

Capitolo 16

Scambio di calore per conduzione

1

Obiettivi del capitolo

- Il primo obiettivo di questo capitolo è capire come utilizzare l'equazione del calore, basata sulla legge di Fourier e sul rispetto della legge di conservazione dell'energia, per ottenere la distribuzione di temperatura in un mezzo in regime stazionario e in regime transitorio.
- Il secondo obiettivo è mostrare come si possono usare i circuiti termici per modellare un flusso termico in regime stazionario per geometrie semplici come lastra piana, cilindro, sfera e superfici estese (alette).
- Il terzo obiettivo è risolvere i problemi di conduzione in regime variabile utilizzando il metodo delle capacità concentrate

2

Sommario

- Introduzione all'analisi della conduzione
- Conduzione in regime stazionario
- Conduzione con generazione di energia
- Trasmissione del calore da superfici estese: le alette
- Conduzione in regime variabile

3

Introduzione all'analisi della conduzione

L'analisi della conduzione riguarda la determinazione della distribuzione di temperatura all'interno di un mezzo per determinate condizioni al contorno. Nota la distribuzione di temperatura, si può determinare la distribuzione del flusso termico utilizzando la legge di Fourier.

$$q_x'' = -\lambda \frac{dT}{dx} \qquad q_x = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$

q_x'' = flusso termico($\mathrm{W/m^2}$)

q_x = potenza termica(W)

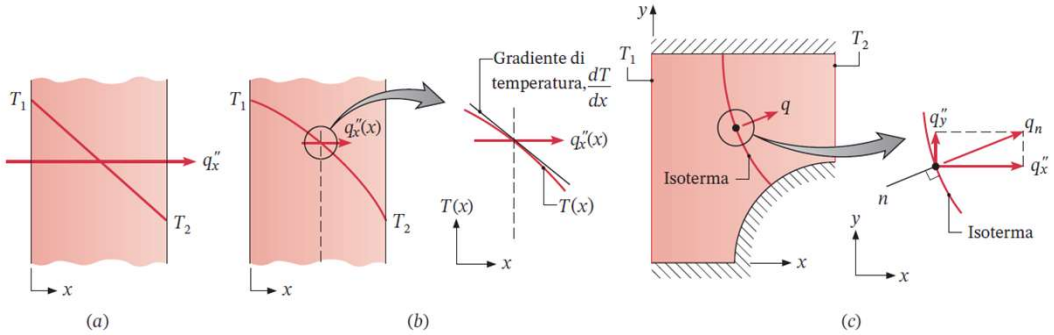
λ = conduttività termica ($\mathrm{W/(m \cdot K)}$)

$\frac{dT}{dx}$ = gradiente di temperatura ($\mathrm{K/m}$)

Se la distribuzione di temperatura è lineare, il gradiente ed il flusso termico sono costanti.

4

Introduzione all'analisi della conduzione



Nel caso di conduzione bidimensionale il flusso termico è mantenuto da un gradiente di temperatura in direzione "n", e può essere espresso in funzione delle sue componenti nelle direzioni x e y:

$$q''_n = q''_x + q''_y$$

5

Introduzione all'analisi della conduzione

La direzione del flusso termico sarà quindi sempre normale alle superfici *isoterme*.
Poichè il flusso termico è una quantità vettoriale, possiamo scrivere la *legge di Fourier* in una forma più generale

$$\boldsymbol{q}'' = -\lambda \nabla T = -\lambda \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial T}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial T}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Dove il simbolo ∇ ("Nabla") è un operatore vettoriale che, applicato al campo scalare di temperatura $T = T(x,y,z,t)$ da luogo al vettore "gradiente di temperatura" ∇T.
L'espressione generale del flusso termico è pertanto

$$\boldsymbol{q}'' = \boldsymbol{i}q''_x + \mathbf{j}q''_y + \boldsymbol{k}q''_z$$

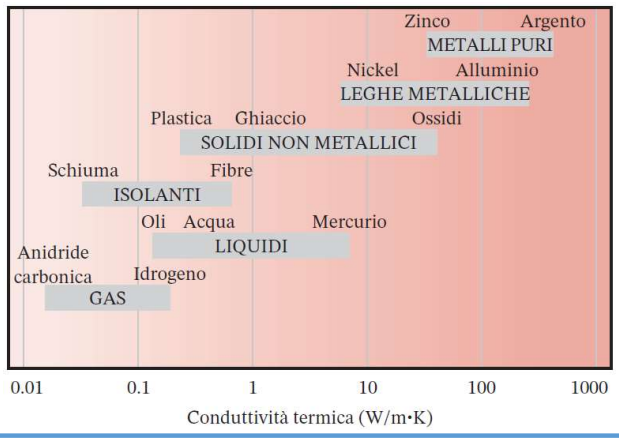
con

$$q''_x = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} \qquad q''_y = -\lambda\frac{\partial T}{\partial y} \qquad q''_z = -\lambda\frac{\partial T}{\partial z}$$

6

Introduzione all'analisi della conduzione

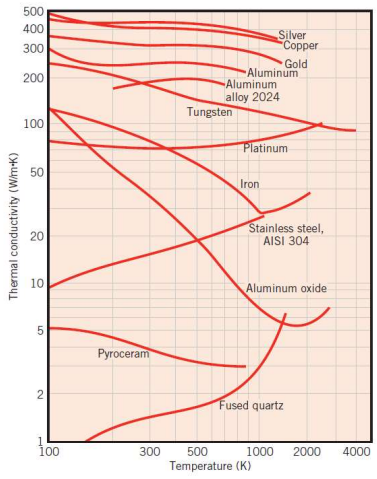
La legge di Fourier definisce un'importante proprietà del materiale:
la conduttività termica



7

Introduzione all'analisi della conduzione

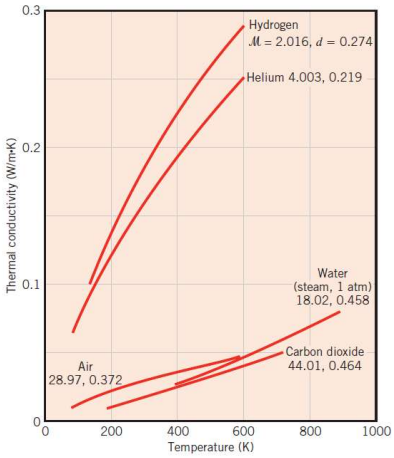
Conduttività termica di alcuni solidi



8

Introduzione all'analisi della conduzione

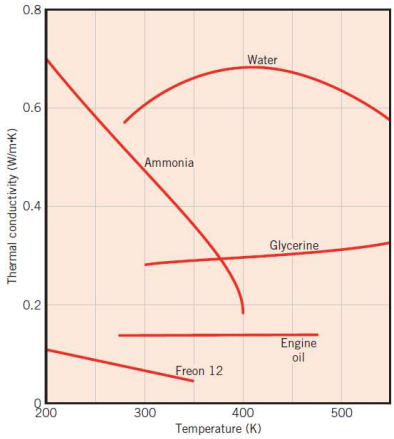
Conduttività termica di alcuni gas



9

Introduzione all'analisi della conduzione

Conduttività termica di alcuni liquidi



10

Introduzione all'analisi della conduzione

La legge di Fourier per mezzi anisotropi: cenni

- Le relazioni sinora viste valgono per *mezzi isotropi*, quali gas, liquidi ed una buona parte dei solidi: per tali mezzi il valore della *conduttività termica è indipendente dalla direzione*.
- Nei mezzi *anisotropi* (quali, ad esempio, legno, materiali compositi, laminati plastici e metallici etc.), la *conduttività termica manifesta variazioni direzionali*, ed in generale il flusso termico non è normale alle superfici isoterme.

In tale caso la conduttività termica è un tensore del second'ordine, che in coordinate cartesiane è esprimibile come

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

La superficie descritta da k_{ij} nello spazio è un *ellissoide*, ed i suoi assi principali sono chiamati *assi principali della conduttività*, mentre i coefficienti k_ξ, k_η, k_ζ rappresentano le *conduttività termiche principali*.

11

Introduzione all'analisi della conduzione

La legge di Fourier per mezzi anisotropi: cenni – *cont.*

Le componenti del flusso termico possono essere scritte, utilizzando la notazione tensoriale (somma implicita sugli indici ripetuti), nella forma

$$q_i'' = -k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}$$

E quindi, per esempio

$$q_x'' = -k_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} - k_{xy}\frac{\partial T}{\partial y} - k_{xz}\frac{\partial T}{\partial z}$$

- Flusso termico e gradiente di temperatura non sono più allineati.
- Lo diventano se le coordinate coincidono con gli *assi principali di conduttività*.

12

Introduzione all'analisi della conduzione

La legge di Fourier per mezzi anisotropi: cenni – *cont.*

I coefficienti di conducibilità devono obbedire ad alcune regole

$$k_{ij} = k_{ji} \quad i,j = 1, 2, 3$$

$$k_{ii} > 0$$

$$k_{ii}\, k_{jj} - k_{ij}^2 > 0$$

Per materiali *Ortotropici*, come il legno, le conduttività termiche principali si trovano lungo direzioni *mutuamente ortogonali*. In questo caso l'equazione della conduzione si semplifica notevolmente



Le proprietà del legno, e quindi la sua conducibilità, è diversa nelle tre direzioni principali: *assiale, radiale e circonferenziale*.

13

Introduzione all'analisi della conduzione

Equazione del calore (della conduzione): derivazione

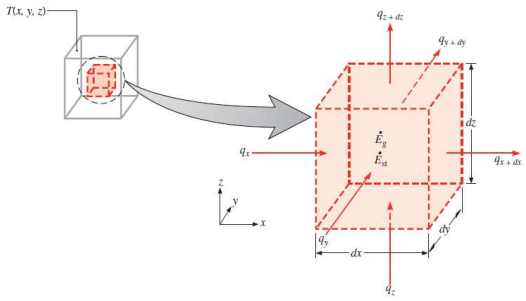
- L'obiettivo principale nell'analisi della conduzione è la determinazione del campo di temperatura $T = T(x,y,z,t)$ nel mezzo, note le proprietà termofisiche, le condizioni iniziali ed al contorno.
- Una volta noto il campo termico, il flusso termico conduttivo, in ogni punto, può essere determinato dalla legge di Fourier.
- L'approccio indicato si basa sull'applicazione del I Principio ad un volume differenziale $dx\, dy\, dz$ in un istante di tempo.
- Il risultato sarà un'equazione differenziale che, corredata delle opportune condizioni iniziali ed al contorno, sarà in grado di fornire il campo di temperatura nel sistema in esame.

14

Introduzione all'analisi della conduzione

Equazione del calore (della conduzione): derivazione – *cont.*

- Consideriamo un mezzo omogeneo, per il quale la temperatura è espressa in coordinate Cartesiane $T = T(x,y,z,t)$, le cui variazioni di volume siano trascurabili.
- Si consideri un volume di controllo infinitesimo (differenziale) $dx \cdot dy \cdot dz$

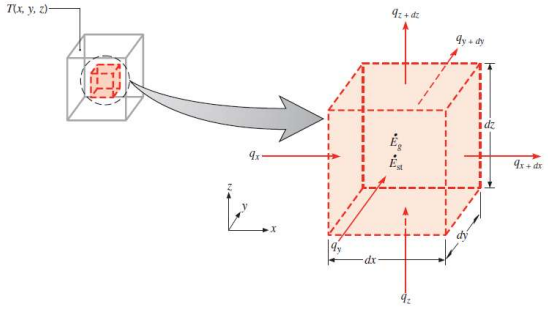


- Formuliamo il primo principio in un istante di tempo tenendo conto di tutti i contributi energetici.
- In assenza di moto o per moto uniforme, i soli contributi energetici sono quelli termici.
- In presenza di gradienti di temperatura, esistono scambi termici conduttivi attraverso le facce del volume elementare.
- Le potenze termiche conduttive perpendicolari alle superfici di controllo a x, y, z sono rispettivamente q_x, q_y e q_z.

15

Introduzione all'analisi della conduzione

Equazione del calore (della conduzione): derivazione – *cont.*



- Sviluppando in serie di Taylor e trascurando i termini di ordine superiore

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz$$

- Energia generata all'interno del sistema $\dot{E}_g = \dot{q}_g dx\, dy\, dz$
- Variazione dell'energia interna del sistema $\dot{E}_{st} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx\, dy\, dz$

16

Introduzione all'analisi della conduzione

Equazione del calore (della conduzione): derivazione – *cont.*

- Conservazione dell'energia (primo principio)

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \dot{E}_{st}$$

- Sostituendo i vari contributi

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q}_g dx\, dy\, dz - q_{x+d} - q_{y+dy} - q_{z+d} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx\, dy\, dz$$

$$\cancel{q_x} + \cancel{q_y} + \cancel{q_z} + \dot{q}_g dx\, dy\, dz - \cancel{q_x} - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \cancel{q_y} - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \cancel{q_z} - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx\, dy\, dz$$

$$\dot{q}_g dx\, dy\, dz - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx\, dy\, dz$$

- Ricordando che

$$q_x = -\lambda\, dy\, dz \frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_y = -\lambda\, dx\, dz \frac{\partial T}{\partial y} \qquad q_z = -\lambda\, dx\, dy \frac{\partial T}{\partial z}$$

17

Introduzione all'analisi della conduzione

Equazione del calore (della conduzione): derivazione – *cont.*

- Sostituendo e dividendo per $dx \cdot dy \cdot dz$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q}_g = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Con notazione vettoriale

$$\nabla(\lambda \nabla T) + \dot{q}_g = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

- In condizioni stazionarie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q}_g = 0$$

- Conducibilità termica costante

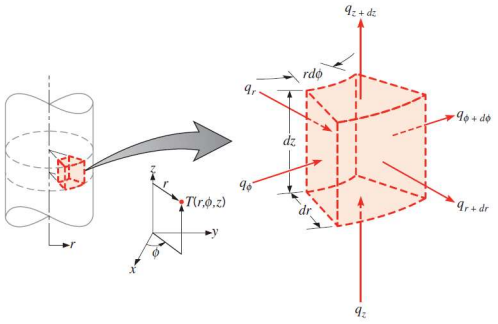
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_g}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Con $\alpha = \lambda/\rho c$ [m²/s] *diffusività termica* , proprietà del materiale

18

Introduzione all'analisi della conduzione

Equazione della conduzione in coordinate cilindriche

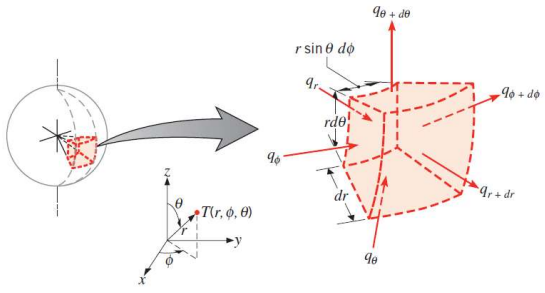


$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

19

Introduzione all'analisi della conduzione

Equazione della conduzione in coordinate sferiche



$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

20

Introduzione all'analisi della conduzione

Equazione del calore: risultati

Caso monodimensionale (1D): $T = T(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + q'''_g = 0 \rightarrow \text{Regime stazionario, con generazione di energia volumetrica}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right) + q'''_g = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0 \rightarrow \text{Regime stazionario, senza generazione di energia volumetrica}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right) = 0$$

$\rho \cdot c(\mathrm{J/m^3K}) \rightarrow$ capacità termica

$\alpha(\mathrm{m^2/s}) = \dfrac{\lambda}{\rho c} \rightarrow$ diffusività termica

21

Introduzione all'analisi della conduzione

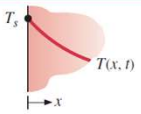
Condizioni al contorno e condizioni iniziali

- Primo tipo: Temperatura uniforme della superficie
- Secondo tipo: Flusso termico costante sulla superficie
- Terzo tipo: Condizione di convezione sulla superficie

Condizioni al contorno per l'equazione del calore sulla superficie (x = 0)

1. Temperatura superficiale costante

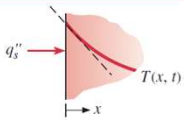
$$T(0,t) = T_s \qquad (16.6)$$



2. Flusso termico superficiale costante

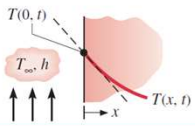
(a) Flusso di calore finito

$$-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = q''_s \qquad (16.7)$$



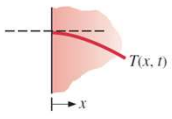
3. Condizione di convezione sulla superficie

$$-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h\left[T_\infty - T(0,t)\right] \qquad (16.9)$$



(b) Superficie adiabatica o isolata

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad (16.8)$$

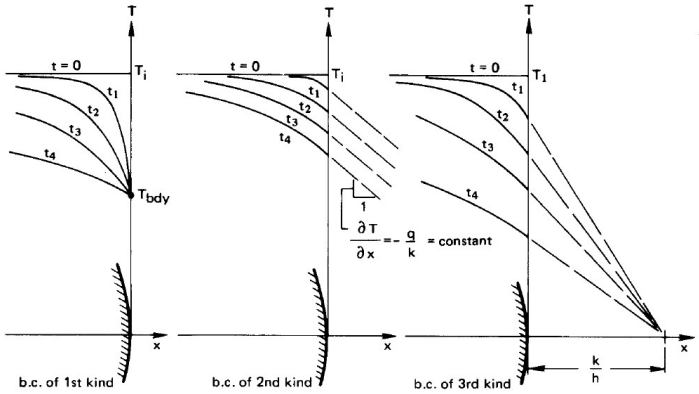


22

Introduzione all'analisi della conduzione

Condizioni al contorno e condizioni iniziali

Raffreddamento di un corpo soggetto a condizioni al contorno del *primo*, del *secondo* e del *terzo* tipo

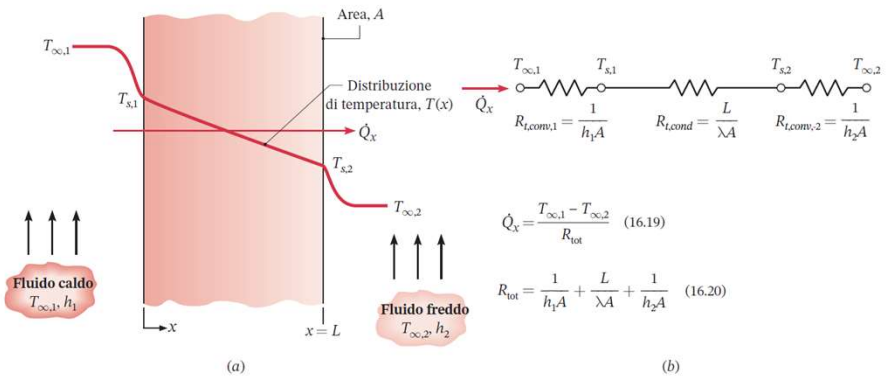


23

Conduzione in regime stazionario

Parete piana

Flusso termico attraverso una parete piana: (a) Distribuzione di temperatura. (b) Circuito termico equivalente



24

Conduzione in regime stazionario

Parete piana

Per la conduzione in regime stazionario e senza generazione di energia all'interno della parete

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)=0$$

Si integra due volte per ottenere la soluzione generale

$$T(x)=C_1x+C_2$$

Condizioni al contorno

$$T(0)=T_{s,1} \qquad T(L)=T_{s,2}$$

$$C_2=T_{s,1} \qquad T_{s,2}=C_1L+C_2=C_1L+T_{s,1} \qquad C_1=\frac{T_{s,2}-T_{s,1}}{L}$$

25

Conduzione in regime stazionario

Parete piana

Distribuzione di temperatura

$$T(x)=\left(T_{s,2}-T_{s,1}\right)\frac{x}{L}+T_{s,1}$$

Flusso di calore per conduzione (W/m^2)

$$q''_x=-\lambda\frac{dT}{dx}=\frac{\lambda}{L}\left(T_{s,1}-T_{s,2}\right)$$

Potenza termica (W) per la parete piana di area A

$$\dot{Q}_x=q''_xA=\frac{\lambda}{L}A\left(T_{s,1}-T_{s,2}\right)$$

26

Conduzione in regime stazionario

Resistenza termica e circuiti termici

Analogia tra la conduzione termica ed elettrica

Resistenza termica di conduzione per una parete piana

$$R_{\mathrm{t,cond}} \equiv \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{q_x} = \frac{L}{\lambda A}$$

La legge di Ohm fornisce una resistenza elettrica

$$R_{\mathrm{e}} = \frac{\mathfrak{E}_{s,1} - \mathfrak{E}_{s,2}}{I} = \frac{L}{\sigma_{\mathrm{e}} A}$$

Legge di Newton per la convezione

$$\dot{Q} = hA(T_s - T_\infty)$$

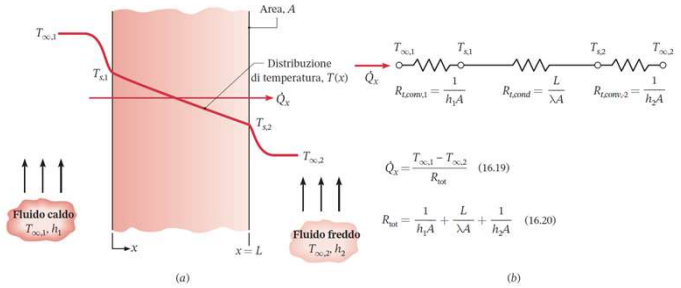
Resistenza termica per convezione da una superficie

$$R_{\mathrm{t,conv}} \equiv \frac{T_s - T_\infty}{\dot{Q}} = \frac{1}{hA}$$

27

Conduzione in regime stazionario

Resistenza termica e circuiti termici



$$\dot{Q}_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{1/h_1 A} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{L/\lambda A} = \frac{T_{s,2} - T_{\infty,2}}{1/h_2 A}$$

$$\dot{Q}_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{\mathrm{tot}}}$$

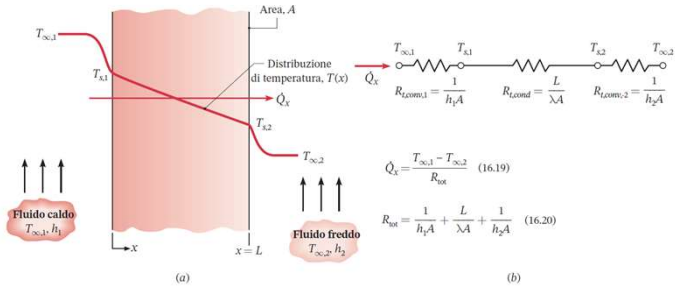
Le resistenze di conduzione e convezione sono in serie, ne consegue che la resistenza termica totale è:

$$R_{\mathrm{tot}} = R_{\mathrm{t,conv},1} + R_{\mathrm{t,cond}} + R_{\mathrm{t,conv},2} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{\lambda A} + \frac{1}{h_2 A}$$

28

Conduzione in regime stazionario

Resistenza termica e circuiti termici



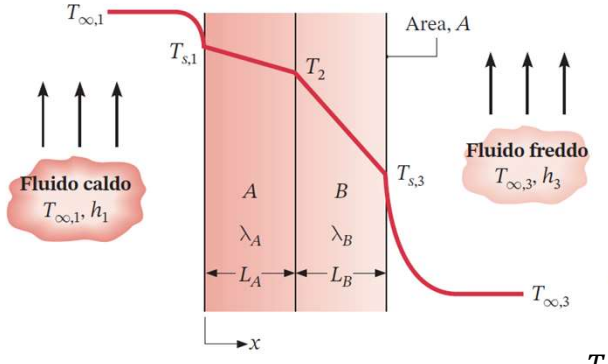
La resistenza termica per irraggiamento può essere definita come

$$R_{t,rad} = \frac{T_s - T_{sup}}{\dot{Q}_{rad}} = \frac{1}{h_{irr} A}$$

29

Conduzione in regime stazionario

Parete composita



$$\dot{Q}_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,3}}{R_{tot}} \qquad (16.22)$$

$$R_{tot} = [(1/h_1A) + (L_A/\lambda_A A) + (L_B/\lambda_B A) + (1/h_3 A)]$$

$$\dot{Q}_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,3}}{R_{tot}} \qquad \dot{Q}_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,3}}{\left(\frac{1}{h_1 A} + \frac{L_A}{\lambda_A A} + \frac{L_B}{\lambda_B A} + \frac{1}{h_3 A}\right)}$$

30

Conduzione in regime stazionario

Parete composita

$$\dot{Q}_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\frac{1}{h_1 A}} = \frac{T_{s,1} - T_2}{\frac{L_A}{\lambda_A A}} = \frac{T_2 - T_{\infty,2}}{\frac{L_B}{\lambda_B A}}$$

Quando si ha a che fare con sistemi compositi è utile il coefficiente di scambio termico totale U (o trasmittanza termica),

$$\dot{Q}_x \equiv UA\Delta T$$

$$U = \frac{1}{R_{tot} A} = \frac{1}{[(1/h_1) + (L_A/\lambda_A) + (L_B/\lambda_B) + (1/h_3)]}$$

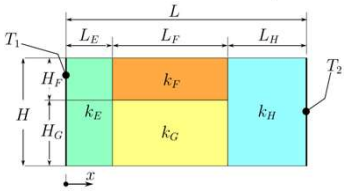
$$R_{tot} = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} = \frac{1}{UA}$$

31

Conduzione in regime stazionario

Resistenze in parallelo

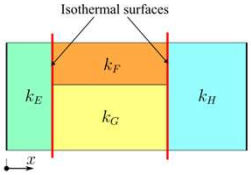
- È possibile e soprattutto *corretto* estendere l'analogia elettrotermica anche al caso di pareti composite? Ed in caso affermativo, con che grado di accuratezza?
- Esempio



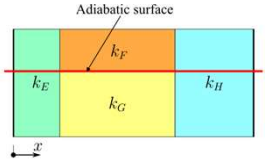
- Problema bidimensionale, *T = T(x, y)*
- E' accettabile l'analogia elettrotermica, assumendo T ≈ T(x)?
- Per determinare il valore della resistenza termica totale per unità di profondità, R' [K/W m], consideriamo due diverse ipotesi

L_E = 0.2 [m]; L_F = 0.5 [m]; L_H = 0.3 [m]; H_F = 0.2 [m]; H_G = 0.3 [m]

k_E = 25 [W/mK]; k_F = 5 [W/mK]; k_G = 100 [W/mK]; k_H = 25 [W/mK]



Superfici verticali isoterme



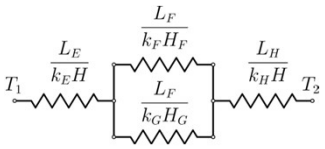
Superfici orizzontali adiabatiche

32

Conduzione in regime stazionario

Resistenze in parallelo – *cont.*

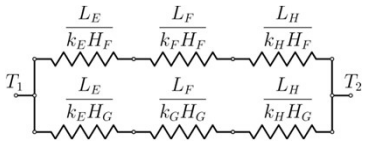
Reti elettriche equivalenti



Superfici verticali isoterme

$$R'_{iso} = \frac{L_E}{k_E H} + \frac{1}{\left(\frac{k_F H_F}{L_F} + \frac{k_G H_G}{L_F}\right)} + \frac{L_H}{k_H H}$$

$$\boxed{R'_{iso} = 0.0561\ [K/Wm]}$$



Superfici orizzontali adiabatiche

$$R'_{ad} = \frac{1}{\frac{1}{\left(\frac{L_E}{k_E H_F} + \frac{L_F}{k_F H_F} + \frac{L_H}{k_H H_F}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{L_E}{k_E H_G} + \frac{L_F}{k_G H_G} + \frac{L_H}{k_H H_G}\right)}}$$

$$\boxed{R'_{ad} = 0.0732\ [K/Wm]}$$

Si può dimostrare che R'_{iso} e R'_{ad} rappresentano, rispettivamente, il *limite inferiore* ed il *limite superiore* della resistenza termica totale

33

Conduzione in regime stazionario

Resistenze in parallelo – *cont.*

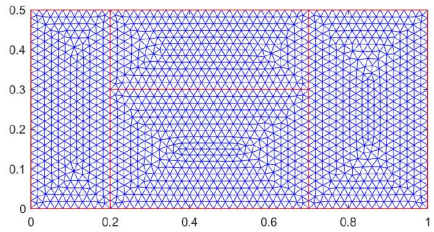
Norma *UNI EN ISO 6946: trasmittanza e resistenza termica di elementi opachi*

$$R_t = \frac{R_{iso} + R_{ad}}{2}$$

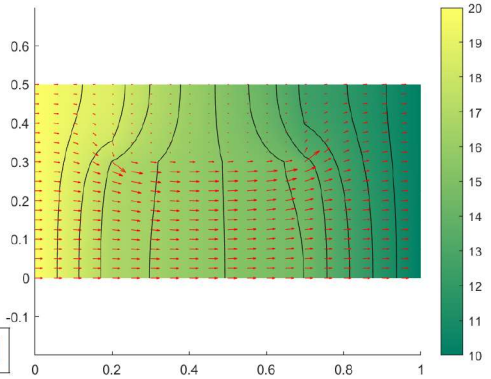
e nel nostro caso

$$\boxed{R'_t = 0.0647\ [K/Wm]}$$

Soluzione precisa attraverso MATLAB PDEtoolbox



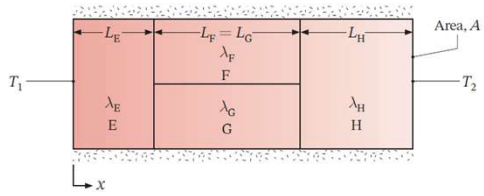
$$\boxed{R'_t = 0.0632\ [K/Wm]}$$

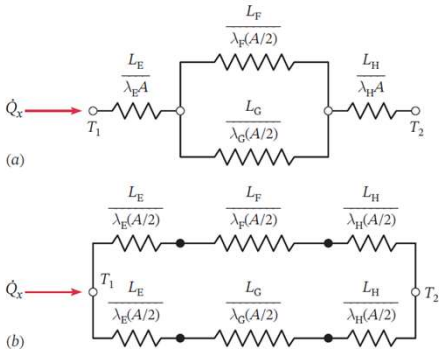


34

Conduzione in regime stazionario

Parete composita





La resistenza in serie $R_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} R_i$

La resistenza in parallelo $R_{\text{tot}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} R_i}$

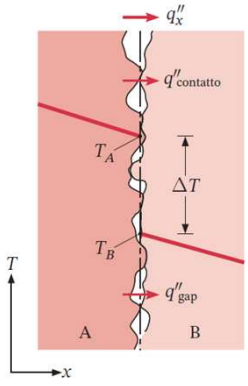
35

Conduzione in regime stazionario

Resistenza di contatto

La caduta di temperatura in corrispondenza dell'interfaccia tra i materiali può essere apprezzabile. La presenza di una resistenza di contatto non trascurabile è dovuta principalmente agli effetti della rugosità. I punti di contatto sono intervallati da spazi che possono essere riempiti con mezzi di interfaccia come gas o colle

$$R''_{t,c} = \frac{T_A - T_B}{q''_x}$$

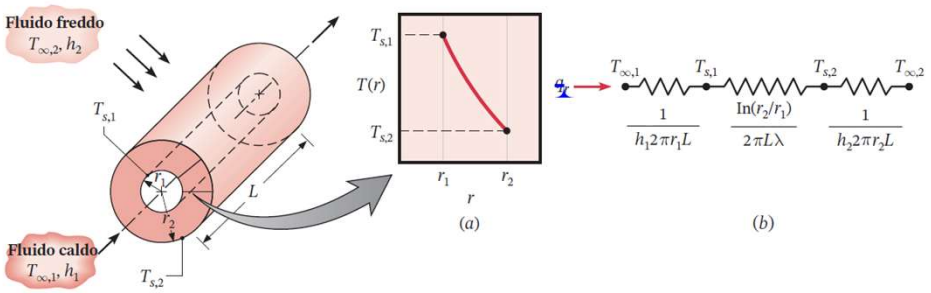


36

Conduzione in regime stazionario

Sistemi radiali monodimensionali: cilindro

I sistemi cilindrici e sferici spesso sono soggetti a gradienti di temperatura solo nella direzione radiale e possono quindi essere trattati come sistemi monodimensionali



37

Conduzione in regime stazionario

Sistemi radiali monodimensionali: cilindro

Equazione del calore per un cilindro in regime stazionario, con una conduttività termica costante e senza generazione di energia interna

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

$$r\frac{dT}{dr} = C_1 \qquad T(r) = C_1 \ln r + C_2 \qquad T(r_1) = T_{s,1} \qquad T(r_2) = T_{s,2}$$

$$C_1 = \frac{(T_{s,2} - T_{s,1})}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \qquad C_1 = T_{s,1} - \frac{(T_{s,2} - T_{s,1})}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln r_1 \qquad T(r) = \frac{(T_{s,2} - T_{s,1})}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + T_{s,1}$$

38

Conduzione in regime stazionario

Sistemi radiali monodimensionali: cilindro

Legge di Fourier per il sistema di coordinate cilindriche

$$Q_r = -\lambda A_r \frac{dT}{dr} = -\lambda(2\pi r L)\frac{dT}{dr}$$

Potenza termica scambiata

$$\dot{Q}_r = -\lambda 2\pi L \frac{dT}{dr} = -\lambda 2\pi L \frac{1}{r}\frac{(T_{s,2} - T_{s,1})}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi L\lambda(T_{s,1} - T_{s,2})}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Resistenza termica in una parete cilindrica

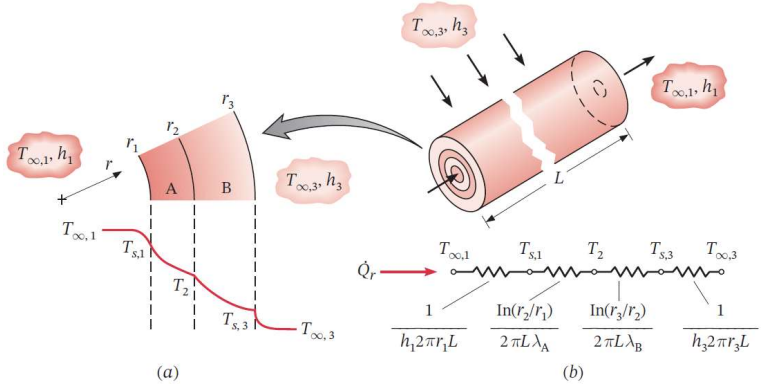
$$R_{t,cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi L\lambda}$$

39

Conduzione in regime stazionario

Sistemi radiali monodimensionali: cilindro

Cilindro cavo composito con convezione su entrambe le superfici: a) Distribuzione di temperatura. (b) Circuito termico equivalente



40

Conduzione in regime stazionario

Sistemi radiali monodimensionali: cilindro

Potenza termica scambiata

$$\dot{Q}_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,3}}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{ln(r_2/r_1)}{2\pi L \lambda_A} + \frac{ln(r_3/r_2)}{2\pi L \lambda_B} + \frac{1}{2\pi r_3 L h_3}}$$

In termini di coefficiente di scambio termico totale

$$\dot{Q}_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,3}}{R_{tot}} = UA\left(T_{\infty,1} - T_{\infty,3}\right)$$

Definendo U in termini di area interna A_1

$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1}{\lambda_A}\ln(r_2/r_1) + \frac{r_1}{\lambda_B}\ln(r_3/r_2) + \frac{r_1}{r_3}\frac{1}{h_3}}$$

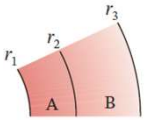
$$U_1 A_1 = U_2 A_2 = U_3 A_3 = R_{tot}^{-1}$$

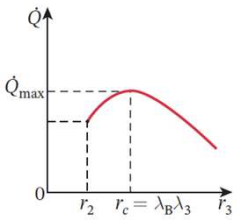
41

Conduzione in regime stazionario

Il raggio critico

lo strato B ha una propria resistenza termica conduttiva $R_{cond,\ B}$ che incrementa la resistenza totale ma nel contempo riduce la resistenza convettiva superficiale $R_{cond,\ est}$ a causa dell'incremento dell'area di scambio termico convettivo



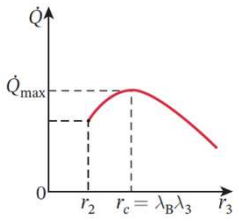


$$\frac{d\dot{Q}}{dr_3} = \frac{d\left[\frac{2\pi L\left(T_{\infty,1} - T_{\infty,3}\right)}{\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{ln(r_2/r_1)}{\lambda_A} + \frac{ln(r_3/r_2)}{\lambda_B} + \frac{1}{h_3 r_3}}\right]}{dr_3} = 0$$

42

Conduzione in regime stazionario

Il raggio critico



$$\frac{d\dot{Q}}{dr_3} = 2\pi L\left(T_{\infty,1} - T_{\infty,3}\right) \cdot \frac{\frac{1}{\lambda_B r_3} - \frac{1}{h_3 r_3^2}}{-\left[\frac{1}{h_1 r_1} + \frac{ln(r_2/r_1)}{\lambda_A} + \frac{ln(r_3/r_2)}{\lambda_B} + \frac{1}{h_3 r_3}\right]^2} = 0$$

$$L > 0 \qquad T_{\infty,1} > T_{\infty,3} \qquad r_2 \le r_3 < \infty$$

Raggio critico in geometria cilindrica r_c

$$\frac{1}{\lambda_B} - \frac{1}{h_3 r_3} = 0 \rightarrow r_3 = \frac{\lambda_B}{h_3} = r_c$$

Raggio critico del guscio sferico $r_{c,sfera}$

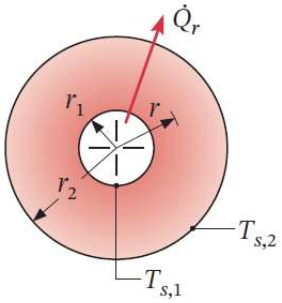
$$r_{c,sfera} = \frac{2\lambda}{h}$$

isolamento termico → $r > r_c$, dissipazione → $r = r_c$

43

Conduzione in regime stazionario

La sfera



Equazione del calore per una sfera $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = 0$

$$r^2\frac{dT}{dr} = C_1 \qquad T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

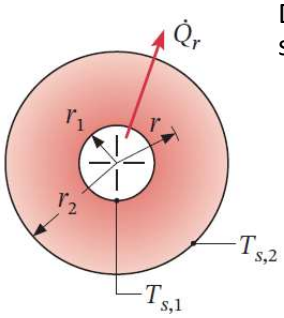
Condizioni al contorno: $T(r_1) = T_{s,1}$ $\quad T(r_2) = T_{s,2}$

$$C_1 = \frac{\left(T_{s,2} - T_{s,1}\right)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \qquad C_2 = T_{s,1} - \frac{\left(T_{s,2} - T_{s,1}\right)}{\frac{r_1}{r_2} - 1}$$

44

Conduzione in regime stazionario

La sfera



Distribuzione di temperatura nel sistema in coordinate sferiche

$$T(r) = \frac{(T_{s,2} - T_{s,1})}{1 - (r_1/r_2)}[1 - (r_1/r)] + T_{s,1}$$

Legge di Fourier per un sistema di coordinate sferiche

$$\dot{Q}_r = -\lambda A_r \frac{dT}{dr} = -\lambda(4\pi r^2)\frac{dT}{dr}$$

Potenza termica

$$\dot{Q}_r = -\lambda 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi\lambda(T_{s,1} - T_{s,2})}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

Resistenza termica in una parete sferica

$$R_{\text{t,cond}} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

45

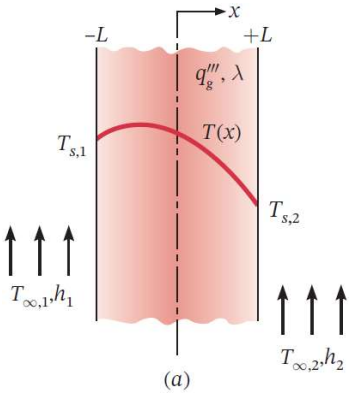
Conduzione con generazione di energia

- Si considera ora l'effetto supplementare sulla distribuzione di temperatura di processi che possono avvenire all'interno del mezzo
- Verranno trattate geometrie semplici, soggette a una generazione di energia nell'unità di tempo uniforme all'interno del volume
- Per queste situazioni non si può rappresentare il mezzo come un circuito termico, ma si devono risolvere le equazioni del calore per ottenere la distribuzione di temperatura e da qui il flusso di calore.

46

Conduzione con generazione di energia

Parete piana: condizioni al contorno asimmetriche



Equazione del calore $\dfrac{d^2T}{dx^2} + \dfrac{q'''_g}{\lambda} = 0$

La soluzione generale per la distribuzione di temperatura è

$$T = -\frac{q'''_g}{2\lambda}x^2 + C_1 x + C_2 \qquad T(-L) = T_{s,1} \qquad T(L) = T_{s,2}$$

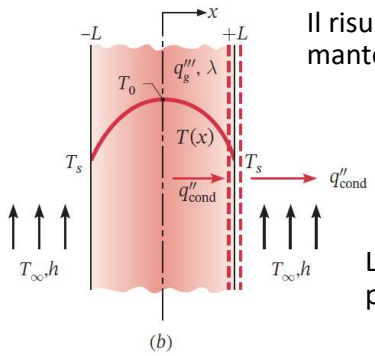
$$C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2L} \qquad C_2 = \frac{q'''_g}{2\lambda}L^2 + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2}$$

$$T(x) = \frac{q'''_g L^2}{2\lambda}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2}\frac{x}{L} + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2}$$

47

Conduzione con generazione di energia

Parete piana: condizioni al contorno simmetriche



Il risultato precedente si semplifica quando entrambe le superfici sono mantenute alla stessa temperatura

$$T_{s,1} = T_{s,2} \equiv T_s$$

$$T(x) = \frac{q'''_g L^2}{2\lambda}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + T_s$$

La temperatura massima sarà presente nel piano di mezzeria x = 0:

$$T(0) \equiv T_0 = \frac{q'''_g L^2}{2\lambda} + T_s$$

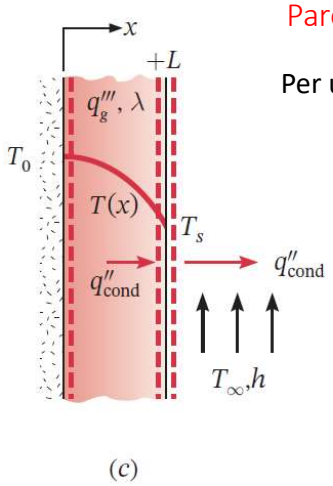
$$\frac{T(x) - T_0}{T_s - T_0} = \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

È importante notare che, in corrispondenza del piano di simmetria il gradiente di temperatura è uguale a zero

48

Conduzione con generazione di energia

Parete piana: superficie adiabatica del piano medio



(c)

Per usare i precedenti risultati, la temperatura superficiale Ts deve essere nota

$$x = L \qquad q''_{cond} = q''_{conv}$$

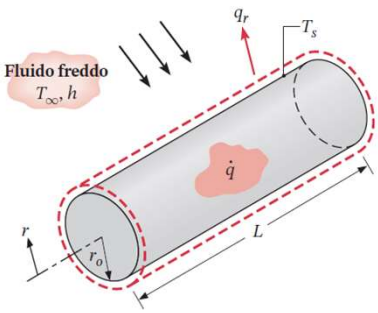
$$-\lambda \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L} = h(T_s - T_\infty) = q'''_g L \qquad T_s = T_\infty + \frac{q'''_g L}{h}$$

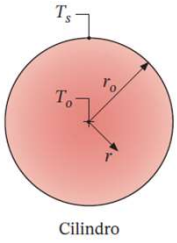
$$\dot{Q}_g = \dot{E}_u \qquad \dot{q} L = h(T_s - T_\infty)$$

Conduzione con generazione di energia

Sistemi radiali con generazione di energia

Seguendo la stessa metodologia utilizzata per la parete piana, il bilancio energetico è scritto per un sistema differenziale monodimensionale, in un sistema di coordinate radiali (cilindriche).



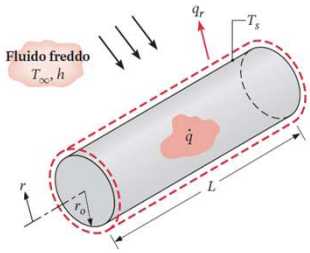


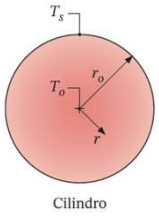
Equazione del calore per un cilindro con una conduttività termica costante

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{q'''_g}{\lambda} = 0$$

Conduzione con generazione di energia

Sistemi radiali con generazione di energia





$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{q_g'''}{2\lambda}r^2 + C_1$$

$$T(r) = -\frac{q_g'''}{4\lambda}r^2 + C_1\ln(r) + C_2$$

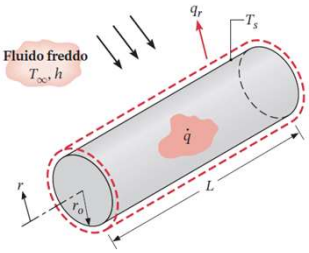
$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0 \quad \text{(simmetria)} \qquad T(r_0) = T_s \qquad C_2 = T_s + \frac{q_g''' r_0^2}{4\lambda}$$

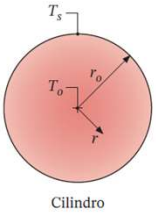
Distribuzione di temperatura $$T(r) = \frac{q_g''' {r_o}^2}{4\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{{r_0}^2}\right) + T_s$$

51

Conduzione con generazione di energia

Sistemi radiali con generazione di energia





Distribuzione della temperatura in forma adimensionale

$$\frac{T(r) - T_s}{T_0 - T_s} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$$

$$-\dot{Q}_u + \dot{Q}_g = 0 \qquad -h(2\pi r_0 L)(T_s - T_\infty) + q_g'''\left(\pi r_0^2 L\right) = 0$$

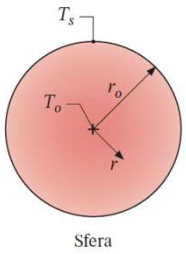
$$T_s = T_\infty + \frac{q_g''' r_0}{2h}$$

52

Conduzione con generazione di energia

Sistemi radiali con generazione di energia

Determinazione della temperatura radiale nella sfera



Sfera

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{q'''_g}{\lambda}=0 \qquad T(r)=-\frac{q'''_g}{6\lambda}r^2+\frac{C_1}{r}+C_2$$

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0}=0 \qquad T(r_0)=T_s$$

$$T(r)=\frac{q'''_g {r_o}^2}{6\lambda}\left(1-\frac{r^2}{{r_0}^2}\right)+T_s \qquad T_s=T_\infty+\frac{q'''_g r_0}{3h}$$

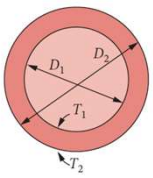
53

Conduzione con generazione di energia

Fattore di forma per la conduzione tra due superfici isoterme

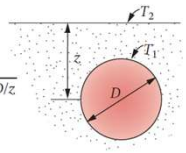
Uno strato sferico

$$S=\frac{2\pi D_1 D_2}{D_2-D_1}$$



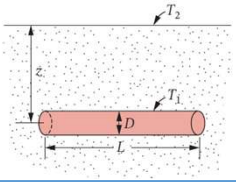
Sfera isoterma interrata in un mezzo semi-infinito

$$S=\frac{2\pi D}{1-0.25D/z}$$



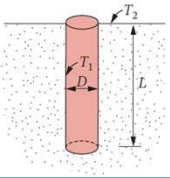
Cilindro isotermo di lunghezza L interrato in un mezzo semi-infinito ($L >> D$ e $z > 1.5D$)

$$S=\frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$$



Cilindro verticale isotermo di lunghezza L interrato in un mezzo semi-infinito ($L >> D$)

$$S=\frac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$$



Potenza termica scambiata

$$\dot{Q}=S\lambda_m(T_1-T_2)$$

La resistenza termica associata al fattore di forma

$$R_s=\frac{1}{S\lambda_m}$$

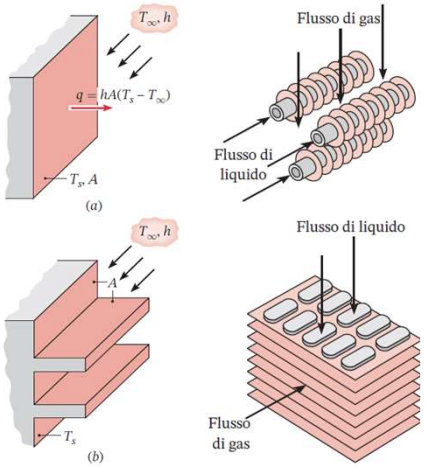
54

Trasmissione del calore da superfici estese: le alette

Il flusso termico scambiato nell'unità di tempo può essere aumentato incrementando l'area della superficie attraverso cui si verifica la convezione.

(a) Superficie liscia.

(b) Superficie alettata.

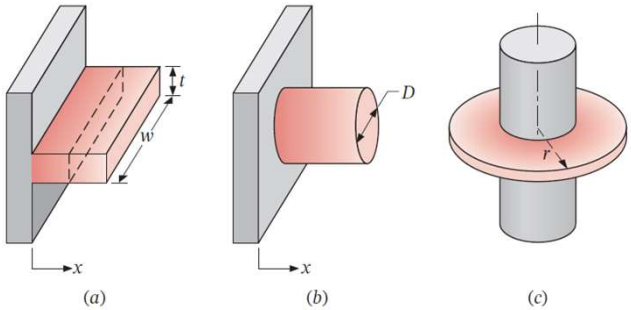


Schema di un tipico tubo alettato negli scambiatori di calore.

55

Trasmissione del calore da superfici estese: le alette

Analisi dello scambio termico per conduzione e convezione



Alette piane con sezione trasversale uniforme:

(a)Alette piane rettangolari

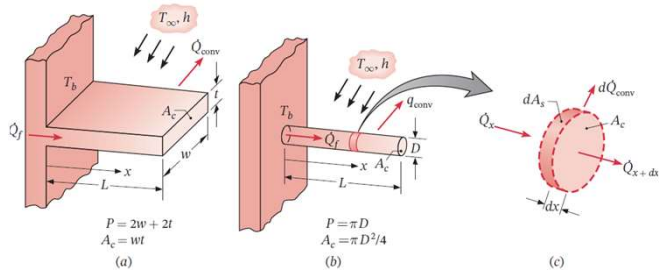
(b) Alette piane cilindriche

(c) Aletta anulare con sezione trasversale rettangolare

56

Trasmissione del calore da superfici estese: le alette

Analisi dello scambio termico per conduzione e convezione



Applicando il principio di conservazione dell'energia all'elemento differenziale di (c)

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} - d\dot{Q}_{\text{conv}} = 0$$

$$\dot{Q}_x = -\lambda A_c \frac{dT}{dx}$$

Esprimendo il flusso termico utilizzando una serie di Taylor troncata al secondo ordine di accuratezza

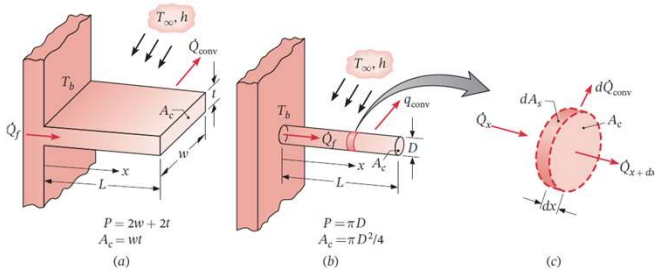
$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{dq_x}{dx} dx$$

$$\dot{Q}_{x+dx} = -\lambda A_c \frac{dT}{dx} - \lambda A_c \frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right) dx$$

57

Trasmissione del calore da superfici estese: le alette

Analisi dello scambio termico per conduzione e convezione



Il flusso termico per convezione si può esprimere come:

$$d\dot{Q}_{\text{conv}} = h dA_s (T - T_\infty) = hP(T - T_\infty)dx$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda A_c}(T - T_\infty) = 0$$

θ Temperatura d'eccesso $\quad \theta(x) = T(x) - T_\infty$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

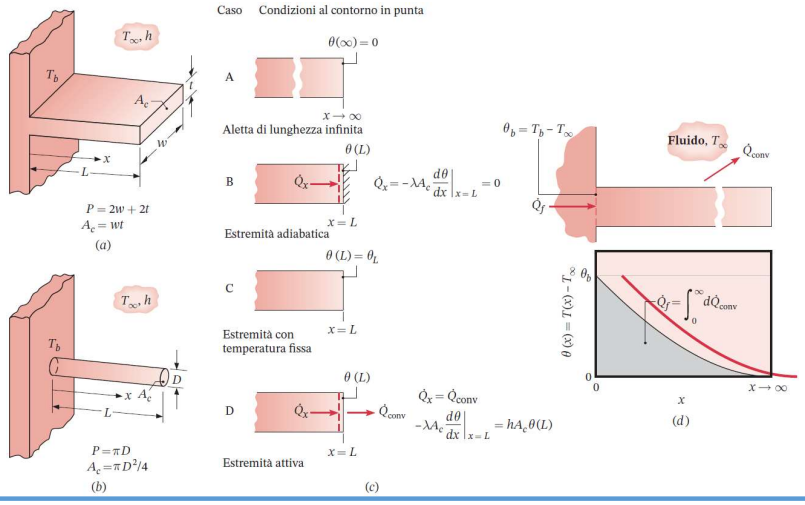
m parametro dell'aletta $\quad m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A_c}}$

Soluzione generale $\quad \theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2\, e^{-mx}$

58

Trasmissione del calore da superfici estese: le alette

Distribuzione della temperatura sull'aletta e flusso termico



59

Trasmissione del calore da superfici estese: le alette

Distribuzione della temperatura sull'aletta e flusso termico

Prima condizione al contorno

$$\theta(\infty) = T(\infty) - T_\infty = 0$$

$$0 = C_1 e^{\infty} + C_2 e^{-\infty} \rightarrow C_1 = 0$$

Seconda condizione al contorno T(0) = Tb:

$$\theta(0) = T_b - T_\infty = \theta_b$$

$$\theta_b = C_1 e^{0} + C_2 e^{-0} \rightarrow C_2 = \theta_b$$

Distribuzione della temperatura nell'aletta infinita

$$\theta(x) = \theta_b e^{-mx}$$

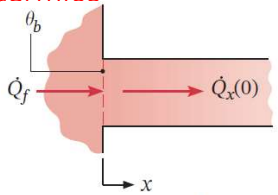
60

Trasmissione del calore da superfici estese: le alette

Distribuzione della temperatura sull'aletta e flusso termico

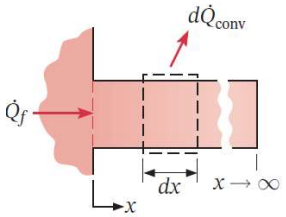
Applicazione della Legge di Fourier alla base dell'aletta, x = 0

$$\dot{Q}_\mathrm{f} = -\lambda A_c \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -\lambda A_c \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = -\lambda A_c\left(-m\theta_b e^{-m(0)}\right)$$



Flusso di calore nell'aletta $\dot{Q}_\mathrm{f} = \sqrt{hP\lambda A_c}\,\theta_b$

Utilizzando la Legge di Newton per il raffreddamento



$$\dot{Q}_\mathrm{f} = \dot{Q}_\mathrm{conv} = \int_0^\infty d\dot{Q}_\mathrm{conv}$$

$$\dot{Q}_\mathrm{f} = \int_0^\infty h[T(x) - T_\infty]Pdx = \int_0^\infty h\theta(x)Pdx = hP\theta_b \int_0^\infty e^{-mx}dx = hPm^{-1}\theta_b = \sqrt{hPkA_c}\,\theta_b$$

61

Trasmissione del calore da superfici estese: le alette

Parametri delle prestazioni di un'aletta

Efficacia dell'aletta $\varepsilon_\mathrm{f} = \dfrac{\dot{Q}_f}{hA_c\theta_b}$

Resistenza di un'aletta $R_{t,f} = \dfrac{\theta_b}{\dot{Q}}$

$R_{t,b} = \dfrac{1}{hA_c} \rightarrow \varepsilon_\mathrm{f} = \dfrac{R_{t,b}}{R_{t,f}}$

Rendimento dell'aletta $\eta_f \equiv \dfrac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_\mathrm{max}} = \dfrac{\dot{Q}_f}{hA_f\theta_b}$

62

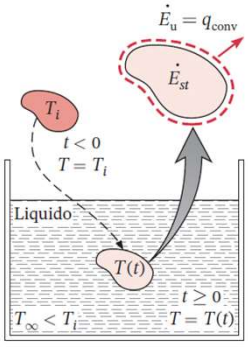
Conduzione in regime variabile

- La conduzione in regime variabile (o non stazionaria) è dovuta a una variazione nel tempo delle condizioni all'interno del sistema e/o dell'ambiente circostante.
- In questo paragrafo verrà analizzata la conduzione in regime variabile dovuta a un cambiamento delle condizioni al contorno convettive.
- L'obiettivo è di sviluppare metodi per determinare la dipendenza dal tempo della distribuzione di temperatura all'interno di un oggetto durante il transitorio, oltre che la determinazione dello scambio di calore fra oggetto e ambiente.
- Se la temperatura dell'oggetto è approssimativamente uniforme, può essere usata un'unica temperatura per caratterizzare la risposta dell'oggetto nel tempo.
- Si utilizza un bilancio energetico complessivo, detto metodo delle capacità concentrate (*lumped capacitance method*).

63

Conduzione in regime variabile

Andamento della temperatura nel tempo: bilancio energetico



Si consideri una barra inizialmente a una temperatura uniforme T_i che viene improvvisamente immersa in un bagno liquido di temperatura inferiore, $T_\infty < T_i$. Se il raffreddamento inizia al tempo t = 0, la temperatura della barra, T(t), diminuirà per il tempo t > 0, fino a raggiungere T_∞.

Bilancio energetico globale sul solido.

Il bilancio energetico mette in relazione la potenza termica scambiata per convezione sulla superficie con la variazione nell'unità di tempo dell'energia interna. Dalla

$$\dot{Q}_i + \dot{Q}_g - \dot{Q}_u = -\frac{dU}{dt}$$

$$-\dot{Q}_u = -\frac{dU}{dt} \qquad -hA_s(T - T_\infty) = \rho V c \frac{dT}{dt} \qquad \theta \equiv T - T_\infty$$

64

Conduzione in regime variabile

Andamento della temperatura nel tempo: bilancio energetico

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dt} \qquad \frac{\rho V c}{hA_s}\frac{d\theta}{dt} = -\theta$$

Condizioni iniziali: $t = 0$ $T(0) = T_i$

$$\frac{\rho V c}{hA_s}\int_{\theta_i}^{\theta}\frac{d\theta}{\theta} = -\int_0^t dt \qquad \theta_i \equiv T_i - T_\infty$$

Andamento della temperatura nel tempo

$$\frac{\rho V c}{hA_s}\ln\frac{\theta_i}{\theta} = t \qquad \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left[-\left(\frac{hA_s}{\rho c V}\right)t\right]$$

65

Conduzione in regime variabile

Andamento della temperatura nel tempo: bilancio energetico

I risultati precedenti indicano che la differenza fra le temperature del solido e del fluido devono diminuire esponenzialmente a zero mentre il tempo tende all'infinito.

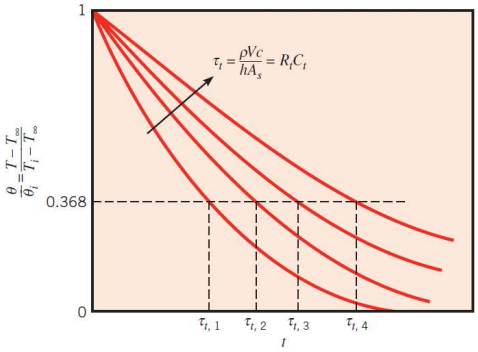
Inoltre la quantità (ρVc/hA$_s$) può essere interpretata come una costante di tempo termica. Corrisponde al tempo necessario affinché il valore di ϑ diminuisca sino a raggiungere il 36.8% di ϑ_i.

$$\tau_t = \left(\frac{1}{hA_s}\right)(\rho c V) = R_t C_t$$

$R_t = Resistenza\ allo\ scambio\ termico\ per\ convezione$

$C_t = Capacità\ termica\ concentrata\ del\ solido$

Andamento della temperatura nel tempo per sistemi con diversa costante di tempo



66

Conduzione in regime variabile

Andamento della temperatura nel tempo: bilancio energetico

Determinazione dell'energia totale scambiata fino in un certo tempo

$$Q = \int_0^t \dot{Q}dt = hA_s \int_0^t \theta dt$$

Sostituendo per ϑ dalla

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \exp\left[-\left(\frac{hA_s}{\rho cV}\right)t\right]$$

Si ottiene

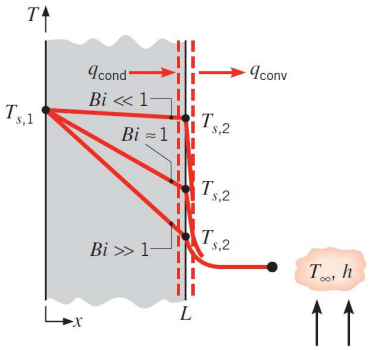
$$Q = (\rho cV)\theta_i \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_t}\right)\right]$$

67

Conduzione in regime variabile

Validità del metodo delle capacità concentrate

Bilancio energetico di superficie in condizioni stazionarie



$$\dot{Q}_{\text{cond}} = \dot{Q}_{\text{conv}}$$

$$\frac{\lambda A}{L}(T_{s,1} - T_{s,2}) = hA(T_{s,2} - T_\infty)$$

$$\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{T_{s,2} - T_\infty} = \frac{\left(\frac{L}{\lambda A}\right)}{\left(\frac{1}{hA}\right)} = \frac{R_{\text{cond}}}{R_{\text{conv}}} = \frac{hL}{\lambda} \equiv Bi$$

Bi è un parametro adimensionale chiamato il *Numero di Biot*

68

Conduzione in regime variabile

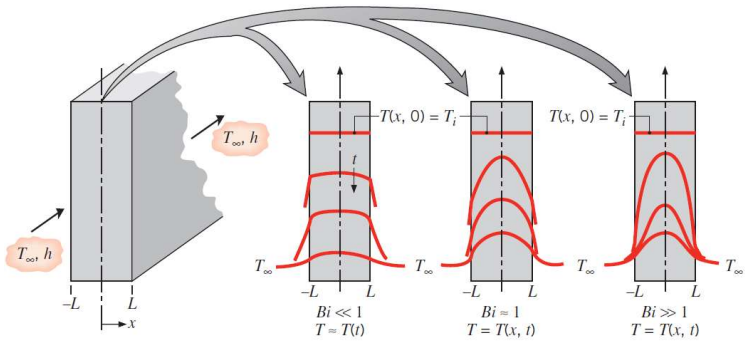
Validità del metodo delle capacità concentrate

Se Bi << 1, la resistenza conduttiva all'interno del solido è molto più piccola della resistenza convettiva attraverso lo strato limite del fluido, quindi l'ipotesi di una distribuzione uniforme della temperatura è ragionevole.

Criterio di validità per applicazione del metodo delle capacità concentrate:

$$Bi = \frac{h \cdot L_c}{\lambda} < 0.1$$

$L_c =$ Lunghezza caratteristica



69

Conduzione in regime variabile

Validità del metodo delle capacità concentrate

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$$ Diffusività termica

$$L_c = \frac{V}{A_s}$$

$$Bi = \frac{hL_c}{\lambda}$$

$$\frac{hA_s t}{\rho V c} = \frac{ht}{\rho c L_c} = \frac{hL_c}{\lambda}\frac{\lambda}{\rho c}\frac{t}{L_c^2} = \frac{hL_c}{\lambda}\frac{\alpha t}{L_c^2}$$ oppure $$\frac{hA_s t}{\rho V c} = Bi \cdot Fo$$

$$Fo \equiv \frac{\alpha t}{{L_c}^2}$$ Numero di Fourier

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp[-Bi \cdot Fo]$$

70

Conduzione in regime variabile

Metodo delle capacità concentrate: caso generale

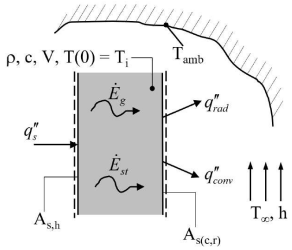


Figura 1: Processi energetici per sistemi a temperatura uniforme.

Primo principio per sistemi chiusi

$$\rho V c \frac{dT}{d\tau} = q''_s A_{s,h} + \dot{E}_g - \left(q''_{conv} + q''_{rad}\right) A_{s|(c,r)}$$

esplicitando le espressioni note per i flussi termici specifici

$$\rho V c \frac{dT}{d\tau} = q''_s A_{s,h} + \dot{E}_g - \left[h\left(T - T_\infty\right) + \epsilon\sigma\left(T^4 - T^4_{amb}\right)\right] A_{s(c,r)}$$

- Equazione differenziale non-lineare, non omogenea del primo ordine, che in generale richiede di venire risolta numericamente, utilizzando uno dei numerosi pacchetti, linguaggi e sistemi disponibili, ad esempio *MATLAB, MATHEMATICA, Python odeint, Julia OrdinaryDiffEq.jl* etc.
- Soluzioni analitiche esatte si possono ottenere in alcuni casi semplici (v. Moodle).

71

Conduzione in regime variabile

Solido semi-infinito

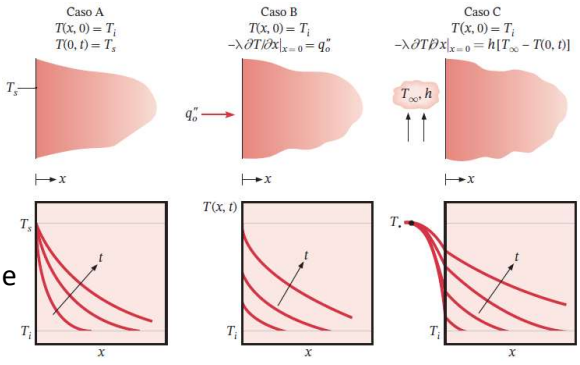
Tale solido si estende all'infinito in una sola direzione ed è caratterizzato da una singola superficie di bordo. Esso può essere usato per determinare il trasferimento di calore in regime variabile vicino alla superficie della terra

Condizioni al contorno:

$T(x,0) = T_i$

$T(x \to \infty, t) = T_i$

Tre condizioni superficiali: (A) temperatura di superficie costante, (B) flusso termico sulla superficie costante (C) convezione superficiale



72