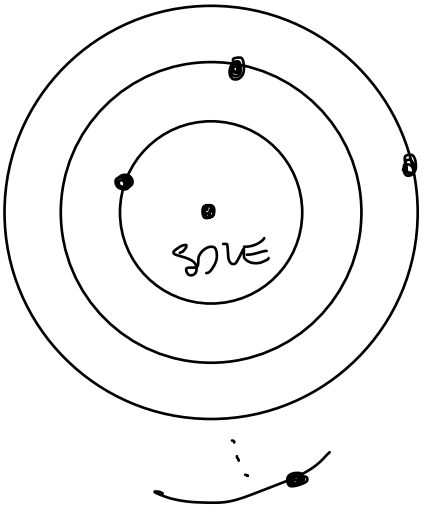
CAPITOLO 7

LEGGE GRAVITAZIONE UNIVERSALE → per derivarla ci serviamo del MODELLO SISTEMA SOLARE

LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE



① Sole e pianeta come punti materiali

② Sistema inerziale: dove il sole è in quiete

③ Pianeta hanno orbite circolari $a_c = \frac{v^2}{R}$

④ Unica forza agente sul pianeta è la forza gravitazionale del Sole.

DIPENDENZA DALLA DISTANZA → Possiamo misurare il periodo T e il raggio medio R per ogni pianeta, e $v = \frac{2\pi R}{T}$

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 \frac{1}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

(ex) Luna $a_L = 5.929\ m/s^2$

Quello che si nota è che $a_c R^2 = k_S$, cioè è COSTANTE PER OGNI PIANETA, con $k_S = 1.33 \cdot 10^{20}\ m^3/s^2$

$$a_c = \frac{k_S}{R^2} \longrightarrow F_{Sp} = M_p\left(\frac{k_S}{R^2}\right) = \frac{k_S M_p}{R^2}$$

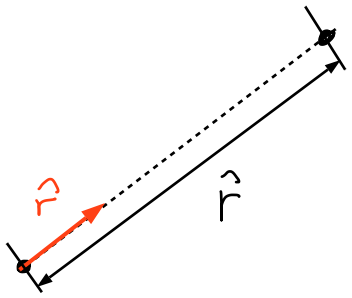
NB FORZA GRAVITAZIONALE DECRESCE $\frac{1}{R^2}$ → Legge dell'inverso del quadrato

DIPENDENZA DALLA MASSA → Il 3° principio di Newton, se applicato qui, impone che ci sia una coppia di forze date da reazione, $\vec{F}_{sp}$ e $\vec{F}_{ps}$, tra sole e pianeta

NB Chi attrae chi, è solo una CONVENZIONE, quindi è giusto pensare che la forza gravitazionale dipenderà da entrambe le masse

$$F_{sp} \propto m_p \qquad F_{ps} \propto m_s \rightarrow F_{sp} = F_{ps} = \frac{G m_p m_s}{R^2}$$

LEGGE DELLA FORZA GRAVITAZIONALE PER CORPI PUNTIFORMI → Forza attrattiva, dalla particella 1 alla particella 2, direzione versore $\hat{r}$



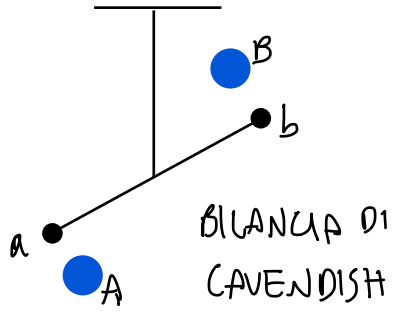
$$\vec{F}_{12} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

NB Possiamo fare il limite con la forza peso e vedere perché $\vec{g}$ è indipendente dal corpo, ma dipende solo dalla Terra

$$\vec{F} = m\vec{g} \rightarrow |\vec{g}| = \frac{G M_t}{R_t^2}$$

$M_t \equiv$ massa della Terra

$R_t \equiv$ raggio della Terra

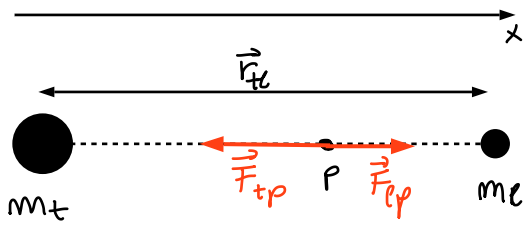


BILANCIA DI CAVENDISH

Per misurare G serve sapere m_t

$$G = \frac{F_{12} r^2}{m_1 m_2} \rightarrow G = 6.670 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2}$$

(ex) Veicolo spaziale P in viaggio dalla Terra alla Luna. Trovare il punto in cui la forza esercitata dalla Terra su P sia uguale a quella esercitata dalla Luna su P.



$m_t = 6 \cdot 10^{24}$ kg $\quad r_{tl} = 3.84 \cdot 10^8$ m

$m_l = 7.35 \cdot 10^{22}$ kg $\quad x = ?$

$$\vec{F}_{tp} + \vec{F}_{lp} = \vec{0} \longrightarrow \frac{m_t m_p}{x^2} - \frac{m_l m_p}{(r_{tl}-x)^2} = 0$$

$$m_t(r_{tl}^2 + x^2 - 2r_{tl}x) - m_l x^2 = 0$$

$$(m_t - m_l)x^2 - 2r_{tl}m_t x + m_t r_{tl}^2 = 0$$

$$\left(1 - \frac{m_l}{m_t}\right)x^2 - 2r_{tl}x + r_{tl}^2 = 0$$

$$x = \frac{2r_{tl} \pm \sqrt{4r_{tl}^2 - 4\left(1 - \frac{m_l}{m_t}\right)r_{tl}^2}}{2\left(1 - \frac{m_l}{m_t}\right)}$$

$$= \frac{2r_{tl} \pm 2r_{tl}\sqrt{\frac{m_l}{m_t}}}{2\left(1 - \frac{m_l}{m_t}\right)} =$$

$$= r_{tl}\,\frac{1 \pm \sqrt{m_l/m_t}}{(1+\sqrt{m_l/m_t})(1-\sqrt{m_l/m_t})}$$

$$= \frac{r_{tl}}{1 \pm \sqrt{m_l/m_t}} = 346\ \text{Mm}$$

9/10 r_{tl} ←

MASSA GRAVITAZIONALE E MASSA INERZIALE

MASSA INERZIALE → proprietà che fa sì che il corpo resista alla pro-
pria variazione di velocità

MASSA GRAVITAZIONALE → proprietà che fa sì che il corpo sia attratto
verso un altro corpo tramite la forza gra-
vitazionale

$$\sum_i F_{iy} = -G\frac{m_G M_t}{R_t^2} = m_I a_y$$

$m_G \equiv$ massa gravitazionale

$m_I \equiv$ massa inerziale

$$\rightarrow \quad a_y = -\left(\frac{GM_t}{R_t^2}\right)\frac{m_G}{m_I} \quad \rightarrow \quad m_I = m_G$$

NB Non esistono casi reali in cui $m_G \neq m_I$. Per noi possiamo dire che coincide con precisione dell'ordine di $10^{-13} - 10^{-15}$.

VARIAZIONE DI g SULLA SUPERFICIE TERRESTRE

SFERA → forma che permette ad ogni parte della Terra di es-
sere il più vicino possibile ad ogni altra parte ed
insieme essere attratte verso il centro.

NB La Terra è uno SFEROIDE LEGGERMENTE SCHIACCIATO AI
POLI per causa della sua rotazione attorno al suo asse

$$\frac{R_{eq} - R_p}{R_M} = 0.003$$

$R_{eq} = 6.38\ M_m$ EQUATORE

$R_p = 6.36\ M_m$ POLI

$R_M = 6.37\ M_m$ MEDIO

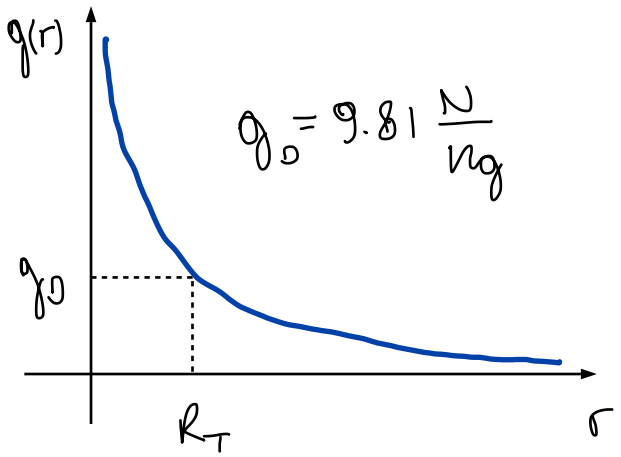
Possiamo affermare che la Terra è "più sferica" di una normale
pallone da calcio. Se sgonfiamo la stessa compressione ai
poli, il r_{eq} del pallone sarebbe 1/2 mm del r_p!

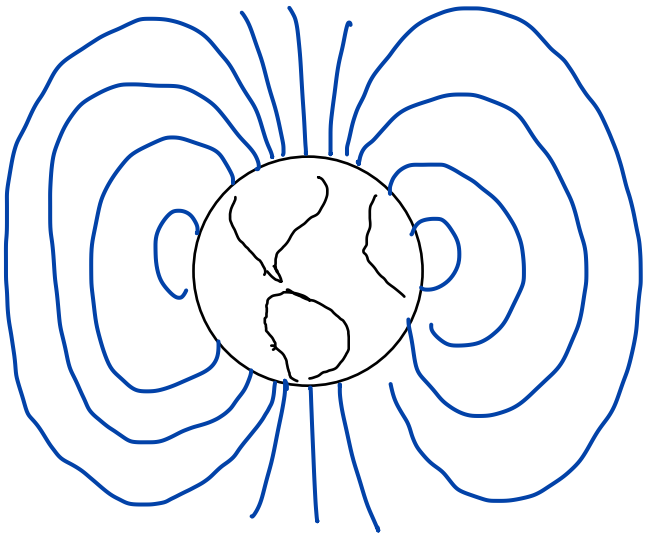
CAMPO GRAVITAZIONALE

$$\vec{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\hat{i} + V_y(x,y,z)\hat{j} + V_z(x,y,z)\hat{k}$$

CAMPO GRAVITAZIONALE $\vec{g}(\vec{r})$ → rapporto tra la $\vec{F}(\vec{r})$ su m

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}$$



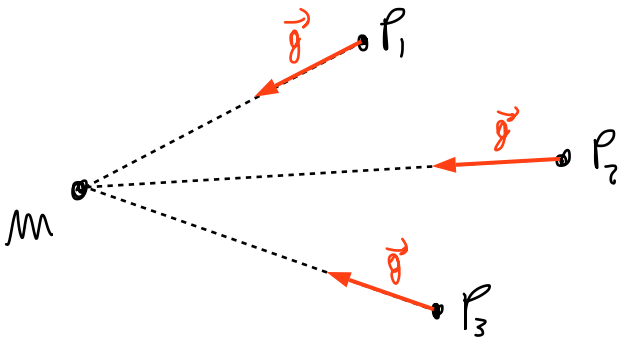


LINEE DI CAMPO

NB $|\vec{g}| = g_0 \simeq 9.81 \frac{N}{kg}$ vale in prossimità della superficie terrestre

La MASSA GRAVITAZIONALE DI UN CORPO perturba lo spazio circostante generando un CAMPO GRAVITAZIONALE. Un SECONDO CORPO percepirà questo campo subendo una FORZA GRAVITAZIONALE su di esso.

$$\vec{g}_1(\vec{r}) = -\frac{GM_1}{r^2}\hat{r} \qquad \vec{F}_2(\vec{r}) = m_2\vec{g}_1(\vec{r})$$



VELOCITÀ D'ORBITA DI UN SATELLITE

Usando il 2° principio di Newton, posso calcolarmi la velocità minima che un oggetto deve avere per restare in orbita attorno alla Terra.

$$\vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$M \equiv$ massa Terra
$m \equiv$ massa oggetto
$r \equiv$ distanza oggetto-Terra (altro)

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R_T}} = 7.9 \text{ km/s}$$

(IX) Satellite a 400 km dalla superficie terrestre

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_T + h}} \simeq 7.67 \text{ km/s}$$

NB: PERCHÉ GLI ASTRONAUTI FLUTTUANO COME SE NON AVESSERO PESO?

$$\vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r} = m_1\vec{a} \longrightarrow \vec{a} = -G\frac{m_2}{r^2}\hat{r}$$

$\forall$ corpo!

Per capirlo meglio, è come se uno toglieasse il cavo dell'ascensore: se io sono su una bilancia dentro l'ascensore, il peso sarebbe nullo, perché ascensore, bilancia e io abbiamo la stessa accelerazione!

LEGGI DI KEPLERO

Descrivono il moto dei pianeti attorno al Sole

1. Tutti i pianeti si muovono su orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei fuochi
2. La congiungente del pianeta col Sole spazza aree uguali in uguali intervalli di tempi uguali
3. Il quadrato del periodo di un qualunque pianeta è proporzionale al cubo della distanza media del pianeta dal Sole

ORBITA CIRCOLARE $\rightarrow a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ $\longrightarrow$ $\vec{F} = m_p a_c^2$

$$G\frac{M_S M_P}{r^2} = M_P \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G M_S}\right) r^3$$