Università di Trieste
Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di
Problemi Strutturali dell'Edilizia Storica

COMPORTAMENTO SISMICO EDIFICI
PARTE 2

Prof. Ing. Natalino Gattesco

RIPARTIZIONE AZIONI ORIZZONTALI

Per strutture tipo shear-type è possibile utilizzare il procedimento semplificato di ripartizione del taglio di piano fra i maschi murari:

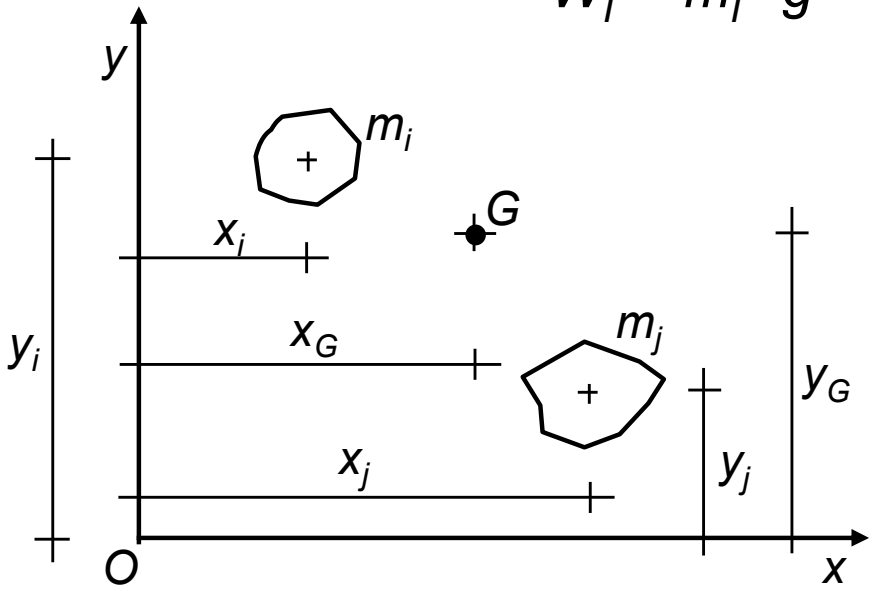
- **Determinazione della rigidezza di ogni elemento murario**
- **Individuazione del baricentro delle masse**
- **Individuazione del baricentro delle rigidezze**
- **Valutazione dell'eccentricità tra la forza agente e i baricentro delle rigidezze**
- **Ripartizione della forza proporzionalmente alle rigidezze, per sisma agente in direzione x**
- **Ripartizione della forza proporzionalmente alle rigidezze, per sisma agente in direzione y**
- **Combinazione dell'azione secondo normativa**

BARICENTRO DELLE MASSE

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali, è possibile calcolare il baricentro delle masse relative a tutti i livelli (piani)

Individuando per ogni singolo componente strutturale un baricentro ed una massa, con le note relazioni della geometria delle masse si ricava la posizione del baricentro di ogni piano.

$$W_i = m_i \cdot g$$



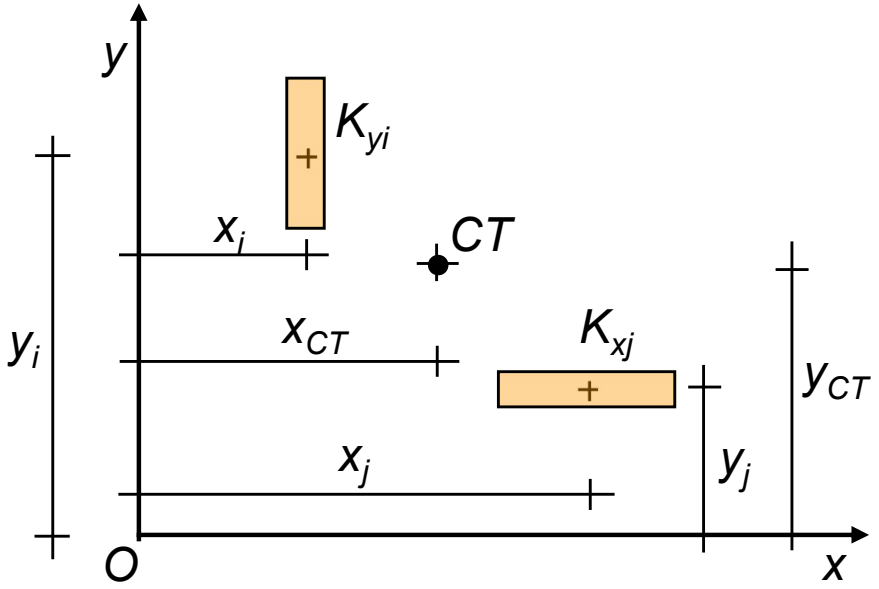
$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i}$$

$$y_G = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot y_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n} W_j \cdot y_j}{\sum_{j=1}^{n} W_j}$$

BARICENTRO DELLE RIGIDEZZE

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali, è possibile calcolare il baricentro delle rigidezze relative a tutti i livelli (piani)

Individuando per ogni singolo elemento murario un baricentro ed una rigidezza K_{xi} o K_{yj}, con le note relazioni della geometria delle masse si ricava la posizione del baricentro di ogni piano.



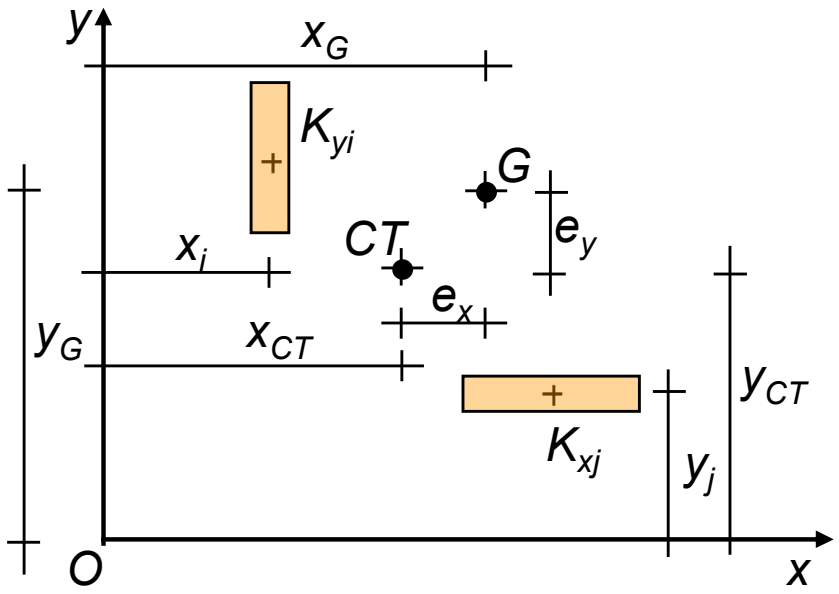
$$x_{CT} = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_{yi} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} K_{yi}}$$

$$y_{CT} = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_{xj} \cdot y_j}{\sum_{j=1}^{n} K_{xj}}$$

DISTANZA BARICENTRI

La distanza tra il baricentro delle masse e quello delle rigidezze si ricava con le relazioni

$$e_x = x_G - x_{CT} \qquad e_y = y_G - y_{CT}$$



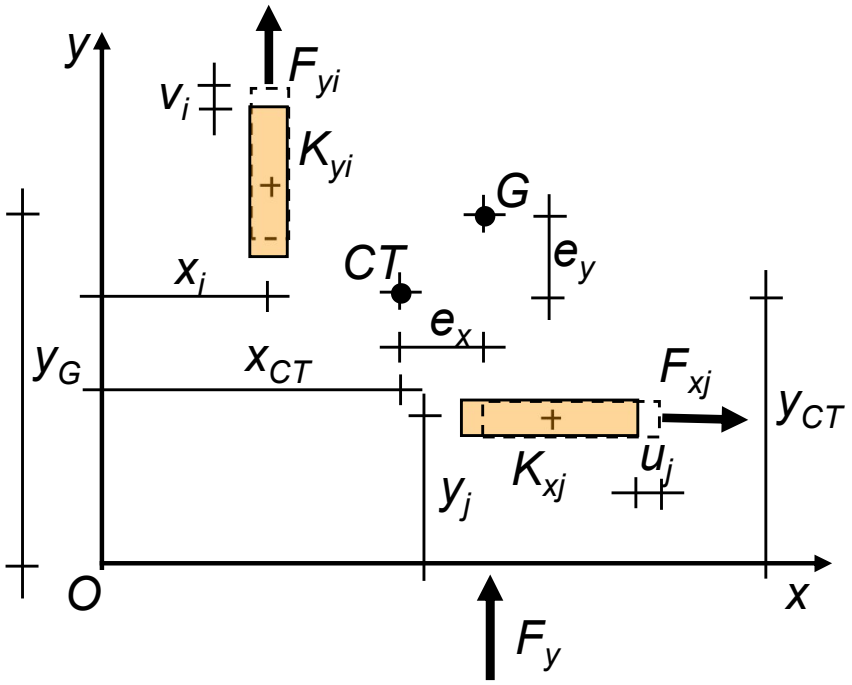
RIPARTIZIONE AZIONI ORIZZONTALI

Nell'ipotesi di solaio indeformabile nel proprio piano sono permesse solo traslazioni e rotazioni rigide attorno al baricentro delle rigidezze

Le forze corrispondenti ad ogni elemento murario possono essere espresse in funzione dello spostamento. Lo spostamento è dovuto alla rototraslazione del piano.

$$F_{yi} = K_{yi} \cdot v_i$$

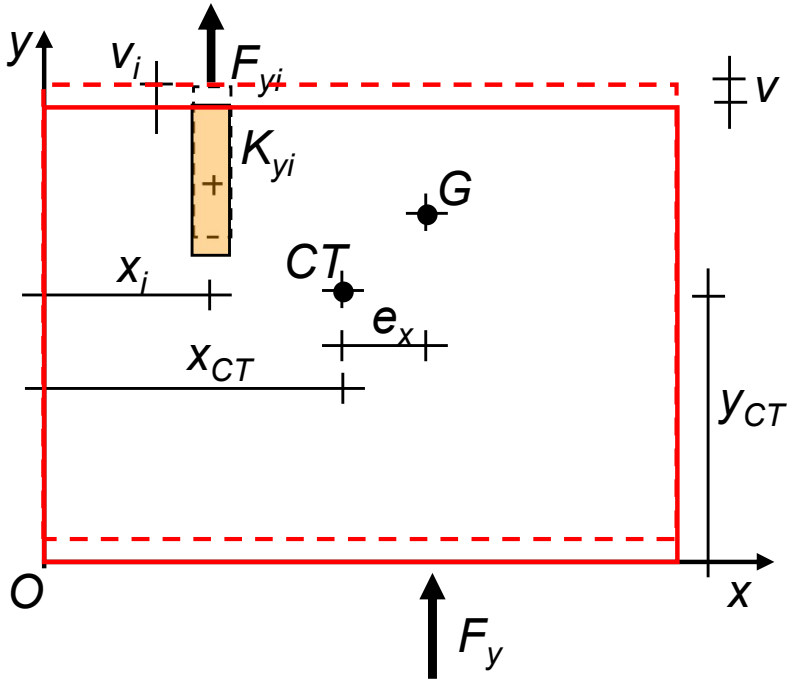
$$F_{xj} = K_{xj} \cdot u_j$$



RIPARTIZIONE AZIONI ORIZZONTALI

Essendo la rigidezza indipendente dallo spostamento, si possono valutare separatamente la quota di forza dovuta alla traslazione e quella dovuta alla rotazione attorno al baricentro delle rigidezze.

- Quota traslazionale (*forza agente in direzione y*)



$$F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{yi}^T$$ **Risultante delle forze**

$$F_{yi}^T = K_{yi} \cdot v_i = K_{yi} \cdot v \qquad v_i = v \quad per\ ogni\ i$$

$$F_y = \sum_{i=1}^{n} K_{yi} \cdot v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{F_y}{\sum_{i=1}^{n} K_{yi}}$$

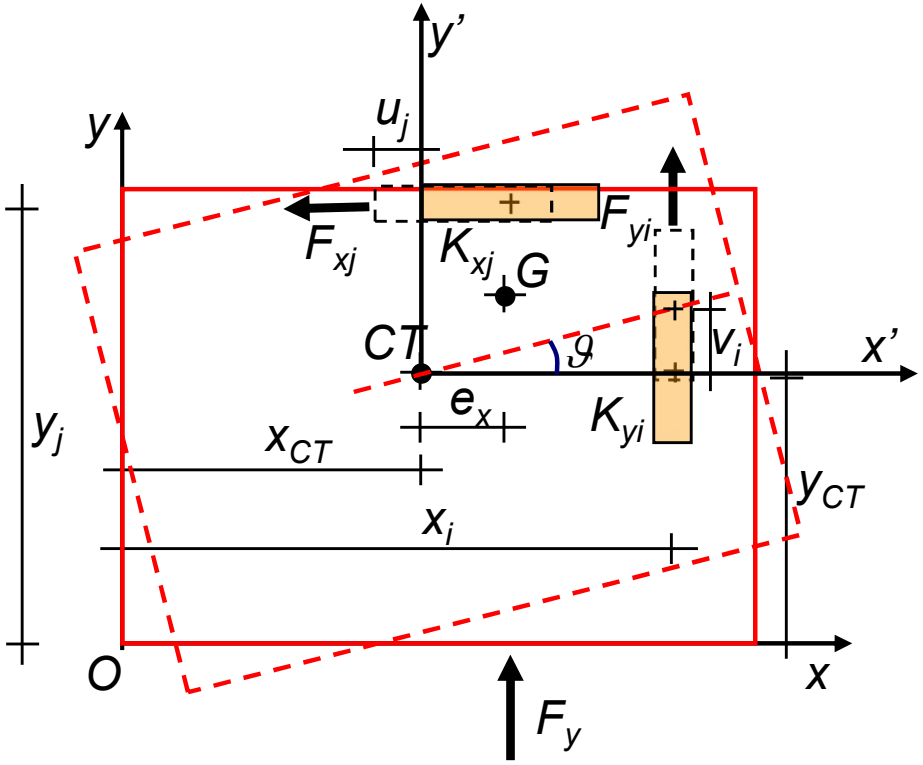
$$F_{yi}^T = \frac{K_{yi}}{\sum_{i=1}^{n} K_{yi}} \cdot F_y$$

RIPARTIZIONE AZIONI ORIZZONTALI

- Quota rotazionale (*forza agente in direzione y*)

Dal teorema di Varignon, il momento di F_y è uguale alla somma dei momenti delle singole forze sugli elementi murari

$$x'_i = x_i - x_{CT} \qquad y'_j = y_j - y_{CT}$$



$$F_y \cdot e_x = \sum_{i=1}^{n} F_{yi}^{\vartheta y} \cdot x'_i - \sum_{j=1}^{n} F_{xj}^{\vartheta y} \cdot y'_j$$

$$F_{yi}^{\vartheta y} = K_{yi} \cdot v_i \qquad v_i = x'_i \cdot \vartheta$$

$$F_{xj}^{\vartheta y} = K_{xj} \cdot u_j \qquad u_j = -y'_j \cdot \vartheta$$

Sostituendo nell'equazione sopra

$$F_y \cdot e_x = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} K_{yi} \cdot x'^2_i + \sum_{j=1}^{n} K_{xj} \cdot y'^2_j \right)}_{} \cdot \vartheta$$

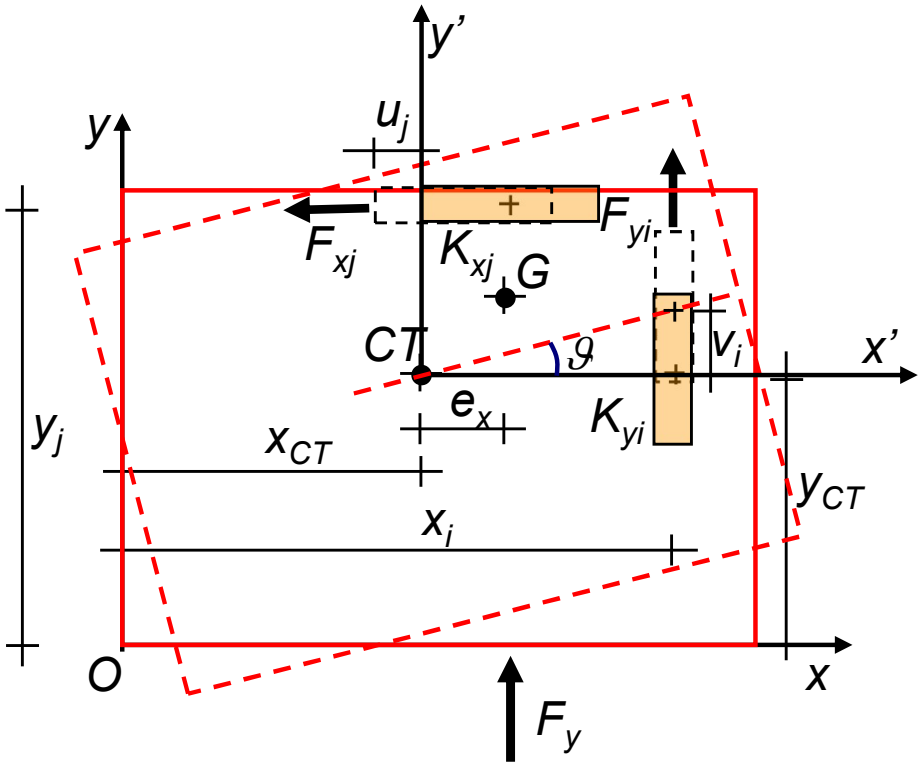
Momento d'inerzia polare rispetto a CT in coordinate locali *(x',y',CT)*

RIPARTIZIONE AZIONI ORIZZONTALI

- Quota rotazionale (*forza agente in direzione y*)

$$I_{CT} = \sum_{i=1}^{n} K_{yi} \cdot x_i^2 + \sum_{j=1}^{n} K_{xj} \cdot y_j^2 - x_{CT}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} K_{yi} - y_{CT}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} K_{xj}$$

Momento d'inerzia polare rispetto a CT in coordinate generali *(x,y,O)*



$$F_{yi}^{\vartheta y} = \frac{K_{yi} \cdot x'_i}{I_{CT}} \cdot F_y \cdot e_x$$

$$F_{xj}^{\vartheta y} = -\frac{K_{xj} \cdot y'_j}{I_{CT}} \cdot F_y \cdot e_x$$

RIPARTIZIONE AZIONI ORIZZONTALI

Analogamente per forza agente in direzione x.

- Quota traslazionale (*forza agente in direzione x***)**

$$F_{xj}^{T} = \frac{K_{xj}}{\sum_{j=1}^{n} K_{xj}} \cdot F_x$$

- Quota rotazionale (*forza agente in direzione x***)**

$$F_{yi}^{\vartheta x} = -\frac{K_{yi} \cdot x'_i}{I_{CT}} \cdot F_x \cdot e_y$$

$$F_{xj}^{\vartheta x} = \frac{K_{xj} \cdot y'_j}{I_{CT}} \cdot F_x \cdot e_y$$

RIPARTIZIONE AZIONI ORIZZONTALI

Sommando i contributi rotazionale e traslazionale si ottiene:

- *forza agente in direzione y*

$$F_{yi} = F_{yi}^{T} + F_{yi}^{\vartheta y} = \left(\frac{K_{yi}}{\sum_{i=1}^{n} K_{yi}} + \frac{K_{yi} \cdot x'_i}{I_{CT}} \cdot e_x \right) \cdot F_y$$

$$F_{xj} = F_{xj}^{\vartheta y} = -\frac{K_{xj} \cdot y'_j}{I_{CT}} \cdot F_y \cdot e_x$$

- *forza agente in direzione x*

$$F_{xj} = F_{xj}^{T} + F_{xj}^{\vartheta x} = \left(\frac{K_{xj}}{\sum_{j=1}^{n} K_{xj}} + \frac{K_{xj} \cdot y'_j}{I_{CT}} \cdot e_y \right) \cdot F_x$$

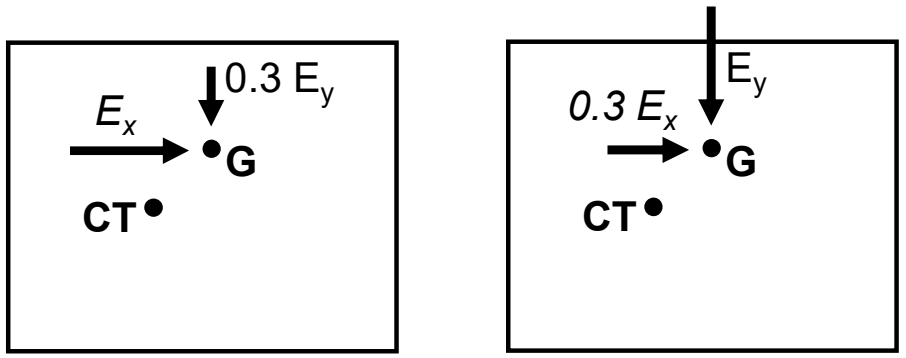
$$F_{yi} = F_{yi}^{\vartheta x} = -\frac{K_{yi} \cdot x'_i}{I_{CT}} \cdot F_x \cdot e_y$$

COMBINAZIONE DELLE COMPONENTI DELL'AZIONE SISMICA

Le componenti dell'azione sismica orizzontali e verticali vanno considerate agenti simultaneamente. In generale l'azione sismica verticale non è necessario venga considerata.

I valori massimi della risposta ottenuti da ciascuna delle due azioni orizzontali applicate separatamente vanno combinati ad esempio sommando ai massimi ottenuti per l'azione applicata in una direzione il 30% dei massimi ottenuti per l'azione applicata nell'altra direzione

$$E = \max \begin{cases} E_x + 0.30\,E_y \\ 0.30\,E_x + E_y \end{cases}$$



E' quindi necessario eseguire due analisi: una con l'azione sismica agente in direzione x ed una con l'azione agente in direzione y

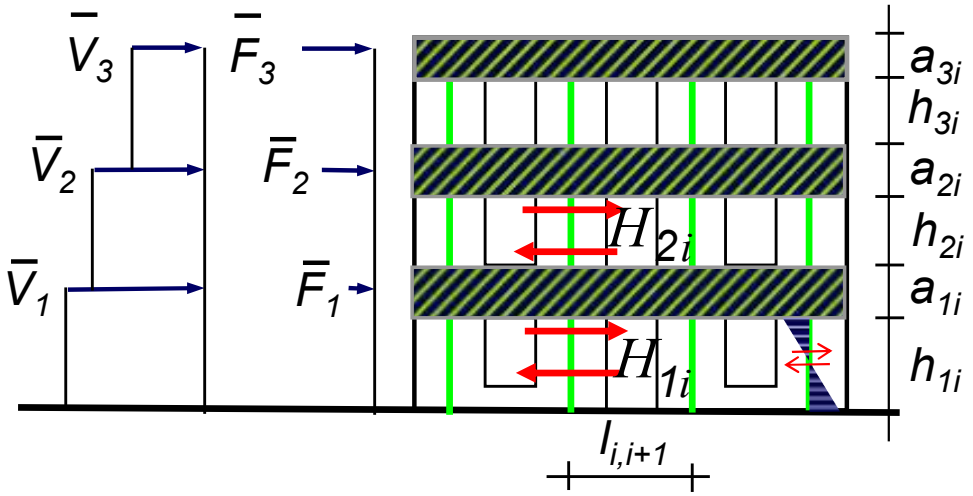
SOLLECITAZIONI NEI MASCHI

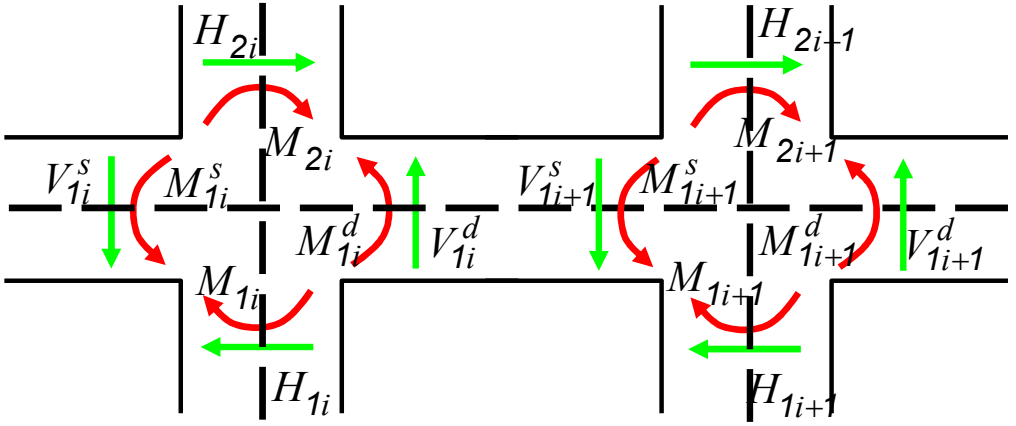
Una volta calcolata la quota parte del tagliante di piano che si prende il generico maschio *i-esimo (al piano j)*

$$H_{ji} = F_{ji}$$

Noto il taglio sul maschio si ricava il momento agli estremi con le relazioni

$$M_{ji} = \frac{H_{ji}\, h_{ji}}{2}$$



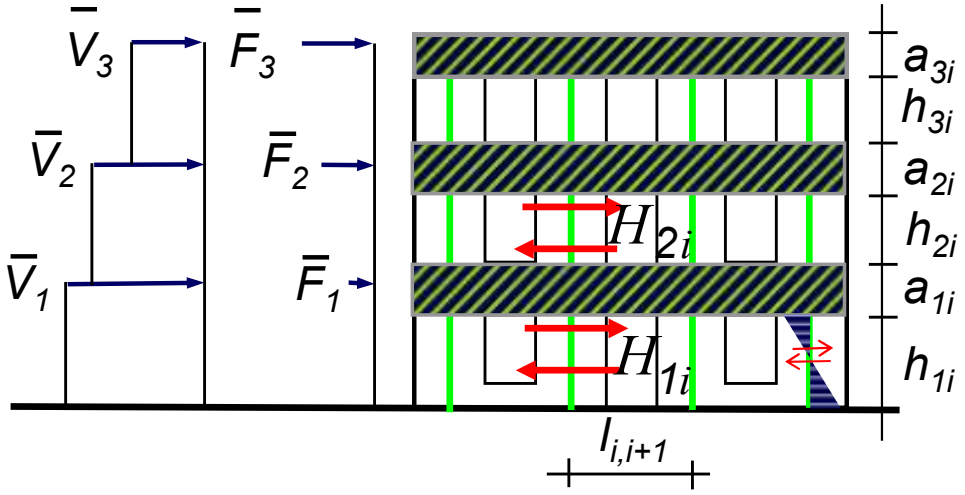


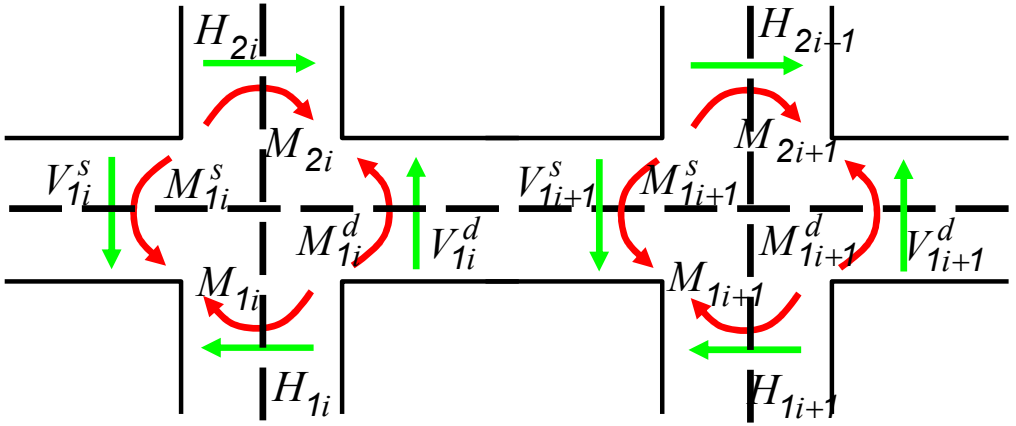
SOLLECITAZIONI NELLE TRAVERSE

Noto il taglio agente sui maschi murari si può procedere al calcolo delle sollecitazioni nelle fasce di piano (*traverse sopra le aperture*)

Queste infatti sono state assunte infinitamente rigide, ma non possono essere considerate anche infinitamente resistenti.

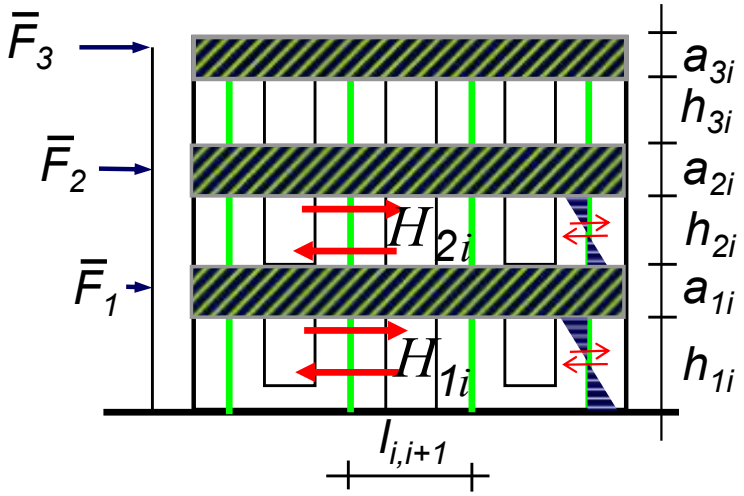
I tagli e momenti nelle fasce di piano si possono ricavare scrivendo l'equilibrio dei nodi ed ipotizzando che, nel caso di nodo intermedio, siano uguali i momenti a destra ed a sinistra del nodo





SOLLECITAZIONI NELLE TRAVERSE

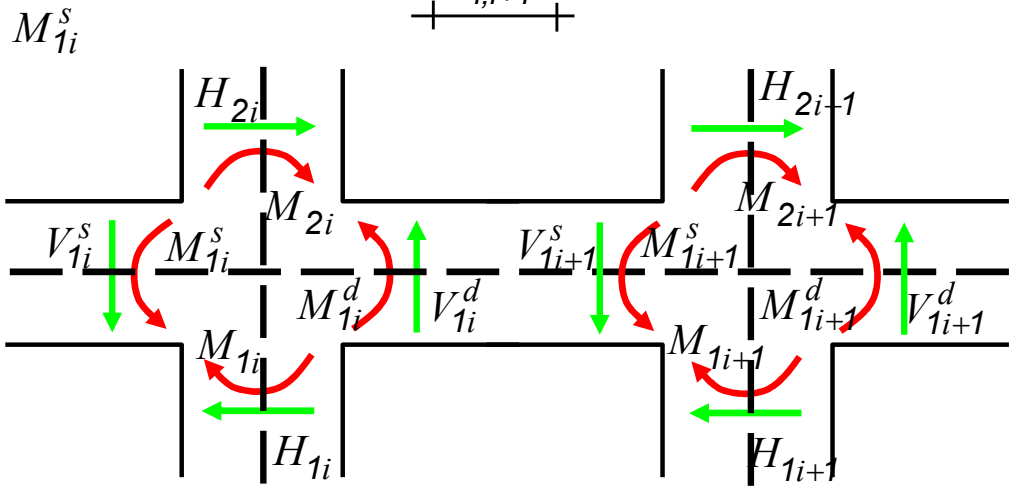
I tagli e momenti nelle fasce di piano si possono ricavare scrivendo l'equilibrio dei nodi ed ipotizzando che siano uguali i momenti a destra ed a sinistra del nodo nel caso di nodo intermedio



Indicando con $\bar{M}^d_{1i}$ il momento nel nodo all'estremità della fascia si ha

$$\bar{M}^d_{1i} = \alpha_s \frac{H_{1i}(h_{1i}+a_{1i}) + H_{2i}(h_{2i}+a_{1i})}{2}$$

$$\bar{M}^s_{1i} = \alpha_d \frac{H_{1i}(h_{1i}+a_{1i}) + H_{2i}(h_{2i}+a_{1i})}{2}$$



$$V^d_{1i} = V^s_{1i+1} = \frac{\bar{M}^d_{1i} + \bar{M}^s_{1i+1}}{l_{i,i+1}}$$

$$M^d_{1i} = \bar{M}^d_{1i} - \frac{V^d_{1i}\, b_{1i}}{2}$$

$$M^s_{1i+1} = \bar{M}^s_{1i+1} - \frac{V^s_{1i+1}\, b_{1i+1}}{2}$$

$\alpha_{s,d} = 1$

Nodi di estremità

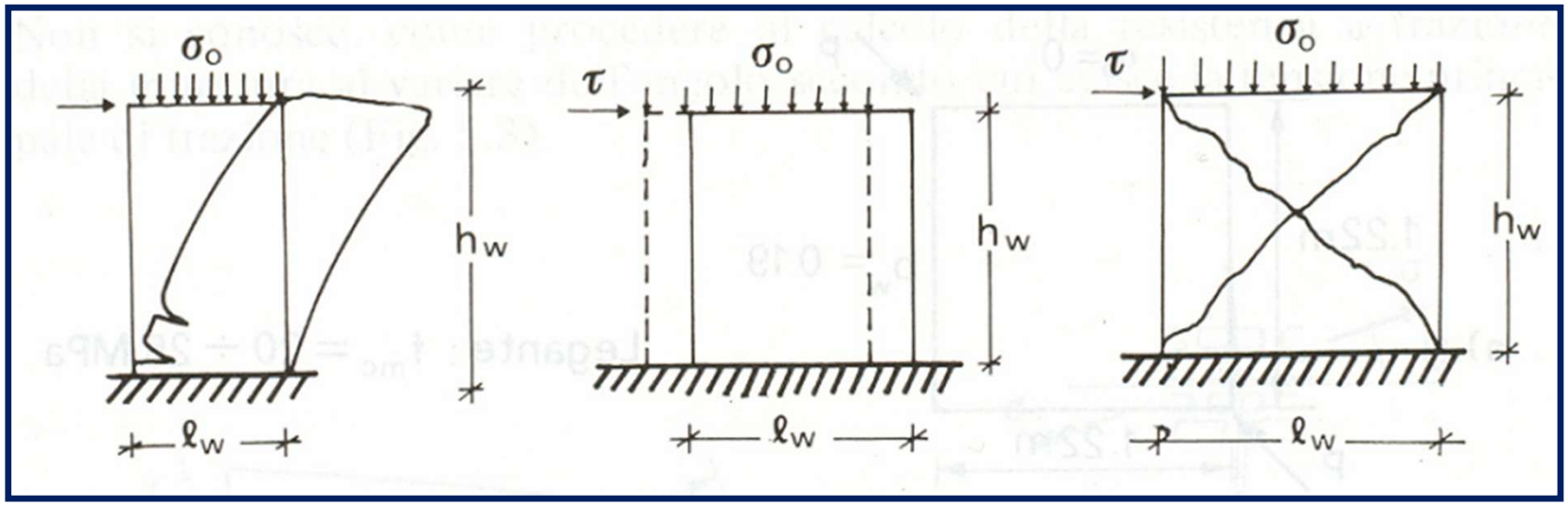
$\alpha_{s,d} = 0.5$

Nodi intermedi

COMPORTAMENTO NEL PIANO DEI MASCHI

Le modalità di rottura di un maschio murario soggetto a pressoflessione e taglio dipendono sia dalle sue dimensioni che dal carico applicato:

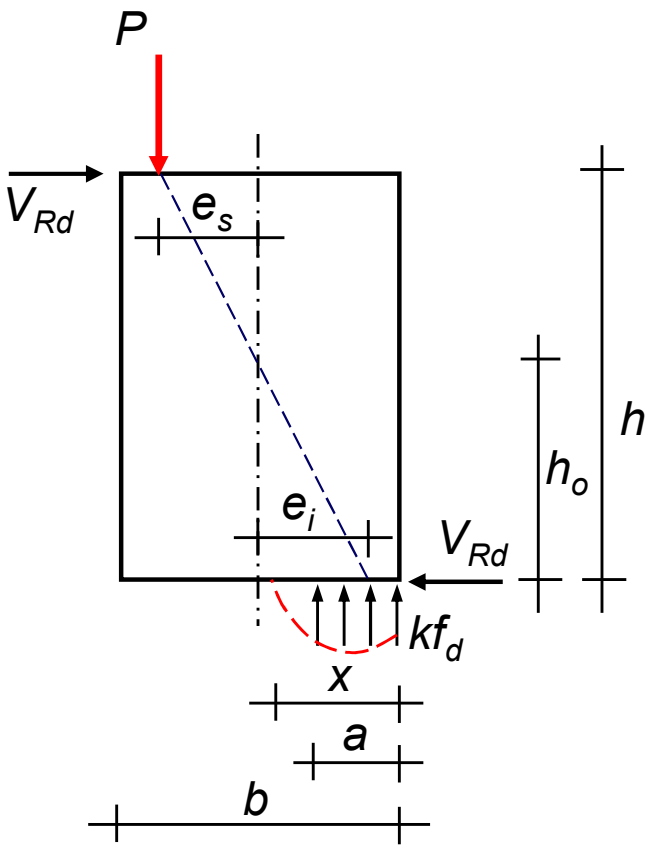
- **Rottura per pressoflessione** *(si verifica per valori di h/b>2)*
- **Rottura per scorrimento** (*si verifica per bassi valori dell'azione assiale*)
- **Rottura per fessurazione diagonale** *(si verifica per valori di h/b<1.5)*



VERIFICA DI RESISTENZA MASCHI

Nel caso di edifici con non più di due piani è possibile trascurare la variazione di sforzo normale nei maschi dovuta alle azioni sismiche

Capacità portante a pressoflessione



$$\begin{cases} M_{Rd} = kf_d\, a\, t\,(\dfrac{b}{2} - \dfrac{a}{2}) \\ P = kf_d\, a\, t \end{cases} \Rightarrow a = \frac{P}{kf_d\, t}$$

$$a = 0.8\,x$$

$$\sigma_o = \frac{P}{b\,t}$$

$$k = 0.85$$

Sostituendo *a* e σ_o nella prima

$$M_{Rd} = \frac{\sigma_o\, b^2 t}{2}\left(1 - \frac{\sigma_o}{kf_d}\right)$$

Nota la posizione di annullamento del momento h_o

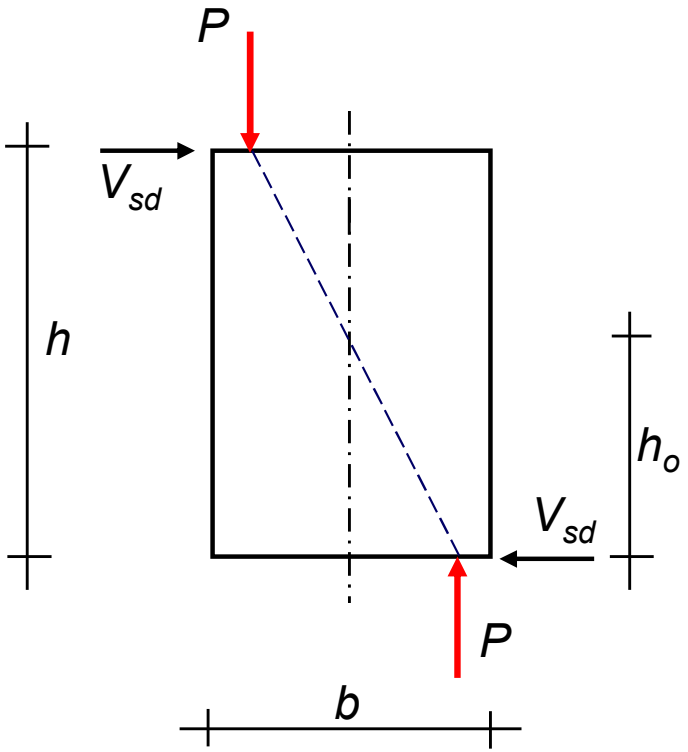
$$V_{Rd}^{p} = \frac{\sigma_o\, b^2 t}{2\,h_o}\left(1 - \frac{\sigma_o}{kf_d}\right)$$

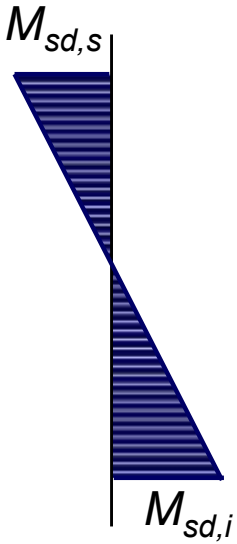
VERIFICA DI RESISTENZA MASCHI

I valori di momento ottenuti dall'analisi alle estremità del maschio devono risultare non superiori al valore del momento resistente di calcolo

Verifica a pressoflessione

$$M_{Rd} = \frac{\sigma_o \, b^2 t}{2}\left(1 - \frac{\sigma_o}{k f_d}\right) \qquad f_d = \frac{f_k}{\gamma_M}$$





$$\max\left(M_{sd,i}, M_{sd,s}\right) \le M_{Rd}$$

$$V_{sd} \le V_{Rd}^{p}$$

VERIFICA DI RESISTENZA MASCHI

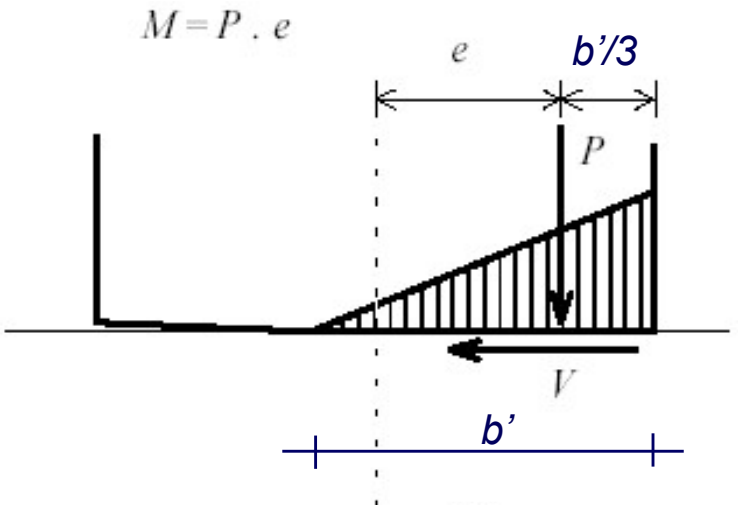
Capacità portante a taglio (*Rottura per scorrimento*)

$$f_{vk} = f_{vok} + 0.4\,\sigma \qquad f_{vd} = f_{vk}/\gamma_M$$

Le più recenti normative fanno riferimento a questo modello valutando la resistenza della muratura come prodotto della resistenza unitaria per l'area reagente del muro (*zona compressa*)

$$b' = \left(\frac{3}{2} - \frac{3e}{b}\right) b \qquad e = \frac{V\,h_o}{P} \qquad \sigma_o = \frac{P}{b\,t}$$

$$V = f_{vd}\,b'\,t = \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{3Vh_o}{Pb}\right) f_{vko} + 0.4\,\sigma_o\right] \frac{b\,t}{\gamma_M}$$



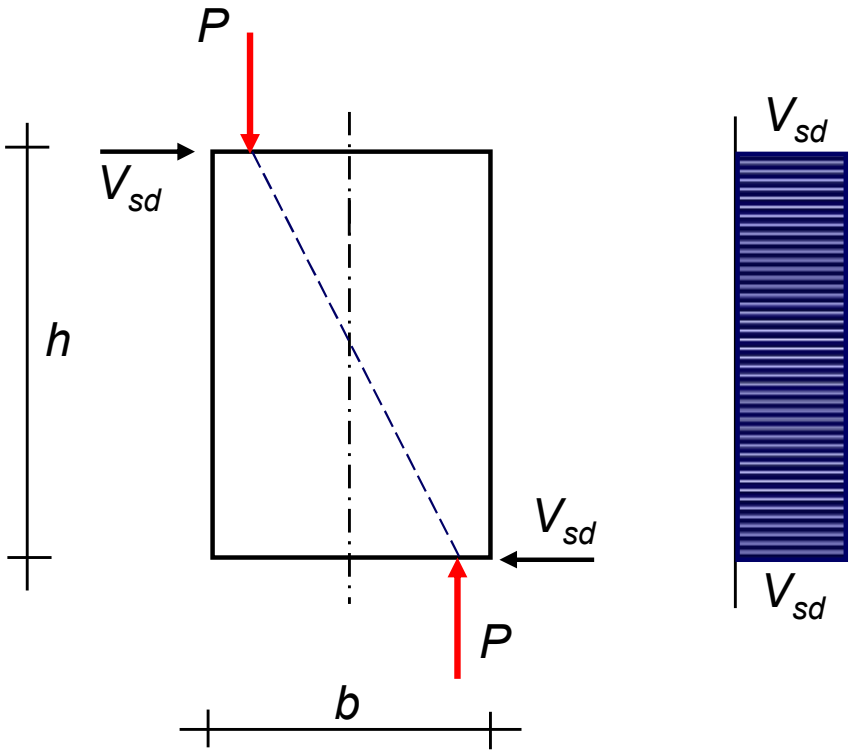
$$V_{Rd}^{s} = \frac{1.5\,f_{vko} + 0.4\,\sigma_o}{1 + \dfrac{3\,h_o}{b\,\sigma_o}\dfrac{f_{vko}}{\gamma_M}} \frac{b\,t}{\gamma_M}$$

per $e \le \dfrac{b}{6}$ $\quad b' = b$ $\quad f_{vd} = \dfrac{f_{vk}}{\gamma_M}$

VERIFICA DI RESISTENZA MASCHI

I valori massimi del taglio nel maschio ottenuti dall'analisi devono risultare non superiori al valore del taglio resistente di calcolo

Verifica a taglio



$$V_{Rd}^{s} = \frac{1.5\, f_{vko} + 0.4\, \sigma_o}{1 + \dfrac{3\, h_o}{b\, \sigma_o}\dfrac{f_{vko}}{\gamma_M}} \frac{b\, t}{\gamma_M}$$

$$V_{sd} \le V_{Rd}^{s}$$

VERIFICA DI RESISTENZA MASCHI

I valori massimi del taglio nel maschio ottenuti dall'analisi devono risultare non superiori al valore del taglio resistente di calcolo

<u>Verifica a taglio</u> (*rottura per fessurazione diagonale*)

$$V_{Rd}^{f} = \frac{1.5\, f_{vko}\, b\, t}{\xi\, \gamma_M} \sqrt{1 + \frac{\sigma_o}{1.5\, f_{vko}}}$$

Turnsek e Cacovic 1971

$$\xi = 1.0 \qquad per \quad h/b \le 1.0$$

$$\xi = h/b \qquad per \quad 1.0 < h/b \le 1.5$$

$$\xi = 1.5 \qquad per \quad h/b > 1.5$$

$$V_{sd} \le V_{Rd}^{f}$$

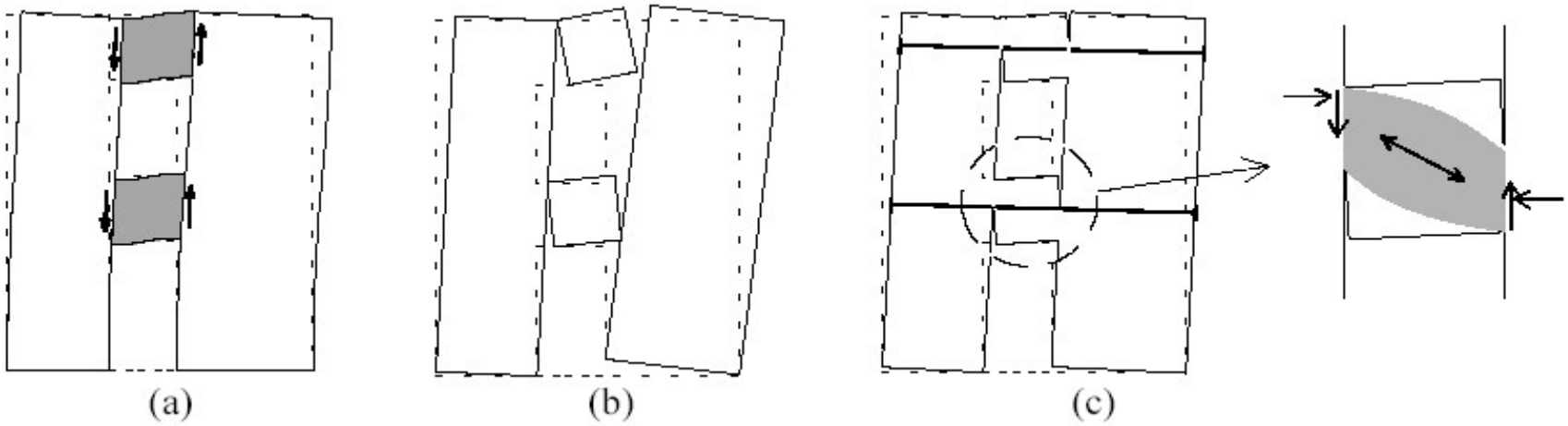
VERIFICA DI RESISTENZA TRAVI IN MURATURA

Dall'analisi risulta che le fasce sono soggette a flessione e taglio

Ma in assenza di compressione il momento resistente ed il taglio resistente risultano nulli

$$M_{Rd} = \frac{\sigma_o b^2 t}{2}\left(1 - \frac{\sigma_o}{k f_d}\right) \quad \rightarrow \quad \textbf{se } P=0 \quad \rightarrow \quad M_{Rd}=0 \qquad \sigma_o = \frac{P}{bt}$$

$$V_{Rd}^{s} = \frac{1.5\, f_{vko} + 0.4\,\sigma_o}{1 + \dfrac{3\,h_o}{b\,\sigma_o}\dfrac{f_{vko}}{\gamma_M}}\frac{bt}{\gamma_M} \quad \rightarrow \quad \textbf{se } P=0 \quad \rightarrow \quad V_{Rd}=0$$



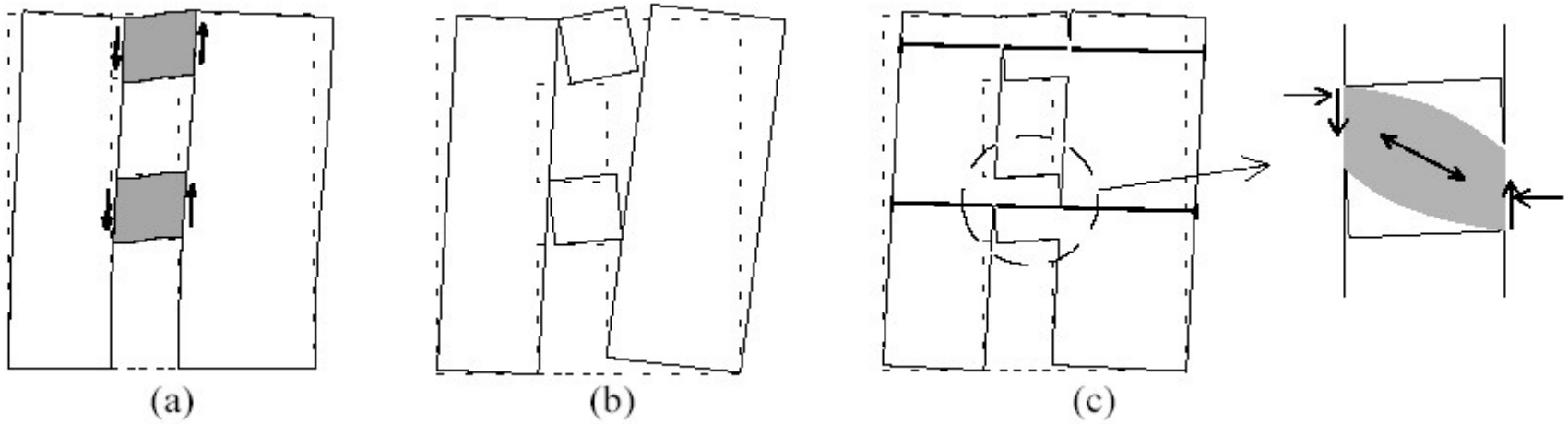
VERIFICA DI RESISTENZA TRAVI IN MURATURA

Le traverse tendono a ruotare rigidamente e ad allontanare fra loro i montanti verticali stravolgendo completamente il regime statico

E' quindi indispensabile la presenza di tiranti orizzontali in grado di contrastare il "rocking" delle traverse

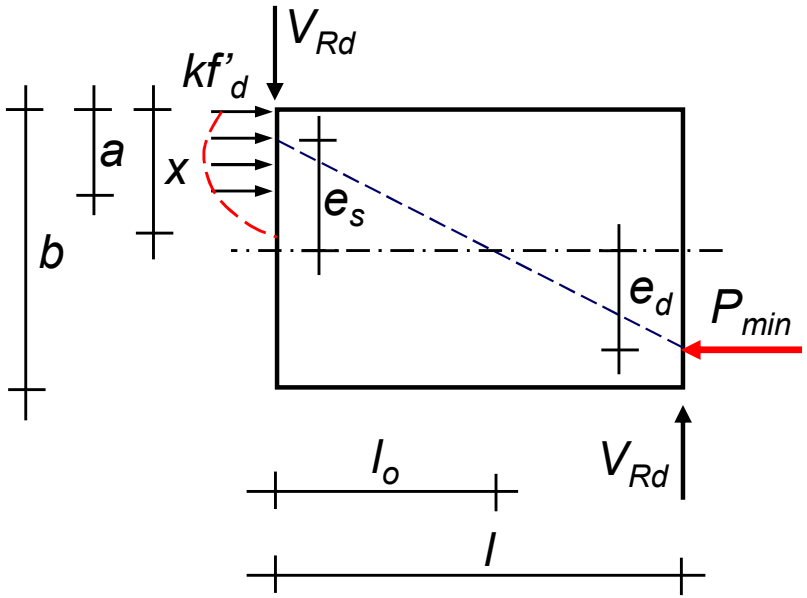
La capacità portante delle traverse per flessione e taglio è quindi legata alle dimensioni del tirante orizzontale (*cordoli, tiranti, ecc.*)

La presenza dei tiranti consente di far affidamento su un meccanismo resistente in condizioni limite ultime a puntone diagonale come nei maschi



VERIFICA A FLESSIONE DELLE TRAVERSE

Si determina quindi la forza assiale minima che deve essere garantita dal tirante orizzontale affinché la traversa sia in grado di resistere al momento agente massimo di calcolo M_{sd}



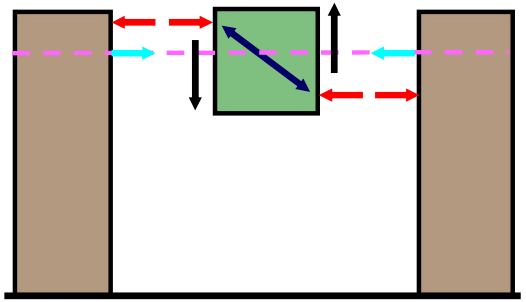
$$\begin{cases} M_{sd} = kf_d' \, a\, t \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right) \\ P_{\min} = kf_d' \, a\, t \end{cases} \Rightarrow a = \frac{P_{\min}}{kf_d' \, t}$$

$$k = 0.85$$

$$a = 0.8\,x$$

Sostituendo a nella prima

$$M_{sd} = \frac{P_{\min}}{2}\left(b - \frac{P_{\min}}{kf_d' \, t}\right)$$



Risolvendo rispetto a P_{min}

$$P_{\min} = \frac{kf_d' \, bt}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8M_{sd}}{kf_d' \, b^2 t}}\right)$$

E' necessario che il tirante, cordolo o altro elemento orizzontale sia in grado di contrastare questa forza

f_d' è la resistenza a compressione di calcolo della muratura in direzione orizzontale

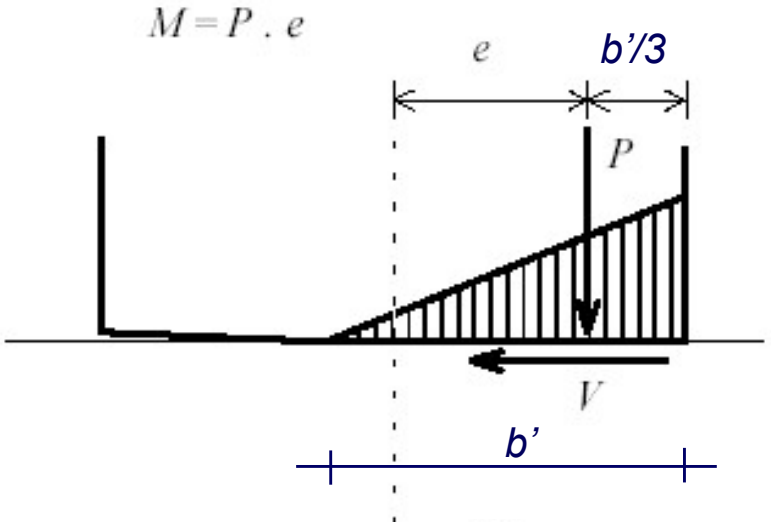
VERIFICA A TAGLIO TRAVERSE

Si opera come per il maschio utilizzando come forza assiale P_{min}

Rottura per scorrimento

$$V_{Rd}^{s} = \frac{1.5\, f_{vko} + 0.4\, \sigma_o}{1 + \dfrac{3 l_o}{b \sigma_o} \dfrac{f_{vko}}{\gamma_M}} \frac{b t}{\gamma_M}$$

$$\sigma_o = \frac{P_{\min}}{b t}$$



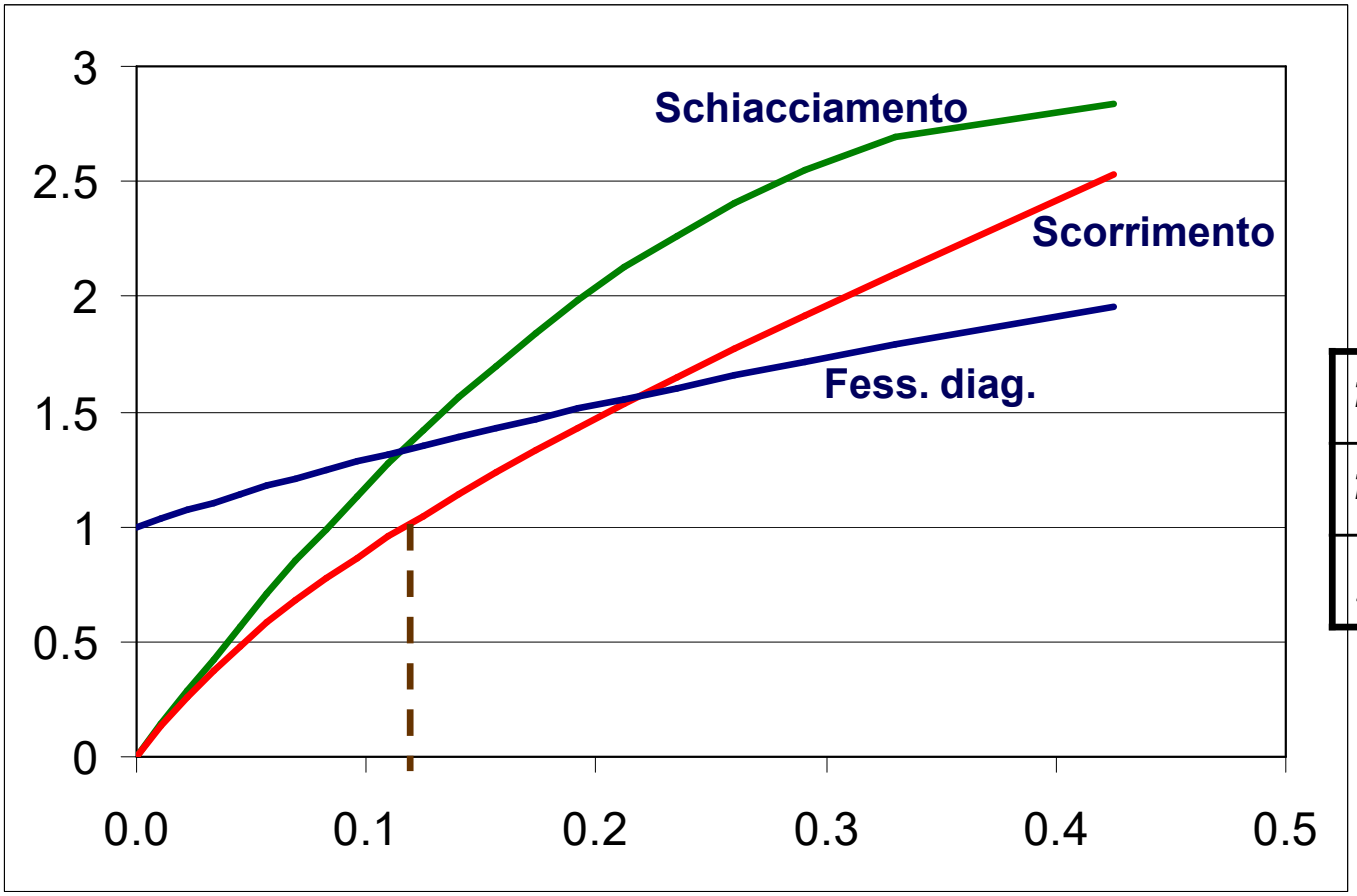
Rottura per fessurazione diagonale

$$V_{Rd}^{f} = \frac{1.5\, f_{vko}\, b t}{\xi\, \gamma_M} \sqrt{1 + \frac{\sigma_o}{1.5\, f_{vko}}}$$

$$V_{sd} \le \min \begin{cases} V_{Rd}^{s} \\ V_{Rd}^{f} \end{cases}$$

CONFRONTO RESISTENZA FASCE

Si evidenzia come varia la resistenza a taglio delle fasce al variare di P_{min}



f' (Mpa)	4.0
f_{vko} (Mpa)	0.2
γ_M	2.0

VERIFICA A TAGLIO TRAVERSE

In presenza di cordolo di piano o architrave resistente a flessione ed efficacemente ammorsato alle estremità, la resistenza a taglio è

Rottura per scorrimento

$$V_{Rd}^{s} = \frac{f_{vko}}{\gamma_M} \cdot b\,t$$

Rottura per pressoflessione

$$M_{Rd} = \frac{H_p\, b}{2}\left(1 - \frac{H_p}{k f_d^{'}\, b\, t}\right)$$

$$H_p = min\begin{cases} \text{resist. a trazione elem. teso} \\ 0.4\, f_d^{'}\, b\, t \end{cases}$$

$$V_{Rd}^{f} = \frac{2\, M_{Rd}}{l}$$

$$V_{sd} \le \min\begin{cases} V_{Rd}^{s} \\ V_{Rd}^{f} \end{cases}$$

$f_d^{'}$ **resist. a compr. muratura in direzione orizzontale**

VERIFICHE SLD

Un'analisi elastica lineare della struttura va condotta applicando le azioni sismiche relative allo Stato Limite di Danno per determinare gli spostamenti di piano delle singole pareti s_i

Bisogna confrontare che gli spostamenti di interpiano di ogni parete risultino inferiori ai valori limite imposti dalla normativa

$$s_{i+1} - s_i \leq d_r$$

$d_r < 0.002\,h$ **per muratura ordinaria**

$d_r < 0.003\,h$ **per muratura armata**

Combinazione di carico per lo Stato Limite di Danno

$$E_d = E + G_1 + G_2 + P + \sum_i \left(\psi_{2i}\, Q_{ki}\right)$$

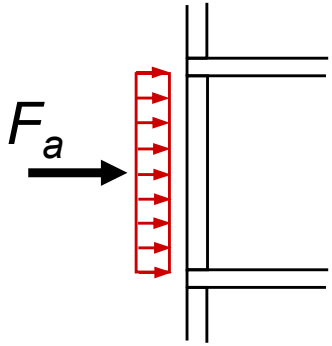
E	*azione sismica per lo stato limite in esame*
G_1, G_2	*carichi permanenti al loro valore caratteristico (pesi propri)*
P	*valore caratteristico della precompressione, a cadute avvenute*
ψ_{2i}	*coeff. di combinazione per valore quasi-permanente di* Q_i
Q_{ki}	*valore caratteristico dell'azione variabile* Q_i

AZIONI SISMICHE FUORI PIANO

Le pareti in muratura sono eccitate dal sisma anche in direzione perpendicolare al proprio piano sollecitandole a pressoflessione fuori piano.

L'effetto dell'azione sismica può essere valutato considerando una forza orizzontale uniformemente distribuita, di risultante F_a

$$F_a = \frac{W_a S_a}{q_a}$$



W_a **è il peso dell'elemento**

q_a **è il fattore di struttura della parete**

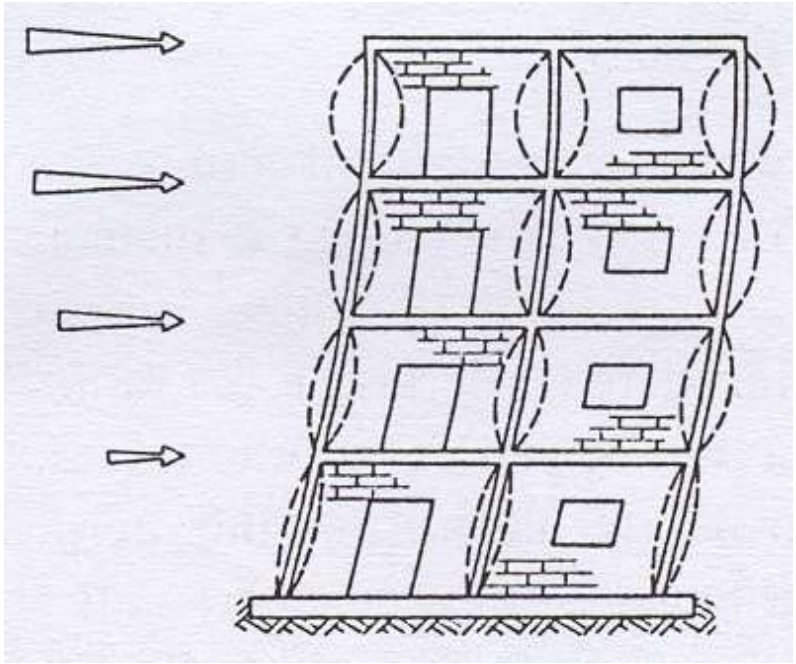
- *pari a 1 per elementi aggettanti a mensola (camini, parapetti, ecc.)*
- *pari a 3 negli altri casi (pareti collegate ai solai a entrambi gli estremi)*

S_a **è un coefficiente di amplificazione**

AZIONI SISMICHE FUORI PIANO

Il coefficiente di amplificazione è dato dalla

$$S_a = \frac{S\,a_g}{g}\left[1.5\left(1 + z/H\right) - 0.5\right]$$



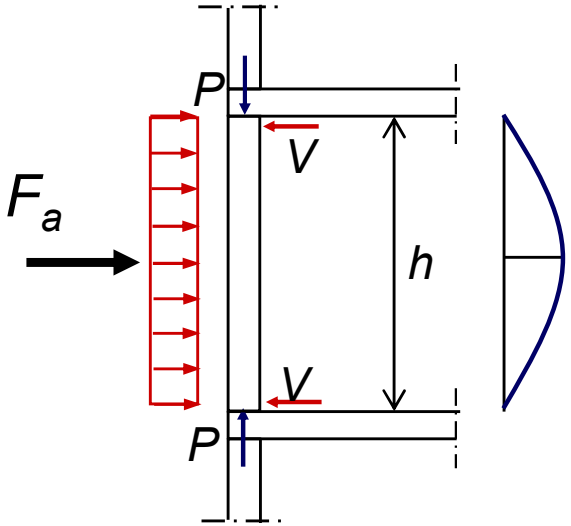
Sa_g è l'accelerazione di progetto al terreno

H è l'altezza della struttura

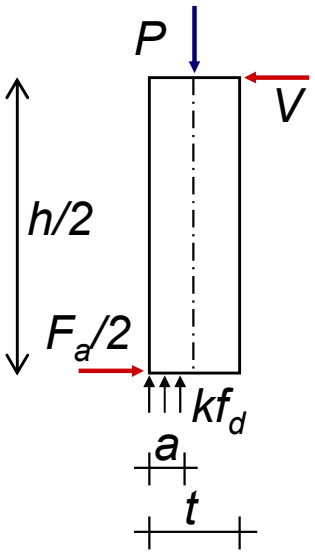
z è l'altezza del baricentro dell'elemento rispetto alla fondazione

VERIFICA PARETI FUORI PIANO

Il momento di collasso della parete per azioni perpendicolari al piano si calcola analogamente al caso di azioni parallele al piano



$M_{max}=F_a h/8$



$$M_{Rd} = \frac{\sigma_o\, bt^2}{2}\left(1-\frac{\sigma_o}{kf_d}\right)$$

$$\sigma_o = \frac{P}{bt} \qquad k = 0.85$$

$$M_{sd,\max} \le M_{Rd}$$