# Capitolo 3

# Il Rinascimento

## 3.1 Panoramica

Dal punto di vista storico e culturale questo periodo si svolge approssimativamente nei secoli XV e XVI.

Alcuni avvenimenti storici segnano la fine del Medioevo e l'inizio dell'Età rinascimentale in Europa (vedi Sezione 2.1 e fine del Capitolo 2):

- Peste Nera (1347-1352)
- invenzione della stampa (1447)
- caduta di Costantinopoli (1453).

Quest'ultimo evento non segna una frattura netta con l'Oriente, infatti molti studiosi bizantini si rifugiano in Italia portando con sé manoscritti di opere greche.

Dopo questi fatti, inizia in Europa una lenta ripresa intorno alla metà del XV secolo.

Convenzionalmente, si possono scegliere come date di inizio e fine del Rinascimento in matematica:

1436: nascita del Regiomontano
1545: pubblicazione di *Ars Magna* di Cardano.

Si noti che per questo periodo è opportuna una trattazione a livello nazionale sia perché le comunicazioni dell'epoca erano limitate sia perché si inizia a scrivere in volgare.

## 3.2 Il Quattrocento

Inizialmente non sono molte le opere di matematica che vengono stampate: soprattutto traduzioni latine di opere arabe di algebra e aritmetica. Anche la traduzione di Archimede da parte di Willem van Moerbeke (1215 – 1286), già citata nel Paragrafo 2.4.5, non riscuote molto successo. Gradualmente però si inizia a tradurre anche le opere greche antiche che, dopo poco, superano in numero quelle arabe e latino-medievali. Tuttavia queste traduzioni non si diffondono ampiamente ma restano all'interno di una cerchia ristretta.

I maggiori centri europei del XV secolo relativi alla matematica si trovano in Italia e in Germania.

**Nicola Cusano** (1401-1464). Umanista affascinato dalle antichità e amante delle misurazioni (che erano state il punto debole della scolastica medievale). Azzarda una "quadratura del cerchio" che però risulta sbagliata.



### 3.2.1 Il Regiomontano

**Johann Müller** detto **Regiomontano** (Könisberg 1436-1476) è il matematico più influente del XV secolo. Studia a Vienna, Lipsia, Roma (dove impara il greco) a seguito del cardinal Bessarione di cui è assistente. Ha l'ambizione di *raccogliere, tradurre, pubblicare* le opere antiche. Infatti, tornato in Germania, fonda a Norimberga una stamperia e un osservatorio. Muore giovane a Roma.



- Stila una lista di libri che avrebbe voluto stampare: indica che indirizzo avrebbe dato alla matematica se non fosse scomparso prematuramente.

- Tra i suoi interessi, c'è l'astronomia: vuole tradurre e stampare l'*Almagesto*, ma cerca il manoscritto originale non volendo ristampare una traduzione dall'arabo. Alcuni autori sostengono che se fosse vissuto più a lungo avrebbe forse anticipato Copernico.

- La sua opera (postuma) *De triangulis omnimodis* è un'esposizione sistematica di trigonometria che, grazie a lui, nasce così come ramo a sé stante della matematica, anche se Fibonacci e gli arabi ne avevano trattato alcuni concetti. La nozione di tangente è trattata nell'altra opera *Tabulae directionum*, dove sono incluse nuove tavole, dopo numerose revisioni, di quelle tolemaiche. Per evitare le frazioni usa, come i suoi contemporanei, raggi enormi (10.000.000). Quindi ottiene $\tan 89^\circ = 5.729.796$.

- Lo studio dei triangoli lo porta a considerare problemi geometrici, del tipo euclideo. Ma non li esprime in modo generale: sono sempre numerici anche quando vuole esprimere proprietà generali.

- Algebrizza problemi geometrici ma in modo discorsivo, cioè usa ancora l'*algebra retorica*, senza utilizzare le abbreviazioni di Diofanto. Questo, in qualche modo, rallenterà i progressi dell'algebra rinascimentale.

Per il suo amore per i classici, per la sua curiosità verso l'astronomia, la trigonometria e l'algebra, Regiomontano è un vero "uomo rinascimentale".

### 3.2.2 La prospettiva

Lo studio della prospettiva influenza in modo profondo l'arte rinascimentale, con Filippo Brunelleschi (1377 – 1446) e soprattutto con **Leon Battista Alberti** (Genova, 1404 – Roma, 1472).




Questi è un architetto, scrittore, matematico, umanista, crittografo, linguista, filosofo e musicologo italiano: una delle figure artistiche più poliedriche del Rinascimento.

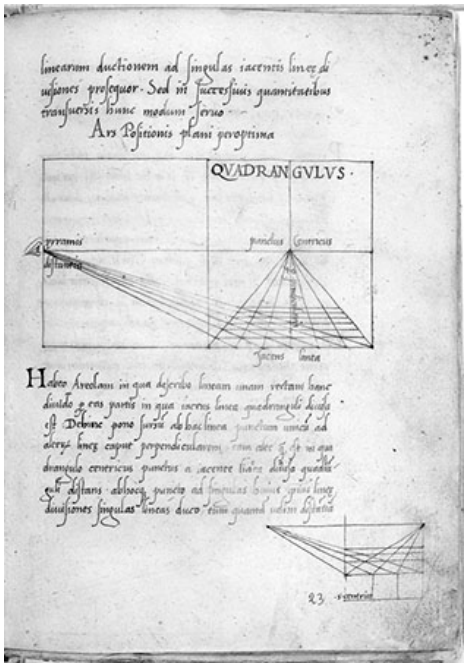
Il *De pictura* è un trattato sulla pittura e, secondo alcuni recenti studi, è redatto dapprima in latino, nel 1435, dedicato a Filippo Brunelleschi, e successivamente in volgare, arricchendolo di nuove riflessioni, di correzioni di precedenti errori e di chiarimenti.

Con questo trattato Alberti influenza sul piano teorico non solo il Rinascimento italiano (Leonardo, Piero della Francesca ecc.) ma tutto quanto si sarebbe detto sulla pittura sino ai nostri giorni.

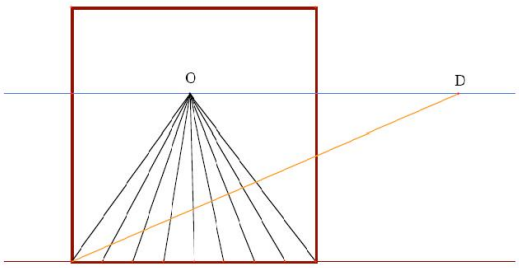
Il trattato è organizzato in tre libri.

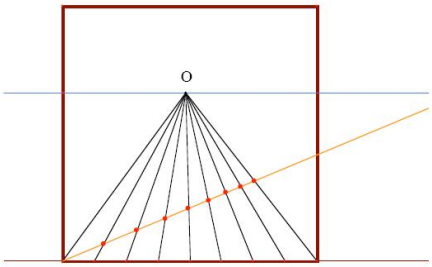
Il primo libro tratta della riduzione bidimensionale della realtà tridimensionale e contiene una delle prime trattazioni della prospettiva lineare geometrica, messa a punto verso il **1416**, dal **Brunelleschi**, che viene ampiamente accreditato della scoperta: l'Alberti gli dedica l'intera opera.

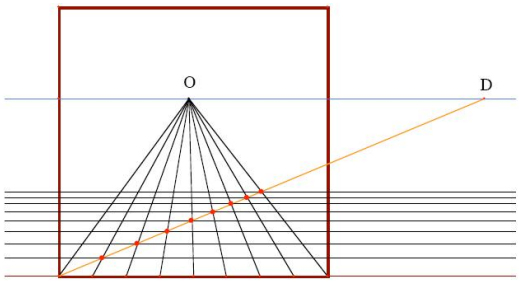
La tecnica brunelleschiana consisteva essenzialmente nel dividere il campo visivo entro un reticolo, con il contenuto dei singoli campi che veniva poi opportunamente proiettato sul dipinto tramite una costruzione geometrica. Ciò necessitava la determinazione di un punto di vista ottimale dello spettatore e solo se si osservava il dipinto dalla distanza prevista si otteneva una visione ottimale. Alberti rende il metodo più flessibile, pensando la rappresentazione pittorica come una sezione della piramide ottica, e il punto di osservazione collegato al punto di fuga collocato sulla linea dell'orizzonte. Al punto di fuga convergono tutte le linee perpendicolari al piano del dipinto.

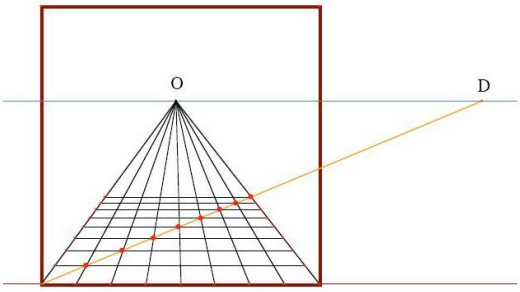



Ecco la procedura:



### 3.2.3 Il Quattrocento in Francia

Anche se i maggiori matematici nascono in Italia e Germania, una figura importante viene dalla Francia: **Nicolas Chuquet** (1445 - 1488).

• Pubblica nel **1484** il trattato *Triparty en la science des nombres*, uno dei primi testi di aritmetica e algebra.

- Cita solo autori latini e forse conosce l'opera di Fibonacci.

- Descrive operazioni aritmetiche fra razionali col sistema indo-arabico ma ancora in forma retorica: "plus", "moins", "multiplier", ma anche (abbreviate al modo medievale) $\overline{p}$, $\overline{m}$.

- Tratta le radici di numeri, con qualche nuova abbreviazione.

- L'ultima parte è la *Règle des premiers*, cioè la *Regola delle incognite* ovvero l'algebra. Inventa una notazione esponenziale: $.5.^1$ (oggi $5x$), $.6.^2$ (oggi $6x^2$), ecc. E utilizza addirittura esponenti negativi.

- Tratta le equazioni e, per la prima volta, compaiono coefficienti negativi (anche se come numeri isolati): ad esempio $4x = -2$. Tuttavia, imbattendosi in equazioni aventi soluzioni complesse non reali, si ferma e le considera "*ineperible*".

Il *Triparty* fu presto messo in ombra dall'opera più importante del periodo, pubblicata un decennio dopo.

### 3.2.4 Il Quattrocento in Italia: Pacioli

In Italia, accanto all'introduzione della prospettiva nell'arte del disegno e della pittura, la matematica si manifesta esplicitamente con lo studioso più rilevante del periodo: **Luca Pacioli** (1445-1514)[1].

• La sua opera principale è la *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità* (**1494**).

- Sostanzialmente nei due secoli trascorsi tra il *Liber abaci* (1202) e la *Summa* non si ricorda alcun testo rilevante di aritmetica, a parte il *Triparty*.

- La *Summa* viene scritta dopo che l'*Algebra* di al-Khuwarizmi è stata tradotta in latino: indubbiamente la matematica rinascimentale continua la tradizione medievale dell'algebra araba.

[1]Per inquadrare la vita, le opere e l'originalità di Pacioli, è utile la voce relativa dell'Enciclopedia Treccani: www.treccani.it: *Luca Pacioli* di Pier Daniele Napolitani ne *Il Contributo italiano alla storia del Pensiero: Scienze* (2013)

- La *Summa* è più influente che originale: è una grandiosa compilazione (ma senza fonti!) di materiale noto: aritmetica (moltiplicazioni, estrazioni di radici), algebra (equazioni di I e II grado, abbreviazioni di Chuquet, simboli nuovi $p$, $m$, $co$, $ce$, dove *coss* denota l'incognita e *census* denota il quadrato dell'incognita...), geometria euclidea elementare, registrazione a partita doppia (che ha dato una grande fama a Pacioli)...

- La *Summa* non è la prima compilazione del periodo, ma la più famosa.

- La *Summa* è scritta in volgare.



Ritratto di Luca Pacioli (1495) al Museo Nazionale di Capodimonte

• L'altra opera importante di Pacioli è *De divina proportione* contenente applicazioni della matematica alla prospettiva: è chiaro che all'Autore non interessano gli aspetti speculativi dell'algebra. Pacioli lavora al testo dal 1496 fino alla fine del **1497**.

Nel suo lavoro Pacioli riprende molte opere precedenti, tra cui la nota *De prospectiva pingendi* (∼1482) di **Piero della Francesca**.

La *proporzione divina* (cioè la *sezione aurea*), secondo Luca Pacioli, si applica a tutte le arti ed è necessario che tutti gli uomini di ingegno abbiano una copia dell'opera da cui avranno "diletto e nuova conoscenza".

**Le copie originali**

Pacioli fa eseguire tre copie del trattato da amanuensi diversi; di queste copie se ne sono conservate due, una presso la *Biblioteca Ambrosiana* a Milano e la seconda presso la *Bibliothèque Publique et Universitaire* di Ginevra in Svizzera. Pacioli regala la prima copia con dedica a Ludovico il Moro ed è quella conservata in Svizzera; l'altra copia, quella di Milano, è invece regalata a Galeazzo Sanseverino; la terza, della quale si sono perse le tracce, è invece offerta a Pier Soderini, Gonfaloniere di Firenze.

Finalmente nel **1509**[2] si esegue la prima copia a stampa a Venezia, col titolo *Divina proportione - opera a tutti gli ingegni perspicaci e curiosi necessaria*.

**Contenuto**

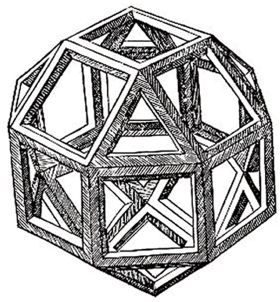
La prima parte dell'opera studia la sezione aurea da un punto di vista matematico ed esplora le sue applicazioni; inoltre, descrive uno studio sui poliedri regolari e semiregolari e presenta una discussione sull'uso della prospettiva operata dai pittori Piero della Francesca, Marco Palmezzano e Melozzo da Forlì.

La seconda parte è un trattato di architettura fondato sulle teorie vitruviane; Luca Pacioli evidenzia nel trattato di Vitruvio le applicazioni matematiche e pone a paragone le proporzioni del corpo umano con quelle dell'architettura antica.

La terza parte è sostanzialmente la traduzione in italiano del celebre trattato di matematica *De quinque corporibus regularibus* ($\sim$1480) redatto da Piero della Francesca, che Pacioli si intesta come opera propria: un plagio denunciato dal Vasari che porterà a lunghe dispute.

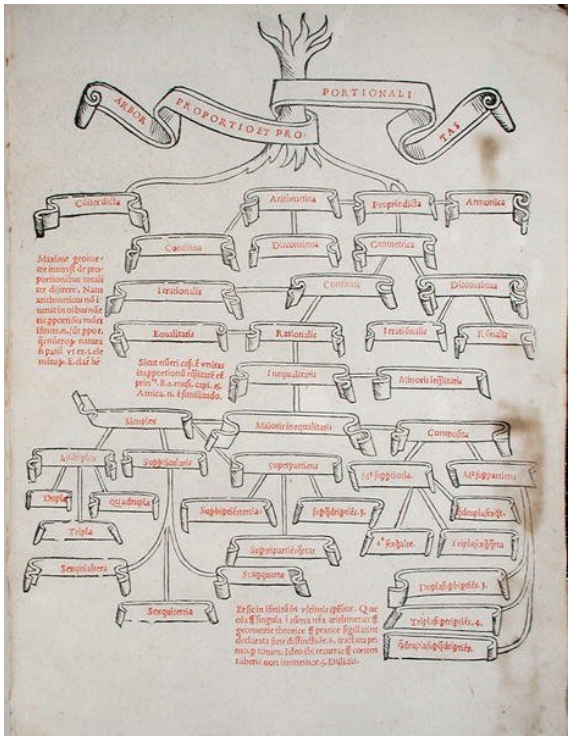
Le due parti finali sono interamente dedicate alle illustrazioni. La prima serie riporta un bellissimo alfabeto di 23 lettere maiuscole disegnato da Pacioli stesso con riga e compasso, mentre la seconda serie raffigura 61 xilografie realizzate sui disegni dell'amico Leonardo da Vinci e raffiguranti i solidi platonici, i solidi archimedei e poliedri complessi, più 3 tavole con architetture.

[2]Originale ad alta risoluzione su
https://fondazionecerruti.org/opere/divina-proportione-opera-a-tutti-gli-ingegni-perspicaci-e-curiosi-necessaria.
Dalla prefazione di Roberto Cena è liberamente tratto il brano riportato nel 'contenuto'.



Un rombicubottaedro - Illustrazione di Leonardo da Vinci

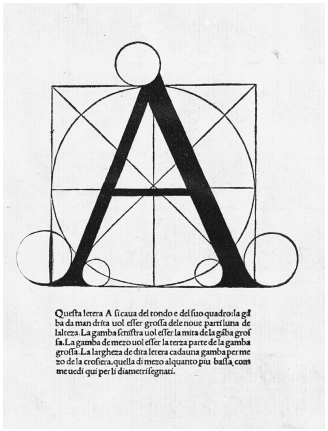
L'ultima illustrazione xilografica in rosso e nero rappresenta l'«albero genealogico delle proporzioni», copiato da quello che compare nella *Summa* di Pacioli. L'albero, che sarà ripreso tra l'altro da Leonardo, mostra le categorie di proporzionalità (*Arithmetica, Propredicta, Armonica*) e le loro sottocategorie (*Discontinua, Rationalis, Multiplex* ecc.) su 12 righe.



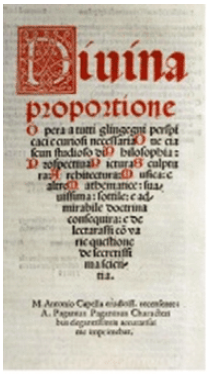
Nel *De Divina Proportione* Pacioli spiega con chiarezza e logica il numero aureo. L'obiettivo comune a Pacioli e a Leonardo era quello di pubblicare un trattato che descrivesse il mondo secondo i suoi elementi geometrici, quindi secondo la proporzione divina, chiamata anche numero aureo. Il numero aureo $\Phi$ (dall'iniziale di Fidia, il grande scultore greco) è definito come «il numero della bellezza», cioè il numero in grado di esprimere l'armonia e la proporzione fra le parti costitutive di ogni elemento.

La formula che la definisce indica «il giusto mezzo» o «la media d'oro», che annulla gli eccessi in due direzioni opposte. Il *De Divina Proportione* è considerato dagli studiosi del Rinascimento una fonte imprescindibile quanto meravigliosa riguardo l'interazione tra scienza e arte.

La scoperta del numero aureo è antichissima, ma il termine «numero d'oro» è moderno. Presso i greci non aveva un nome particolare, mentre Pacioli impiega il termine «divina proportione» e Kepler «sectio divina». Sarà Leonardo a utilizzare il termine «sectia aurea», sezione aurea. Pertanto, pur appassionando gli studiosi da sempre, fu durante il Rinascimento che il numero aureo conobbe le sue maggiori fortune e applicazioni con un potente intreccio di interessi tra matematici e artisti.







Divina
proportione





## 3.3 Il Cinquecento

Il Rinascimento è legato all'Italia per i suoi tesori letterari, artistici e scientifici; anche in Germania, comunque, dopo il Regiomontano, si sviluppano studi scientifici.

Vengono stampati molti trattati di algebra nella prima metà del XVI secolo, dei quali citiamo alcune caratteristiche:

- incognita = *coss* (e quindi gli algebristi vengono chiamati *cossisti*);
- si sviluppa una aritmetica "commerciale";
- si tende a sostituire il vecchio metodo di calcolo (abaco, cifre romane) col nuovo (penna, cifre indo-arabiche);
- si stampano le frazioni decimali;
- ha larga diffusione il triangolo di Tartaglia-Pascal.

A tale proposito va ricordato il tedesco **Michael Stifel** (1487-1567), noto per il trattato *Arithmetica integra* (1544), dove usa potenze negative e, per primo, i simboli $+$ e $-$. Ma i numeri negativi non vengono ancora considerati tra le radici di una equazione. Compaiono dei numeri irrazionali, ma anch'essi non vengono considerati (*numeri absurdi*). E finalmente utilizza un'unica lettera per indicare l'incognita. Non arriva ancora a risolvere equazioni di III grado: sarà questo il problema affrontato da un gruppo di italiani.

### 3.3.1 La guerra delle equazioni di III grado

Sarà il maggior oggetto di studio dell'algebra del Cinquecento.
I protagonisti di questa vicenda:

- Girolamo Cardano (1501-1576)
- Scipione del Ferro (1465-1526)
- Niccolò Tartaglia ($\sim$1500 - 1557)
- Ludovico Ferrari (1522-1565).

Sin dai tempi della matematica babilonese erano noti metodi risolutivi per equazioni di terzo grado particolari, essenzialmente quelle che possono essere ricondotte a un'equazione di secondo grado.

I greci riuscivano a risolvere alcune equazioni di terzo grado con il "metodo delle coniche", reso famoso dall'aneddoto della duplicazione del-

l'altare di Apollo[3] che venne risolto da Menecmo attraverso l'intersezione di due coniche.

Durante l'età della matematica araba, Omar Khayyām credeva che non esistesse un metodo risolutivo generale per le equazioni di terzo grado, opinione che ancora Luca Pacioli riportava nella sua opera *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* del 1494.

Ma nella prima metà del XVI secolo scoppiò un caso clamoroso.

SCENA I.

Un procedimento risolutivo di *buona generalità* viene trovato da **Scipione del Ferro** (1465 - **1526**) che non lo pubblica ma lo comunica in fin di vita a un suo allievo, Antonio Maria del Fiore o Antonio Maria Fior, detto **Floridus** in latino, un modesto matematico. La voce si sparge e **Niccolò Fontana** (1500-1557), detto **Tartaglia**, incoraggiato dalla notizia e (forse) con ricerche indipendenti, già nel **1541** afferma di saper risolvere problemi implicanti equazioni di terzo grado.

Quando la notizia si diffonde, viene organizzata una gara tra Floridus e Tartaglia: ognuno sottopone all'altro trenta "questioni" da risolvere entro una certa data. Arrivato il giorno stabilito, Tartaglia ha risolto tutti i problemi di Floridus e questi nemmeno uno. All'epoca infatti i numeri negativi non venivano presi in considerazione come soluzioni e si ricorreva a diversi metodi risolutivi con soli numeri positivi. Floridus conosce solamente un metodo per coefficienti positivi e per equazioni della forma:

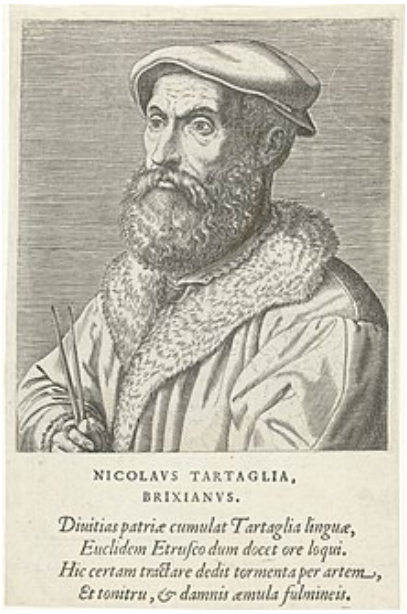
$$x^3 + px = q$$

mentre Tartaglia gli sottopone tutti problemi con coefficienti negativi e nella forma

$$x^3 + px^2 = q.$$

E' quasi certo che Tartaglia abbia imparato a ricondurre il secondo caso al precedente.

[3]Secondo la leggenda narrata da autori antichi (come Teone di Smirne e Eratostene), durante una terribile pestilenza ad Atene o sull'isola di Delo, i cittadini si rivolsero all'oracolo del dio Apollo per sapere come far cessare il morbo. L'oracolo rispose che per placare il dio era necessario raddoppiare il volume dell'altare sacro dedicato ad Apollo, il quale aveva una forma cubica. Pensando che bastasse raddoppiare la lunghezza dello spigolo del cubo, i cittadini costruirono un nuovo altare con i lati lunghi il doppio dell'originale. La pestilenza, di conseguenza, non cessò perché la richiesta geometrica dell'oracolo era stata disattesa.




Niccolò Fontana detto Tartaglia

SCENA II.

Pur se figlio illegittimo, astrologo, eretico e giocatore incallito, **Gerolamo Cardano** (1501-1576) è un rispettabile professore a Bologna e Milano, tanto che riceverà una pensione dal Papa. E' uno scrittore prolifico nel campo della medicina, delle scienze naturali e della matematica.

Venuto a sapere della vittoria su Floridus, Cardano invita Tartaglia a recarsi da lui a Milano, con la vaga promessa di trovargli un mecenate. Tartaglia non ha fonti di reddito stabili forse a causa della balbuzie, causatagli da una sciabolata ricevuta da ragazzo durante l'assalto di Brescia da parte di truppe francesi nel 1512. Il difetto, a cui si deve anche il soprannome autoimpostosi di Tartaglia, lo rende inadatto all'insegnamento, per cui l'offerta venne accettata.

Tartaglia dunque rivela a Cardano il procedimento sotto forma di poesia (tra parentesi la notazione attuale):

Quando che'l cubo con le cose appresso [$x^3 + px$]

Se agguaglia à qualche numero discreto [$= q$]

Trovan dui altri differenti in esso. [ $u - v = q$]

Dapoi terrai questo per consueto

Che'llor produtto sempre sia eguale [$uv =$ ]

Al terzo cubo delle cose neto, [ $(p/3)^3$]

El residuo poi suo generale

Delli lor lati cubi ben sottratti [ $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$]

Varrà la tua cosa principale. [$= x$]



Gerolamo Cardano

Dalla poesia si ottiene il procedimento che fornisce la soluzione (reale) dell'equazione

$$x^3 + px + q = 0$$

e cioè

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

In tale circostanza, Tartaglia fa giurare a Cardano che non avrebbe mai reso pubblico il procedimento, in quanto vuole farsi un nome con la pubblicazione della soluzione di quella equazione di terzo grado abbastanza generale.

SCENA III.

In quel periodo anche **Ludovico Ferrari** (1522-1565), l'amanuense di Cardano, è dedito egli stesso allo studio dell'algebra.

Cardano e Ferrari a quel punto lavorano sul materiale fornito loro dal Tartaglia, andando oltre le sue scoperte e riuscendo a fornire una dimostrazione rigorosa della soluzione; è proprio in questo periodo che Ferrari risolve anche l'equazione di quarto grado.



Ludovico Ferrari

Il procedimento risolutivo individuato dal matematico bolognese richiede però la soluzione dell'equazione di III grado scoperta da Tartaglia, che non può essere pubblicata a causa della promessa fatta da Cardano.

Dopo qualche tempo tuttavia, quest'ultimo viene a sapere delle precedenti deduzioni di Scipione del Ferro e si reca quindi presso **Annibale della Nave**, genero di del Ferro e suo successore alla cattedra di matematica dell'Università di Bologna, nella speranza di carpire le informazioni di cui ha bisogno.

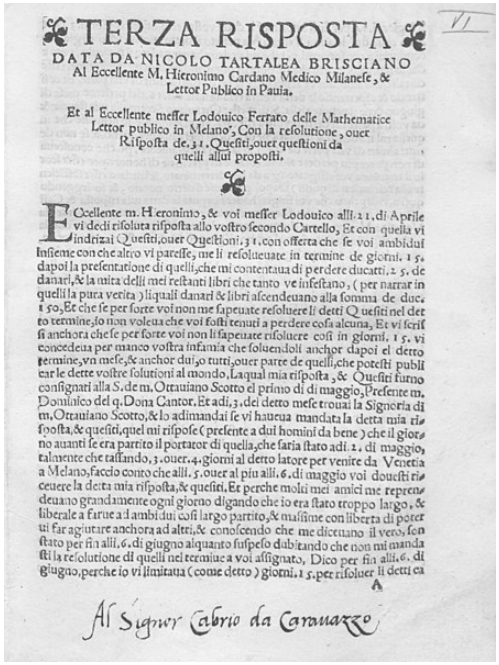
Il della Nave mostra a Cardano il manoscritto sul quale il suocero aveva annotato la soluzione dell'equazione, la stessa trovata da Tartaglia; e così Cardano, sentendosi svincolato dalla promessa fatta, pubblica il risultato noto oggi come *Formula di Cardano* o *Formula cardanica*.

SCENA IV.

Con l'uscita dell'*Artis Magnae sive de regulis algebraicis* (detta brevemente *Ars Magna*) nel **1545**, in cui vengono pubblicate le soluzioni per le equa-

zioni di terzo e quarto grado, anche se riconoscendo la paternità delle rispettive scoperte a Ferrari e Tartaglia, divampa subito la polemica. Infatti questo non sarà sufficiente per evitare le ire di Tartaglia che offende pubblicamente Cardano chiamandolo *"huomo di poco sugo"*. Ferrari difende accanitamente il maestro e ne segue una lunga disputa (dalla quale, comunque, Cardano si mantiene sempre estraneo).

Sfidato pubblicamente da Ferrari, Tartaglia viene umiliato e sconfitto e poco dopo vede il ritiro del suo incarico di professore.



TERZA RISPOSTA

DATA DA NICOLO TARTALEA BRISCIANO
Al Eccellente M. Hieronimo Cardano Medico Milanese, & Lettor Publico in Paula.

Et al Eccellente messer Lodouico Ferrato delle Mathematice Lettor publico in Melano, Con la resolutione, ouer Risposta de. 31. Quesiti, ouer questioni da quelli allui proposti.

ECcellente m. Heronimo, & voi messer Lodouico alli. 11. di Aprile vi dedi risoluta risposta allo vostro secondo Cartello, Et con quella vi indrizai Quesiti, ouer Questioni. 31. con offerta che se voi ambidui Insieme con che altro vi paresse, me li resolueuate in termine de giorni. 15. dapoi la presentatione di quelli, che mi contentaua di perdere ducati. 25. de danari, & la mita delli mei restanti libri che tanto ve infestano, (per narrar in quelli la pura verita) liquali danari & libri ascendeuano alla somma de duc. 150. Et che se per sorte voi non me sapeuate resoluere li detti Quesiti nel detto termine, io non voleua che voi fosti tenuti a perdere cosa alcuna, Et vi scrisi anchora che se per sorte voi non li sapeuate risoluere cosi in giorni. 15. vi concedeua per manco vostra infamia che soluendoli anchor dapoi el detto termine, vn mese, & anchor dui, o tutti, ouer parte de quelli, che potesti publicar le dette vostre solutioni al mondo, Laqual mia risposta, & Quesiti furno consignati alla S. de m. Otauiano Scotto el primo di di maggio, Presente m. Dominico del q. Dona Cantor. Et adi. 3. del detto mese trouai la Signoria di m. Otauiano Scotto, & lo adimandai se vi haueua mandata la detta mia risposta, & quesiti, quel mi rispose (presente a dui homini da bene) che il giorno auanti se era partito il portator di quella, che saria stato adi. 2. di maggio, talmente che taxando. 3. ouer. 4. giorni al detto latore per venire da Venetia a Melano, faccio conto che alli. 5. ouer al piu alli. 6. di maggio voi douesti riceuere la detta mia risposta, & quesiti. Et perche molti mei amici me reprendeuano grandamente ogni giorno digando che io era stato troppo largo, & liberale a farue a ambidui cosi largo partito, & massime con liberta di poter ui far agiutare anchora ad altri, & conoscendo che me dicetuano il vero, son stato per fin alli. 6. di giugno alquanto suspeso diabitando che non mi manda sti la resolutione di quelli nel termine a voi assignato, Dico per fin alli. 6. di giugno, perche io vi limitaua (come detto) giorni. 15. per risoluer li detti ea

A

Al Signor Cabrio da Caravazzo

Niccolò Tartaglia, *Terza risposta data a messer Hieronimo Cardano et a messer Lodovico Ferraro*, 1547

Cardano e Ferrari diventano improvvisamente famosi, ma nemmeno la loro fortuna dura a lungo: il figlio di Cardano viene condannato a morte per l'assassinio della moglie mentre l'altro suo figlio lo deruba per saldare i suoi debiti di gioco. Egli stesso viene poi imprigionato per aver calcolato l'oroscopo di Gesù Cristo.

Ferrari invece, dopo aver perso le dita di una mano in una rissa, è probabilmente avvelenato dalla sorella.

EPILOGO.

La sorprendente pubblicazione dell'*Ars Magna* imprime una spinta molto forte agli studi del settore, tanto che il **1545** viene considerato, da vari storici, l'inizio del periodo della matematica moderna.

Occorre osservare che Cardano incontra alcune difficoltà a trattare casi come

$$x^3 = 15x + 4.$$

Infatti applicando la formula risolutiva si trova

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

e la radice di un numero negativo non sa ancora trattare. Tuttavia, cercando una soluzione con i metodi geometrici di Omar Khayyām, si trova che una soluzione è $x = 4$ e di conseguenza altre due soluzioni sono ottenibili risolvendo l'equazione $x^2 + 4x + 1 = 0$. Quindi l'equazione ha tre radici reali, ovvero si ha la fattorizzazione

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3}),$$

mentre la formula risolutiva porta a numeri non reali.

In generale si incorre in numeri non reali con equazioni della forma $x^3 + px + q = 0$ per le quali

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 < -\left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Questa disuguaglianza caratterizza quello che veniva chiamato *caso irriducibile*, cioè un caso ritenuto intrattabile.

Vedremo che **Rafael Bombelli** riprenderà questi risultati giungendo a una conclusione inaspettata [4].

### 3.3.2 Bombelli

Viene smossa molta buona matematica per due secoli, intorno alle equazioni di III e IV grado, ma a metà del Cinquecento la situazione era la seguente:

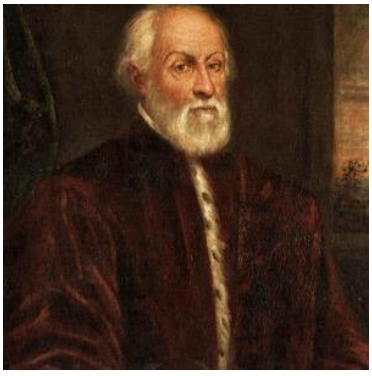
[4] Negli anni successivi **François Viète** troverà un altro metodo di risoluzione e altri nuovi metodi per la soluzione di equazioni cubiche e biquadratiche saranno trovati nei secoli successivi.

- i numeri irrazionali sono sostanzialmente ammessi anche se non godono di un solido fondamento; vengono accettati anche perché approssimabili con razionali attraverso metodi della matematica araba;
- i numeri negativi sono accettati con maggiore difficoltà;
- le equazioni $x^2 = 2$, $x + 2 = 0$, $x^2 + 1 = 0$ sono dichiarate irrisolvibili;
- con le *Formule cardaniche* si apre un nuovo fronte: le radici di numeri negativi.

**Raphael Bombelli** (1526-1573) chiude la questione.

Viene qui riportanto, fino alla fine del Paragrafo, un ampio articolo di Veronica Cavagna[5] che offre una panoramica sull'opera di questo autore.

*Ultimo esponente della scuola algebrica italiana cinquecentesca, Rafael Bombelli è autore del trattato* **L'algebra (1572)** *che, da un lato, presenta un quadro organico e completo di una disciplina che si era arricchita di diversi risultati originali nel corso del secolo – primo tra tutti, la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado – e, dall'altro, cerca di affrancarsi dalla tradizione abachistica, privilegiando un approccio speculativo mutuato dall'Aritmetica di Diofanto (3°-4° sec.). Uno dei risultati più notevoli dell'Algebra è la soluzione, in alcuni casi particolari, del caso irriducibile dell'equazione cubica, brillantemente ottenuta da Bombelli con l'introduzione dei nuovi segni «più di meno» e «meno di meno».*



**La vita**

Le scarse notizie relative alla vita di Rafael (o Raffaele) Bombelli si possono desumere dai suoi scritti e da diversi documenti ritrovati presso alcuni archivi bolognesi e romani. La famiglia, originaria di Borgo Panigale, aveva cognome

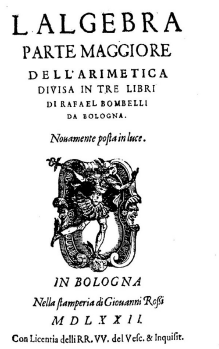
[5] www.treccani.it/enciclopedia/rafael-bombelli (Il Contributo italiano alla storia del Pensiero: Scienze) (2013) di Veronica Cavagna

Mazzoli. Fu il padre di Rafael, Antonio, che dopo l'esilio rientrò in possesso delle proprietà familiari e probabilmente assunse l'alias Bombelli che trasmise ai propri figli, nessuno dei quali infatti usò il cognome Mazzoli.

Antonio si trasferì a Bologna, dove divenne commerciante di lana e sposò Diamante Scudieri, figlia di un sarto. Ebbero sei figli, il primo dei quali fu Rafael (1526). Le uniche notizie sulla sua formazione matematica provengono dalla dedicatoria dell'*Algebra*, in cui afferma di aver avuto come precettore l'architetto-ingegnere Pier Francesco Clementi di Corinaldo, che aveva partecipato ai lavori di bonifica delle paludi di Foligno sotto il pontificato di Paolo III. Lo stesso Bombelli divenne architetto-ingegnere e si pose al servizio di monsignor Alessandro Rufini, chierico papale e poi vescovo di Melfi dal 1548 al 1574. In veste di «ingegniero della diseccatione» partecipò alla bonifica della Val di Chiana, iniziata nel 1549; alcuni documenti, stilati per stabilire i confini delle terre bonificate, certificano la sua presenza in quei luoghi fin dal 1551. Si tratta però di una presenza intermittente – per es., Rafael e il fratello Ercole erano a Bologna nel 1556 per un atto notarile – dovuta alle frequenti interruzioni occorse negli anni Cinquanta a causa dei disordini politici di cui quelle terre furono teatro.

Nel 1560 Bombelli era di nuovo in Val di Chiana, ma l'anno successivo i lavori di bonifica si conclusero ed egli andò a Roma per sovrintendere alla riparazione del Ponte Santa Maria sul Tevere (oggi noto come Ponte Rotto), che era stato danneggiato da un'alluvione nel 1557. I lavori, tuttavia, non andarono a buon fine a causa del cedimento della struttura in legno che avrebbe dovuto sorreggere il ponte. Per quanto risulti plausibile, data la fama che i lavori in Val di Chiana gli avevano procurato, non è certo che Rafael sia stato incaricato per la bonifica delle Paludi pontine, progettata durante il pontificato di Pio IV, ma mai realizzata. La data di morte, ignota, è compresa tra il 23 giugno 1572, data della lettera dedicatoria dell'*Algebra*, e il 5 maggio 1573, giorno in cui venne stilato un atto notarile in cui si citano i figli Antonio ed Ercole come eredi «Domini Raffaelis de Bombellis Bononiensis».

**L'Algebra**


L ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.
*Nouamente posta in luce.*
*IN BOLOGNA*
*Nella stamperia di Giouanni Rossi*
*M D L X X I I.*
Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

Frontespizio dell'edizione del 1572

Sono numerosi gli aspetti ancora poco chiari circa la genesi della sua opera più nota: l'*Algebra*: in primo luogo rimane da stabilire la data della stesura originaria dell'opera, che comunque si ritiene molto antecedente all'edizione del 1572.

Se in un primo tempo i documenti noti sembravano avvalorare l'ipotesi di una prima redazione compiuta all'inizio degli anni Cinquanta, una ricostruzione più puntuale rende plausibile uno slittamento alla fine del decennio. La stesura originale era più ampia di quella che venne consegnata per la stampa, e alla fine del trattato l'autore annunciava l'imminente uscita di una nuova opera, dedicata alle relazioni reciproche tra algebra e geometria, all'epoca ≪non ancora ridutta a quella perfettione che la eccellentia di questa disciplina ricerca≫ (L'algebra, 1572, p. 648). Questo scritto, probabilmente a causa della sopraggiunta morte di Bombelli, non venne mai pubblicato, mentre nel 1579 uscì dai torchi una nuova edizione dell'*Algebra*, perfettamente identica all'*editio princeps* a eccezione del frontespizio.

Nel 1923 lo storico della matematica Ettore Bortolotti (1866-1947) ritrovò a Bologna due manoscritti inediti del trattato di Bombelli: il primo, conservato presso la Biblioteca dell'Archiginnasio, è suddiviso in cinque libri – due in più dell'edizione a stampa – mentre il secondo, custodito presso la Biblioteca universitaria, comprende solo il Libro III e la parte iniziale del Libro IV. La datazione dei codici oscilla tra gli anni Cinquanta e gli anni Settanta del Cinquecento.

Bortolotti pubblicò i Libri IV e V a pochi anni di distanza dal loro ritrovamento, mentre l'edizione completa, che è ancora oggi l'unica disponibile, fu stampata quasi quattro decenni dopo e si basa sulla sola edizione a stampa del 1572 per i primi tre libri e sulla stampa del 1929 per gli ultimi due (L'algebra. Prima edizione integrale, a cura di E. Bortolotti, U. Forti, 1966).

**Le ≪radici sofistiche≫ e la soluzione del caso irriducibile**

Nel 1539 Girolamo Cardano era riuscito a carpire al matematico bresciano Niccolò Tartaglia la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado, ma si era impegnato a non renderla pubblica nella sua *Practica arithmetice et mensurandi singularis*, di imminente pubblicazione. Secondo il racconto del suo allievo Ludovico Ferrari, dopo aver scoperto che la formula era già nota a Scipione Dal Ferro (1465-1526) da più di un ventennio, Cardano si sentì sciolto dalla promessa e decise di pubblicare tanto la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado quanto quella di quarto grado, che nel frattempo era stata trovata dallo stesso Ferrari.

L'*Ars magna* (1545) di Cardano divenne una pietra miliare dell'algebra cinquecentesca, ma soffriva di alcuni limiti: innanzi tutto non poteva dirsi un modello di chiarezza espositiva e soprattutto lasciava ancora insoluto il caso irriducibile dell'equazione cubica, che si presentava quando nella formula risolutiva comparivano radici di numeri negativi. Nella seconda edizione dell'*Ars magna* (1570), Cardano aveva apportato alcune correzioni marginali rispetto all'*editio princeps* e aveva pubblicato un breve trattato, il *De regula aliza libellus* (1570), in cui aveva raccolto i più che ventennali tentativi di venire a capo del caso irriducibile.

In questo contesto si inserisce la pubblicazione dell'*Algebra* di Bombelli, che comincia la sua opera con un elenco dei matematici che avevano contribuito allo sviluppo dell'algebra, ma solo per affermare che i loro scritti erano insoddisfacenti e lacunosi con l'unica eccezione di ≪Cardano Melanese≫, che aveva composto un'opera veramente profonda, sminuita solo da uno stile oscuro e confuso. Bombelli riteneva l'algebra la più importante tra le discipline matematiche ≪perché di lei tutte l'altre bisogna≫, e con la sua opera si proponeva di rappresentare la summa del sapere algebrico, ordinato secondo un criterio di difficoltà crescente e senza lacune, ovvero ridotto ≪a perfetto ordine≫. Sebbene l'*Ars magna* di Cardano rappresentasse un termine di confronto spesso sottinteso, ma pervicacemente presente, Bombelli non condivise la scelta di scrivere in latino per raggiungere anche il pubblico colto oltremontano, ma rimase nell'alveo della tradizione abachistica e scrisse il suo trattato in volgare, venandolo talvolta di coloriture dialettali.

Nel Libro I dell'Algebra vengono definiti gli elementi fondamentali – potenze, radici, binomi, trinomi – e le regole aritmetiche per operare con essi: si tratta in buona sostanza di un'interpretazione aritmetica del Libro X degli Elementi di Euclide, che costituisce un tema ricorrente della matematica abachistica.

Il Libro II si apre con la definizione delle potenze algebriche e prosegue con quella che in termini moderni potrebbe chiamarsi algebra elementare dei polinomi; nella seconda parte si studiano le soluzioni delle equazioni dal primo al quarto grado.

I capitoli sono strutturati in maniera analoga a quelli dell'*Ars magna*: enunciato della formula espresso in forma retorica, esempi esplicativi a corredo e interpretazione geometrica dell'algoritmo risolutivo per garantirne la reale generalità. Il mondo di Bombelli non è ancora quello dell'algebra simbolica e le equazioni non solo sono espresse con un linguaggio sincopato, per quanto assai evoluto, ma devono sottostare alla condizione di positività dei coefficienti, il che implica di contemplare un certo numero di casi per ogni tipo di equazione: basti pensare che per l'equazione di quarto grado ne vengono elencati ben 42.

È in questa parte del trattato che si affronta il caso irriducibile dell'equazione cubica.

Cardano aveva cercato di trovare delle regole per poter operare con le radici quadrate dei numeri negativi, che aveva chiamato *radici sofistiche*, ma si era arenato sul problema di stabilire quale segno avessero: il fatto che il loro quadrato fosse un numero negativo contraddiceva palesemente l'usuale regola dei segni. Per superare l'ostacolo, Bombelli inventò i nuovi segni «più di meno» e «meno di meno», per i quali stabilì opportune regole di moltiplicazione. Su questa base costruì un'aritmetica delle «quantità sofistiche» che gli consentì di dare un senso alla formula cardaniana nel caso irriducibile; inoltre, nei casi particolari in cui risultava semplice estrarre le radici cubiche di queste espressioni, Bombelli fu finalmente in grado di ricavare concretamente le tre radici reali dell'equazione e di ottenere il risultato più rilevante di questi primi due libri, che sono tra le migliori sintesi dell'algebra abachistica occidentale.

**La scoperta dell'Aritmetica di Diofanto**

Nell'*excursus* storico presentato nel proemio iniziale, oltre ai matematici più noti – al-Khuwarizmi, Fibonacci, Pacioli e Cardano – compare un «certo Diofante alessandrino autor greco», personaggio ancora poco noto negli anni Settanta del Cinquecento, destinato però a rivestire un'importanza rilevante nello sviluppo dell'algebra simbolica e dell'analisi indeterminata.

Bombelli racconta di aver trovato un codice greco dell'*Aritmetica* di Diofanto nella Biblioteca Vaticana e di averne tradotto cinque libri – l'opera era invece divisa in 13 libri, sei dei quali sono pervenuti in greco e quattro in arabo – con l'aiuto di Antonio Maria Pazzi, lettore di matematiche dell'Università di Roma. L'esistenza di un'opera greca dedicata allo studio delle equazioni determinate e indeterminate dei primi due gradi assumeva una straordinaria importanza agli occhi di Bombelli e dei suoi contemporanei, perché consentiva di includere anche l'algebra nel *corpus* matematico classico del quale la matematica rinascimentale si sentiva legittima erede.

Lo studio dell'*Aritmetica* influenzò profondamente il matematico bolognese che, verosimilmente, rielaborò il proprio trattato alla luce dell'opera diofantea, a partire dall'adozione di una nuova terminologia algebrica e di un diverso sim-

bolismo. Per esempio, i termini *cosa* e *censo*, che nella tradizione abachistica identificavano l'incognita e il suo quadrato – al punto tale che gli algebristi italiani venivano chiamati cossisti – vengono sostituiti da «tanto» e «potenza», termini «universalissimi» e quindi più adatti a una disciplina che doveva ambire, secondo Bombelli, a studiare quantità generali e a svincolarsi da una realtà esclusivamente mercantile.

Inoltre, nei manoscritti viene fatto uso di un simbolismo, in alcuni casi molto prossimo a quello diofanteo, che sarà modificato nel testo a stampa a causa delle difficoltà di composizione tipografica. Nel caso della notazione della potenza di un'incognita, nei manoscritti figura una semicirconferenza al di sopra del coefficiente entro la quale viene indicato il numero cardinale della potenza; nella versione a stampa, la semicirconferenza viene spostata a destra del coefficiente in modo da rimanere nella stessa riga. Il segno di radicale è indicato nei codici da due parentesi quadrate, entro cui si trova il radicando, separate da un tratto orizzontale posto al di sotto della riga di scrittura, ma il tratto si perde nella stampa; infine i simboli di radice quadrata (R) e di radice cubica (R3) vengono sostituiti dai più comuni Rq e Rc.

L'influenza del codice greco è veramente profonda nel Libro III dell'*Algebra*, che subisce una trasformazione radicale: nei manoscritti è una miscellanea di problemi palesemente riconducibili alla trattatistica dell'abaco, nell'edizione a stampa è una raccolta di 272 problemi, 143 dei quali sono tratti dai primi cinque libri dell'*Aritmetica* diofantea.

Bombelli è un matematico e non un umanista né un filologo, per cui non è interessato a compiere una traduzione letterale del testo greco, ma all'occorrenza adatta i problemi diofantei ai suoi scopi, introducendo, per esempio, numeri irrazionali e radici cubiche al posto dei soli numeri razionali usati da Diofanto.

Non di rado allo svolgimento dei problemi vengono aggiunte appendici in cui l'algoritmo risolutivo viene ripetuto eliminando i riferimenti ai dati numerici, in modo da formulare una regola del tutto generale. Con la scelta di pubblicare i problemi diofantei, Bombelli è perfettamente consapevole di aver «deviato dall'uso de' scrittori di questa disciplina» ma giustifica la scelta di imitare gli «antichi scrittori» affermando che i problemi astratti, soprattutto nell'insegnamento della matematica, garantiscono una maggior generalità e sottolinea come sia opportuno far precedere l'aspetto teorico a quello meramente applicativo «pensandosi che la capacità dello intelletto humano debbia poi esser tale ch'egli per se debbia, posedendo la Teorica, venire all'uso della pratica».

**L'algebra linearia**

I Libri IV e V sono dedicati all'*algebra linearia*, ovvero all'uso dell'algebra nella risoluzione dei problemi geometrici: mentre il primo si presenta in uno stato di redazione molto avanzato, il secondo è poco più che abbozzato. La prima parte del

Libro IV comprende la descrizione di un certo numero di costruzioni geometriche – per es., la perpendicolare o la parallela a una retta data, oppure la divisione di un segmento in 2 o 3 parti uguali – mutuate dagli *Elementi* di Euclide. La seconda parte, invece, presenta un'interpretazione geometrica delle operazioni aritmetiche elementari (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, estrazione di radice quadrata e cubica) in cui viene introdotto l'uso del segmento unitario.

Queste due sezioni sono propedeutiche alla terza e ultima, in cui vengono date dimostrazioni geometriche delle regole algebriche per la risoluzione di equazioni dal primo al quarto grado, nonché rappresentazioni degli irrazionali quadratici nello stile del Libro X degli *Elementi* e soluzioni di problemi riconducibili a equazioni di secondo grado. Il Libro V è dedicato alla costruzione di poligoni regolari inscritti in un cerchio, alla divisione di figure piane secondo rapporti fissati e alla costruzione dei cinque poliedri regolari e di tre poliedri semiregolari.

Con l'*algebra linearia* Bombelli evidenzia lo stretto legame che unisce l'algebra alla geometria: la seconda costituisce il fondamento teorico della prima e fornisce i mezzi per rappresentare le soluzioni delle equazioni algebriche; viceversa, le manipolazioni e le formule algebriche si possono opportunamente interpretare come istruzioni per realizzare costruzioni geometriche.

Questa reciprocità, influenzata dalle pratiche abachistiche, nell'opera di Bombelli è diretta e ricostruita caso per caso, senza essere mediata da una teoria – come sarà per es. la teoria delle proporzioni per François Viète (1540-1603) – che consenta di formulare regole valide almeno per gruppi di esempi accomunati da affinità strutturali. Eppure, lo spirito del quale René Descartes informerà la sua *Géométrie* (1637) – una delle pietre miliari della matematica contemporanea – sarà molto più prossimo a quello di Bombelli che a quello di Viète, matematicamente più rigoroso forse, ma meno efficace.

**La fortuna**

La ricezione dell'Algebra di Bombelli attende ancora una ricostruzione dettagliata, ma è probabile che essa non abbia conosciuto la diffusione che avrebbe meritato. Certamente influenzò **Simon Stevin** (1548-1620), che rese omaggio al matematico bolognese nella sua *Arithmétique* (1585), mentre **Claude-Gaspard Bachet de Méziriac** (1581-1638), editore dell'*editio princeps* del testo greco dell'*Aritmetica* di Diofanto con traduzione e commento latini (1621), utilizzò frequentemente l'*Algebra*.

Tra gli estimatori più illustri si annovera **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646-1716), che apprezzò a tal punto il trattato da fregiare il suo autore del titolo di ≪*Egregium certe artis analyticae magistrum*≫ per aver risolto il caso irriducibile, autentica croce degli algebristi rinascimentali.

### 3.3.3 Il Cinquecento in Inghilterra

In Inghilterra, per quasi due secoli, dopo Bradwardine e i *Calculatores di Oxford*, non si menziona alcun matematico di rilievo fino a **Robert Recorde** (1510-1558), medico di formazione (come Cardano e Chuquet), che studia e insegna sia a Oxford che a Cambridge. E' l'influente fondatore della scuola matematica inglese e, come i citati colleghi, scrive in volgare. Tra le sue opere:

- *The Ground of Artes* (1543), un testo fondamentale sull'aritmetica elementare, che includeva una sezione sull'uso dell'abaco per i mercanti. Ha un grande successo editoriale, con più di 20 edizioni. Contiene semplici problemi pratici.

- *The pathwaie to knowledge* (1551): il primo testo di geometria elementare pubblicato in Inghilterra e basato sui primi quattro libri degli *Elementi* di Euclide.

- *The Castle of Knowledge* (1556), sull'astronomia tolemaica che menziona e appoggia anche la teoria eliocentrica di Copernico.

- *The Whetstone of Witte* (1557): l'ultima opera di Recorde. E' un trattato avanzato sull'aritmetica e l'introduzione all'algebra. È famoso soprattutto per aver introdotto il simbolo dell'uguale ($=$). Ma sarebbe passato un secolo prima che questa notazione si affermasse.

### 3.3.4 Trigonometria, geometria, cartografia

In Europa avanza quindi l'algebra in tutto il XIV secolo, ma anche la **trigonometria** anche se con sviluppi meno spettacolari. I centri principali saranno in Germania e in Polonia.

**Niccolò Copernico** (1473-1543), nato in Prussia in una famiglia polacca-tedesca che vive in uno stato autonomo governato dal re polacco, per cui Niccolò gode della cittadinanza polacca. Tuttavia, non si considera né tedesco né polacco, bensì prussiano.

E' ricordato come un grande astronomo ma si dimostra anche un valente trigonometrista.

Si iscrive nel 1491 nella prestigiosa università di Cracovia, dove riceve gli ordini minori e poi studia diritto canonico, medicina e astronomia a Bologna. Qui incontra Domenico Maria Novara, già celebre astronomo, che

ne fa il suo allievo e uno dei suoi più stretti collaboratori. Con il suo maestro, mentre studia diritto civile a Ferrara, Copernico fa le prime osservazioni astronomiche nel 1497 e verifica alcuni errori delle dottrine tolemaiche. Tiene alcune conferenze scientifiche a Roma e poi torna in Polonia. Scende ancora in Italia: a Padova per medicina e a Ferrara per il diritto. Poi torna definitivamente in Polonia e inizia a studiare la trigonometria.

Lo raggiunge, nel 1540, **Georg Joachim Rheticus** (1514-1576) prussiano e medico, che lascia appositamente la cattedra di Wittemberg per stare accanto al suo grande maestro. Rheticus fa conoscere a Copernico l'opera del Regiomontano. Col consenso di Copernico, il giovane astronomo fa stampare a Danzica *De revolutionibus orbium coelestium* (1543) che contiene un'ampia sezione di trigonometria e generalizzazione del teorema di Nasir Eddin sul moto rettilineo risultante dalla composizione di due moti circolari (vedi Paragrafo 2.3.5).

E' opinione diffusa che i lavori di Regiomontano forniscano una base matematica e astronomica fondamentale per lo sviluppo del sistema eliocentrico copernicano, e Rheticus è il tramite che porta alla pubblicazione della teoria di Copernico.

Lo stesso Rheticus, oltre a coordinare le concezioni di Regiomontano e Copernico, apporta contributi originali nell'opera, profonda e matura, *Opus palatinum de triangulis*, pubblicata postuma (1596) da un suo allievo. Sono 1500 pagine contenenti i risultati del calcolo manuale di oltre $100.000$ funzioni trigonometriche. Queste tavole così elaborate restarono in uso fino all'inizio del secolo XX. Ancora il raggio della circonferenza utilizzata è enorme.

La geometria del XVI secolo non è particolarmente significativa. Merita una citazione il tedesco **Johannes Werner** (1468-1522), astronomo, geografo e matematico. Noto per le *formule di Werner*[6] del tipo

$$2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

ha lavorato sulla trigonometria sferica e sulle sezioni coniche. Probabilmente Werner è stato l'ultimo scrittore a produrre un contributo originale sulle coniche nel solco della tradizione medievale. Questi lavori di Werner non sono molto citati all'epoca probabilmente perché una buona traduzione delle *Coniche* di Apollonio presto li portò a essere superflui.

[6] delle quali tratteremo l'utilizzo nel Capitolo 4.

Gerhard Kremer, noto come **Gerardo Mercatore** (1512 - 1594) è stato un matematico, astronomo e cartografo fiammingo. È celebre per i suoi studi nella cartografia e per aver inventato un sistema di proiezione cartografica detta "proiezione di Mercatore".

### 3.3.5 Approfondimenti

Una serie di interessanti articoli (vivamente consigliati) dello storico della scienza Knobloch sono reperibili nella seguente voce dell'Enciclopedia Treccani:

*Il Rinascimento. Le arti matematiche* di Eberhard Knobloch, Ivo Schneider (Storia della Scienza 2001)

Qui un brano (liberamente) tratto dal primo articolo: *Il concetto di scienze matematiche* (Eberhard Knobloch) è utile per una sintetica panoramica della matematica rinascimentale.

Il Rinascimento riprese dal Medioevo il concetto delle sette *artes liberales*, ma già Tommaso d'Aquino nel XIII sec. aveva affermato che queste non suddividevano in modo adeguato la filosofia teoretica. Con l'istituzionalizzazione delle sette *arti meccaniche*, si accrebbe non soltanto il numero delle scienze, in particolare nell'area della filosofia pratica, ma si moltiplicarono anche le scienze matematiche comprese nel *quadrivium*. Nello stesso tempo mutò la loro posizione entro le classificazioni delle scienze.

Le nuove tendenze emergono nel discorso che Johann Müller Regiomontano (1436-1476) tenne a Padova nel 1464 sul valore e sull'utilità della matematica. La matematica è definita come scienza della quantità – *scientia considerativa quantitatis*. [...]

Regiomontano continua a usare il concetto di *quadrivium*, ma esso non corrisponde più all'articolazione delle scienze matematiche. Tra le discipline secondarie, infatti, egli annovera l'astronomia, la musica e la prospettiva, ossia l'ottica. Seguendo Tommaso d'Aquino, egli definisce tali discipline anche come 'scienze intermedie', in quanto si collocano tra la geometria e l'aritmetica da un lato, e le scienze della Natura dall'altro. Altre scienze secondarie, meno affidabili, sarebbero quelle dei pesi (statica), degli acquedotti, del rapporto delle velocità nel moto, e via dicendo.

Per le prime cinque scienze Regiomontano cita i nomi di famosi autori sia antichi sia medievali, primi tra tutti Euclide (300 a.C. ca.), Archimede (287-212 a.C.) e Apollonio (240-170 a.C. ca.) per la geometria, ancora Euclide, Diofanto (III

sec. d.C.), Nicomaco di Gerasa (I-II sec. d.C.), Boezio (480 ca.-524/525), Giordano Nemorario (XIII sec.) per l'aritmetica.

Nei 13 libri di Diofanto, non ancora tradotti in latino, sarebbe contenuto il fiore dell'intera aritmetica, l'*Ars rei et census* – la teoria dell'incognita $x$ (*res*) e della sua potenza quadrata $x^2$ (*census*) – quella che oggi designiamo col nome arabo 'algebra'. Questa osservazione attesta la grande considerazione di Regiomontano per l'algebra, considerata ancora una branca dell'aritmetica, un'opinione che troverà peraltro un riflesso anche nel XVII sec. nel titolo dell'opera di Isaac Newton *Arithmetica universalis*.

Al di sopra delle consorelle e delle altre scienze intermedie, al di sopra persino della geometria e dell'aritmetica, Regiomontano pone, come una perla, l'astronomia. [...]

Il discorso di Regiomontano termina con un'esaltazione entusiastica delle scienze matematiche. [...]

Allorché Regiomontano usava il concetto medievale di prospettiva, si riferiva alla *perspectiva communis* ('prospettiva comune', l'arte della percezione visiva) ossia all'ottica, che includeva l'ottica geometrica, quella fisica e quella fisiologica. Essa si distingueva dalla prospettiva degli artisti del Quattrocento, che era la costruzione prospettica di rappresentazioni della realtà tridimensionale.

In considerazione della matematizzazione, e quindi del carattere scientifico dell'architettura, della scultura e della pittura, gli artisti fiorentini del XV sec. non volevano più essere considerati semplici artigiani; questa rivendicazione costituirà il tema di una ricca letteratura sino a buona parte del XVII secolo.

Dalla connessione con la musica, scienza inclusa nel quadrivio e quindi disciplina matematica a tutti gli effetti, essi speravano il riconoscimento dello status di arte liberale per le loro attività.

Leonardo da Vinci (1452-1519) definiva la musica 'sorella della pittura'. Nello scritto *De divina proportione*, pubblicato per la prima volta nel 1509, il suo amico Luca Pacioli (1445 ca.-1517) propose analogamente di classificare la pittura tra le scienze. Tale scritto esercitò una profonda influenza sugli artisti e i tecnici del suo tempo. Pacioli dedicò l'opera al duca di Milano Ludovico Maria Sforza (1452-1508), figlio di Francesco II Sforza (1401-1466). Come già aveva fatto Regiomontano, Pacioli sottolinea come le scienze matematiche siano fondamento e guida per la conoscenza di ogni altra scienza.

Qui il termine 'matematica' designa l'aritmetica, la geometria, l'astrologia, la musica, la prospettiva, l'architettura, la cosmografia e alcune discipline collaterali. Gli studiosi avrebbero riconosciuto soltanto le prime quattro, considerando le altre come discipline subordinate, ossia dipendenti da esse. Pacioli sostiene per contro che la prospettiva (pittorica) è una disciplina matematica allo stesso titolo della musica. Di conseguenza, o vi sono soltanto tre scienze principali, in quanto

si escludono dal quadrivio la musica e la pittura, oppure ve ne sono cinque, in quanto si annoverano anche queste ultime.




*Melancholia* (1514)[7]

[7]Incisione a bulino di Albrecht Dürer, conservata nella *Staatliche Kunsthalle* di Karlsruhe. L'opera è densa di riferimenti esoterici, tra i quali il primo *quadrato magico* comparso in Occidente.