\|\Lambda_s\|^2 = \frac{\tau_s^2(1+\omega_{sce}^2\sigma^2\tau_r^2)}{(1-s\omega_s^2\sigma\tau_s\tau_r)^2+\omega_s^2(\tau_s+s\tau_r)^2}\|V_s\|^2$$

$$C_m = \frac{3}{2}p\frac{(1-\sigma)\omega_{sce}\tau_r\tau_s}{(1-\omega_{sce}\omega_s\sigma\tau_s\tau_r)^2+(\omega_s\tau_s+\omega_{sce}\tau_r)^2}\frac{\|V_s\|^2}{R_s}$$

Si determina la pulsazione di scorrimento che massimizza la coppia

$$\frac{\partial C_m}{\partial \omega_{sce}} = 0 \Leftrightarrow (1-\omega_{sce}\omega_s\sigma\tau_s\tau_r)^2+(\omega_s\tau_s+\omega_{sce}\tau_r)^2-2\omega_{sce}[(1-\omega_{sce}\omega_s\sigma\tau_s\tau_r)(-\omega_s\sigma\tau_s\tau_r)+(\omega_s\tau_s+\omega_{sce}\tau_r)\tau_r] = 0$$

$$(1-\omega_{sce}\omega_s\sigma\tau_s\tau_r)(1+\omega_{sce}\omega_s\sigma\tau_s\tau_r)+(\omega_s\tau_s+\omega_{sce}\tau_r)(\omega_s\tau_s-\omega_{sce}\tau_r) = 0$$

$$1-\omega_{sce}^2\,\omega_s^2\sigma^2\tau_s^2\tau_r^2+\omega_s^2\tau_s^2-\omega_{sce}^2\tau_r^2 = 0$$

$$\hat{\omega}_{sce} = \frac{1}{\tau_r}\sqrt{\frac{1+\omega_s^2\tau_s^2}{1+\sigma^2\omega_s^2\tau_s^2}}$$

$$C_{m,MAX} = \frac{3}{4}p\frac{(1-\sigma)\tau_s^2}{L_s}\frac{\|V_s^2\|^2}{(1-\sigma)\omega_s\tau_s+\sqrt{(1+\omega_s^2\tau_s^2)(1+\sigma^2\omega_s^2\tau_s^2)}}$$

RELAZIONI NOTEVOLI

Si determina infine il rendimento. Si osserva che risulta:

$$P_{\text{out}} = C_{\text{m}}\omega_{\text{m}} = \frac{C_{\text{m}}}{p}\omega_{\text{me}} = \frac{C_{\text{m}}}{p}(1-s)\omega_{\text{s}} = \frac{3}{2}\frac{(1-\sigma)\tau_{\text{r}}\tau_{\text{s}}\, s(1-s)\omega_s^2}{(1-\omega_{\text{sce}}\omega_{\text{s}}\sigma\tau_{\text{s}}\tau_{\text{r}})^2 + (\omega_{\text{s}}\tau_{\text{s}} + \omega_{\text{sce}}\tau_{\text{r}})^2}\frac{\|V_{\text{s}}\|^2}{R_{\text{s}}}$$

$$P_{\text{in}} = \frac{3}{2}\bar{V}_{\text{s}} \cdot \bar{I}_{\text{s}} = \frac{3}{2}\bar{V}_{\text{s}} \cdot \left(\frac{\bar{I}_{\text{s}}}{\bar{V}_{\text{s}}}\bar{V}_{\text{s}}\right) = \frac{3}{2}\|V_{\text{s}}\|^2 \text{Re}\left\{\frac{\bar{I}_{\text{s}}}{\bar{V}_{\text{s}}}\right\}$$

Ma:

$$\frac{\bar{I}_{\text{s}}}{\bar{V}_{\text{s}}} = \frac{\bar{I}_{\text{s}}}{\bar{\Lambda}_{\text{s}}}\frac{\bar{\Lambda}_s}{\bar{V}_{\text{s}}} = \frac{\tau_{\text{s}}}{L_{\text{s}}}\frac{1 + j\omega_{\text{sce}}\tau_{\text{r}}}{(1 - s\omega_s^2\sigma\tau_{\text{s}}\tau_{\text{r}}) + j\omega_{\text{s}}(\tau_{\text{s}} + s\tau_{\text{r}})}$$

da cui:

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \frac{s(1-s)\omega_s^2(1-\sigma)\tau_{\text{s}}\tau_{\text{r}}}{1 + (1-\sigma)s\omega_{\text{s}}^2\tau_{\text{s}}\tau_{\text{r}} + s^2\omega_{\text{s}}^2\tau_{\text{r}}^2}$$

Se si trascura la resistenza di statore ($\tau_s \to \infty$) si osserva che $\eta \approx 1 - s$, dunque lo scorrimento va mantenuto basso per permettere di sfruttare al meglio la potenza assorbita.