Capitolo 4

Tra Cinquecento e Seicento

Il sottotitolo di questo capitolo potrebbe essere

Verso la matematica moderna
(1545-1615)

Infatti si passa dal periodo rinascimentale al Seicento, secolo che vedrà una svolta profonda, in Analisi e in Algebra, anche ad opera dei "grandi geni" che caratterizzano questo tempo.

Le date che segnano simbolicamente l'inizio e la fine di questo complesso periodo sono, rispettivamente, l'anno di pubblicazione dell'*Ars Magna* di Cardano e della *Stereometria* di Kepler.

4.1 Verso la matematica moderna

La matematica del Rinascimento aveva avuto ampie applicazioni (meccanica, arti figurative, cartografia, ottica...) ma soprattutto un grande interesse per le opere antiche: inizia in questo periodo la moda di tradurre e ricostruire i trattati della matematica greca. Ricordiamo **Maurolico** (siciliano), dotto antichista che traduce Apollonio, e **Commandino** che traduce Archimede e Pappo.

Alla fine del XVI secolo la maggior parte dei trattati antichi è stata tradotta e l'algebra araba è stata assorbita e sviluppata.

◦ Alla fine del XVI secolo si presentano due tendenze: approfondire le idee consolidate e affrontare concetti nuovi. Ma non è ancora il momento del grande salto verso la matematica moderna.

E' il periodo di figure intermedie, provenienti da varie parti d'Europa: italiani (**Galileo Galilei**), inglesi (**Harriot**), fiamminghi (**Stevin**), scozzesi (**Napier**), svizzeri (**Bürgi**), tedeschi (**Kepler**), francesi (**Viète**).

◦ Un'altra importante caratteristica del periodo è che anche matematici teorici mostrano interesse al calcolo e alla possibilità di renderlo più semplice e veloce.

Anche i temi di studio si diversificano, percorrendo filoni che assumono sempre più precise caratteristiche: l'algebra, il calcolo, la fisica. Procediamo proprio in questa direzione, affrontando i vari settori disciplinari.

4.2 L'algebra

Il ramo dell'algebra è attivo non solo per merito del matematico francese più brillante del periodo, **François Viète** (1540-1603), ma anche del fiammingo **Adriaan van Roomen** (1561-1615) - citato nei prossimi Paragrafi 4.2.1 e 4.3.1 per due dispute con Viète - e dell'inglese **Thomas Herriot** (1560-1621). Quest'ultimo compie un ulteriore passo avanti nelle notazioni algebriche: scrive A^3 come AAA. Introduce i nuovi simboli $<$ e $>$ e continua l'uso di $=$ (introdotto da Recorde, vedi Paragrafo 3.3.3). Consegue alcuni risultati riguardanti le radici di un'equazione algebrica, ma è frenato dalla solita limitazione a radici positive.

4.2.1 Viète

François Viète (1540-1603) è il più grande matematico francese del secolo XVI, anche se di professione avvocato e politico (e forse spia).

Le sue opere avranno un'enorme influenza in tutta Europa e anche se non gli si debbono grandi scoperte, paragonabili a quelle dei suoi contemporanei Stevin, Kepler e Galileo, dobbiamo a lui perfezionamenti notevoli dei metodi del calcolo. Ecco una lista delle principali opere.

- *Canon mathematicus*, Lutetiae, Jamet Mettayer, 1579
- *Uniuersalium inspectionum ad canonem mathematicum*, 1579
- *In Artem analyticam Isagoge*, Paris, James Mettayer, 1591
- *Munimen adversus nova Cyclometrica*, Paris, James Mettayer, 1594

- *Pseudo-Mesolabum et alia quaedam adjuncta capitula*, Paris, Jamet Mettayer, 1595
- *Ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit responsum*, Parisiis, James Mettayer, 1595
- *Apollonius Gallus*, Paris, David Le Clerc, 1600
- *Adversus Christophorum Clavium Expostulatio*, Paris, Petrum Mettayer, 1602
- *Varia opera mathematica*, Parisiis, Barthélémy Macé, James Mettayer, 1609
- *De numerosa potestatum ad exegesim resolutione*, Paris, David Le Clerc, 1600
- *De aequationum recognitione et emendatione*, Paris, Johannes Laquenay, 1615
- *Opere*, Lugduni Batavorum, Bonaventura Elzevier, Abraham Elzevier, 1646



Contributi in aritmetica

- Difende le frazioni decimali contro le sessagesimali
- Nei decimali usa | invece della virgola

Novità in algebra

Imbevuto di cultura classica, è subito attratto dalla risonanza profonda che avevano avuto in Europa le edizioni e le traduzioni dei matematici greci, soprattutto quelle di Pappo (tradotto da Commandino, Pesaro 1567) e Diofanto (tradotto da Xylandro, 1575).

Le opere degli algebristi italiani, diffuse da Lione nella Francia meridionale, soprattutto l'*Ars Magna* di Cardano (2a ed. 1570) e l'*Algebra* di Bombelli (1572), gli danno modo di capire Diofanto.

Con ragione Viète afferma (1591) di aver creato una nuova scienza, che egli chiama *logistica speciosa*, cioè il calcolo letterale o algebrico (opposto alla *logistica numerosa* o calcolo aritmetico), che dà ai ragionamenti dei matematici una maggior generalità. Tuttavia la sua è ancora una "algebra sincopata" e non ancora "simbolica".

- La scelta delle vocali A, E, I ecc., per le incognite, e delle consonanti $B, G, D, \ldots$ per le quantità note (o anche parametri) di una formula algebrica, indicano il modello greco (Diofanto) che Viète aveva dinnanzi. Per questo Viète è considerato il fondatore dell'*algebra letterale*. Se avesse usato le notazioni del suo tempo ($+$ e $-$ di Stifel e $=$ di Recorde), avrebbe scritto la generica equazione di II grado come

$$BA^2 + CA + D = 0.$$

- Non gradisce il termine "algebra"; usa piuttosto (per la prima volta) il termine *analisi*, coniando l'espressione *Artis analyticae praxis*.

- Nelle equazioni algebriche mantiene una certa rigidità: cerca di conservare l'*omogeneità* dei termini (eredità della matematica greca), non si libera quindi completamente dalla rappresentazione geometrica delle relazioni algebriche, rendendo le formule inutilmente complicate. Ad esempio in

$$x^3 + 3ax = b$$

la natura di a è quadratica *(planum)* e quella di b è cubica *(solidum)*[1].

- Propone un nuovo metodo risolutivo per le equazioni di III grado.

- Conosce alcune relazioni tra coefficienti e radici. Ad esempio se

$$x^3 + b = 3ax$$

[1]Descartes (1637) riesce a liberarsene, ma tali complicazioni continuano a sussistere fino al principio del sec. XIX.

ha due radici positive x_1 e x_2 allora

$$3a = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2, \quad b = x_1x_2^2 + x_2x_1^2.$$

Si avvicina quasi alle "funzioni simmetriche" delle radici, ma non riesce a proseguire, frenato dalla limitazione a radici positive.

- E' consapevole che il numero delle radici di un'equazione algebrica è limitato dal grado, ma non fornisce alcuna dimostrazione.

- Si accorge che riga e compasso sono sufficienti per rappresentare le radici quadrata e cubica di un numero e anche le radici di equazioni di III grado. Costruisce un metodo per determinarne le soluzioni approssimate (quasi una anticipazione del metodo di Horner).

Viète e l'analisi

Oltre che introdurre per primo il nome di *analisi*, Viète è un analista in senso moderno: studia processi infiniti. Esprime $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$ attraverso somme infinite. Calcola π fino alla decima cifra con procedimento ricorsivo utililizzando poligoni di n lati inscritti in una circonferenza ma lo esprime anche con la nota formula.

Formula di Viète per π

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

cioè, nel simbolismo attuale,

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}$$

dove

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$$

Ma *Ars analytica* verrà presa in considerazione solo dopo il 1630.

Viète e la geometria

Ricostruendo il libro mancante delle *Coniche*, François Viète è il primo a riscoprire il *Problema di Apollonio* (vedi Paragrafo 1.5.3) in epoca moderna e lo pone ai matematici belgi. Gli risponde nel 1596 **Adriaan van Roomen** che fornisce una soluzione completa che tuttavia apre tra i due una polemica.

Nel suo opuscolo *Apollonius Gallus* Viète contesta la soluzione di van Roomen, in quanto essa non è ottenuta mediante il solo uso di riga e compasso ma dalla intersezione di curve del secondo grado. [...] Viète propone un diverso approccio, che risolva il problema con riga e compasso. Il suo punto di vista è "eccezionalmente audace e profondo"[2].

4.3 La trigonometria

4.3.1 La situazione della seconda metà del Cinquecento

Alla fine del Cinquecento si sviluppa un notevole interesse, da parte dei matematici, per la trigonometria. Compaiono e si diffondono in Europa identità trigonometriche di vario genere, tra cui le **Formule di prostaferesi** (il cui uso verrà descritto nel Paragrafo 4.3.3). Pare che tali formule fossero già note parzialmente agli Arabi, ma il loro uso generale prevale solo verso la fine del XVI secolo e la dimostrazione geometrica di alcune di esse va attribuita a Viète.

Da menzionare anche le formule inverse, note (almeno nei testi anglosassoni) come **Formule di Werner** (il cui uso verrà descritto nel Paragrafo 4.3.3) dovute al matematico tedesco Johann Werner (1468-1522)[3].

Ad evidenziare la popolarità della trigonometria all'epoca concorre una sfida proposta dal già citato Adriaan van Roomen, detto anche **Romanus**, il quale sfida tutti i matematici dell'epoca a risolvere la seguente equazione di 45° grado:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \cdots - 3795x^3 + 45x = K.$$

L'ambasciatore dei Paesi Bassi presso la corte di Enrico IV asserisce, con toni superbi, che la Francia non ha nessun matematico in grado di risolvere la spinosa questione sollevata dal suo connazionale. A difendere l'onore dei francesi ci pensa però, nel 1593, François Viète che si rende conto che tale equazione rappresenta una di quelle che nascono esprimendo $K = \sin 45\theta$ in termini di $x = 2\sin\theta$, riuscendo a ricavare subito le radici positive, ovvero le soluzioni dell'equazione.

Romanus rimane così stupefatto da volere un incontro di persona (che avverrà nel 1597 presso Fontenay-le-Comte) con il matematico francese.

[2] *Il problema di Apollonio*, Ciro Ciliberto, 2021

[3] Ne abbiamo accennato nel capitolo dedicato al Rinascimento (vedi Paragrafo 3.3.4).

4.3.2 Viète e la trigonometria

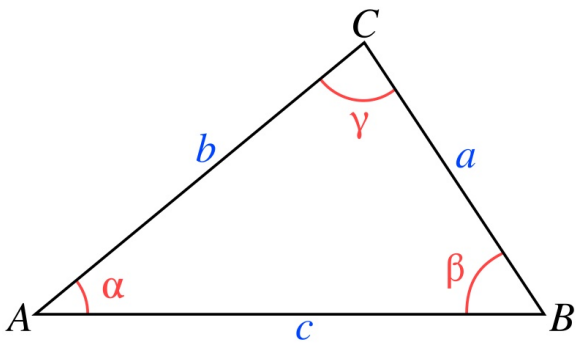
Vietè afferma che "la trigonometria è la massima gloria dei matematici perchè abilita a sottomettere a un calcolo meraviglioso cielo, terra e mare" e infatti può essere considerato il padre di quel metodo analitico per trattare la trigonometria che viene anche detto *goniometria*.

- Compila tabelle per tutte le 6 funzioni trigonometriche

- Deriva, con un metodo diverso da quello consistente nell'applicare ricorsivamente le formule di Tolomeo, le formule per determinare $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$ come somme infinite!

- In *Varia opera mathematica* compare un risultato simile alla "legge delle tangenti".

Legge delle tangenti



In un triangolo qualunque, indicate con a, b, c le lunghezze dei lati e con α, β, γ le ampiezze degli angoli a essi rispettivamente opposti, si hanno per ogni coppia di lati e angoli le seguenti relazioni (qui considerate per i lati di lunghezze a e b):

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Viète sostiene che la trigonometria "serve" all'algebra: le formule di prostaferesi e sugli angoli multipli possono essere utilizzate per risolvere le equazioni di III grado. Ma primariamente a moltiplicare grandi numeri tra loro: è il primo *algoritmo* che ha tale scopo.

4.3.3 L'algoritmo

Ricordiamo alcune note formule, citate in precedenza.

Formule di prostaferesi

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\,\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\,\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Il termine *prostaferesi* deriva da una giustapposizione di 2 parole di origine greca, *prosthesis* e *aphairesis*, che significano rispettivamente "somma" e "sottrazione".

Infatti le formule di prostaferesi, studiate ancor oggi nei licei, consentono di trasformare la somma o la differenza di seni, coseni, tangenti e cotangenti in prodotti.

In generale tale uso non è "conveniente": serve molto di più quello inverso, cioè trasformare i prodotti in somme, ad esempio con le formule inverse come quelle di Werner.

Formule di Werner

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$$

I **passi dell'algoritmo**, utilizzando la seconda formula di Werner

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]:$$

1. Scalare: si sposta la virgola decimale a destra o sinistra di tante posizioni quante sono necessarie per trasformare i due fattori della moltiplicazione in numeri compresi tra -1 e 1.

2. Trovare l'arcocoseno: si determinano, con l'uso di una tavola trigonometrica, i due angoli il cui coseno corrisponde ai valori trovati al passo precedente.

3. Sommare e sottrarre: si calcola la somma e la differenza dei due angoli trovati al passo precedente.

4. Fare la media dei coseni: si calcola la semisomma del valore dei coseni dei due angoli individuati al passo precedente.

5. Riscalare: preso tale valore, si sposta la virgola per il numero opposto di posizioni compiute al primo passo.

Esempio d'uso

Moltiplicare 105314 per $0,0720114$ usando una tabella trigonometrica del coseno e precisione di un grado e fino alla quarta cifra significativa.

1. Scalare: per il primo fattore si sposta la virgola a sinistra di 6 posizioni ottenendo $0,105314$; per il secondo fattore a destra di una posizione ottenendo $0,720114$.

2. Trovare l'arcocoseno: poiché le migliori approssimazioni disponibili sulle tabella utilizzata sono $\cos(84°)$ (che vale $0,1045$) e $\cos(44°)$ (che vale $0,7193$), i due angoli individuati in questo passo sono $\alpha = 84°$ e $\beta = 44°$.

3. Sommare e sottrarre: $84° + 44° = 128°$, $84° - 44° = 40°$.

4. Fare la media dei coseni: dalla tabella utilizzata si ha che $\cos(128°) = -0,6157$ e $\cos(40°) = 0,7660$, per cui la semisomma è $0,07515$.

5. Riscalare: spostando la virgola a destra di 5 posizioni si ottiene 7515.

Il risultato corretto sarebbe stato $7583,8085796$. Si è pertanto commesso un errore inferiore all'1 per cento, pur utilizzando una tavola trigonometrica molto grezza. A supporto di questo algoritmo vengono stilate tavole con dettaglio pari al grado secondo e precisione fino alla quattordicesima cifra.

4.4 La nascita dei logaritmi

Nello stesso periodo in cui la trigonometria riveste un ruolo fondamentale all'interno della ricerca matematica, vengono "inventati" i *logaritmi* con lo scopo di semplificare i calcoli ancora più velocemente di quanto visto con l'algoritmo conseguente alle formule di Werner e si diffondono molto più rapidamente.

Il successo è enorme e rapido, anche se concettualmente non paragonabile ai progressi segnati dall'opera di Viète.

I protagonisti di questa novità sono

- John Napier (1550-1617), scozzese
- Henry Briggs (1561-1630), inglese
- Jobst Bürgi (1552-1632), svizzero

dei quali il primo è certamente il più rilevante, come vedremo.

Ricordiamo la nomenclatura odierna.

Il logaritmo (dal greco *logos* = "ragione", "rapporto" e *arithmos* = "numero") di un numero (detto argomento del logaritmo), data una certa base, è l'esponente a cui bisogna elevare la base per ottenere il numero considerato:

$$a^x = b$$

risulta equivalente a:

$$\lg_a b = x.$$

Proprietà elementari:

$$\lg_a(bc) = \lg_a b + \lg_a c$$

$$\lg_a \frac{b}{c} = \lg_a b - \lg_a c$$

$$\lg_a b^n = n \lg_a b.$$

4.4.1 Napier

I logaritmi sono il frutto della mente e degli studi del matematico scozzese **John Napier** (1550 - 1617), italianizzato in Giovanni Nepero.



John nasce nel 1550 nel Merchiston Castle a Edinburgo, in Scozia.



Merchiston Tower, Edinburgh

Suo padre, Sir Archibald Napier, è un ricco proprietario terreriero, mentre sua madre, Janet Bothwell, è la figlia di un importante politico e giudice, Francis Bothwell. Archibald Napier ha solamente 16 anni quando nasce il genio matematico di famiglia, suo figlio.

John nasce dunque in una famiglia benestante, vivendo una vita agiata, tanto da non frequentare la scuola sino ai 13 anni di età. Appunto nel 1563 comincia a frequentare la St Andrews University; poco tempo dopo la sua immatricolazione, avviene la morte della madre.

Sappiamo che John trascorre le sue giornate all'università e, diversi anni dopo, scriverà che nella stessa incomincia ad appassionarsi alla teologia. Tuttavia, il nome di Napier non appare nel registro di coloro che si sono laureati alla St Andrews University. Di conseguenza, è molto probabile che abbia abbandonato questa università. E' certo comunque che Napier non acquisisce le sue conoscenze di matematica avanzata alla St Andrews University e neppure la sua ampia cultura nel campo della letteratura classica.

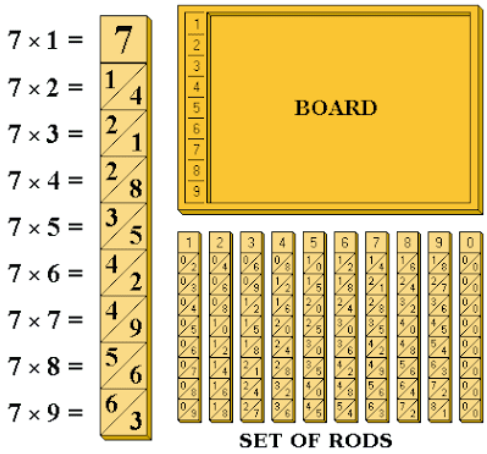
Tali conoscenze devono essere state acquisite durante i suoi studi in Europa, ma non sussistono documenti ufficiali attestanti dove abbia effettivamente proseguito i suoi studi, anche se è molto probabile che abbia frequentato l'Università di Parigi e abbia avuto esperienze in Italia e Olanda.

Nel 1571 Napier fa ritorno in Scozia per essere presente alle seconde nozze del padre. Nel medesimo anno incomincia i preparativi per il suo matrimonio, che però si concretizzerà solamente 2 anni dopo. Nel 1574 John e sua moglie si sistemano nel castello a Gartness, luogo da cui decide di amministrare e far fruttare i propri vasti possedimenti, dedicandosi persino all'agricoltura in modo scientifico.

Napier prende parte alle controversie religiose del tempo. E' un fervente protestante e pubblica, nel 1593, quella che lui stesso ritiene la sua opera più importante, ossia *Plaine Discovery of the Whole Revelation of St. John*. Paradossalmente, la matematica è solo un hobby e, nelle sue opere matematiche, scrive che trova difficilmente del tempo da dedicare alla matematica, in quanto maggiormente dedito alla teologia.

• Tra gli aspetti che più gli interessano ritroviamo sicuramente il computo e la trigonometria. Infatti nel 1617 viene pubblicato postumo, nell'opera *Rabdologiæ seu Numerationis per Virgulas libri duo*, il suo metodo basato sui cosiddetti "bastoncini di Nepero", detti anche "ossi di Nepero" o *virgulae numeratrices*, cioè un insieme di asticelle (spesso d'avorio) sulle quali erano incisi dei numeri che potevano essere usati per eseguire velocemente e correttamente le moltiplicazioni, simulando così il metodo con carta e penna. Nello specifico, su ciascuna delle asticelle sono incisi i primi multipli

di un numero, con le decine e le unità separate da una barra obliqua.



Probabilmente attorno al 1594, Napier comincia invece a lavorare a un metodo maggiormente teorico, pubblicato solamente vent'anni dopo.

Potrebbe essere partito dalle progressioni geometriche, ovvero successioni di numeri dove il rapporto tra un numero e il suo precedente è sempre il medesimo, una costante detta *ragione*. Un semplice esempio di progressione geometrica è dato da quella di ragione 2:

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \ldots$$

Un altro esempio è dato da quella di ragione 10:

$$1 \quad 10 \quad 100 \quad 1000 \quad 10.000 \quad 100.000 \ldots$$

Si sa già da tempo che sommare gli esponenti è equivalente a moltiplicare le potenze (posto che la base sia la medesima), nozione che era stata diverse volte oggetto di pubblicazioni, come *Arithmetica integra* (1544) di **Michael Stifel** (1487-1567) - già citato nella Sezione 3.3 -, e, addirittura, compare nelle opere di Archimede.

Questo funziona se si vogliono moltiplicare due potenze intere, per esempio di 2 oppure di 10. Sussistono tuttavia ampi intervalli (spaziature) fra questi numeri, e le potenze di 2 o di 10 non sembravano di grande aiuto quando ci si trova di fronte a operazioni quali $63,389 \times 31,443$.

Mentre il barone Napier sta rimuginando sulla spinosa questione, John Craig, medico personale di Giacomo VI di Scozia, gli fa visita e gli riferisce

relativamente a un'importante scoperta matematica in Danimarca, nota con la denominazione di "prostaferesi" (vedi Paragrafo 4.3.3):

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Probabilmente Craig è stato membro della delegazione che nel 1590 ha accompagnato Giacomo VI nel suo viaggio in Danimarca per incontrare la futura moglie, Anna di Danimarca. Una tempesta ha poi costretto la delegazione a sbarcare in un punto della costa danese non lontano dall'osservatorio di **Tycho Brahe** e, mentre aspettavano che le condizioni meteorologiche migliorassero, vengono intrattenuti dal celebre astronomo. Sembra che costui accennasse alla straordinaria tecnica matematica della prostaferesi, spesso utilizzata in quell'osservatorio per compiere calcoli. Questo nuovo metodo della prostaferesi si basava principalmente su una formula scoperta già da Viète (cfr. con le formule di Werner in Paragrafo 4.3.3):

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}.$$

Ebbene, proprio partendo dall'idea alla base di questo metodo (la conversione del prodotto in somma) e sviluppandola ulteriormente, Napier concepisce la nozione di *logaritmo*.

• La introduce nell'opera *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrizione della regola meravigliosa dei logaritmi) del **1614**.

Napier costruisce una serie geometrica di ragione molto vicina a 1, e precisamente, al posto di 2 o di 10, utilizza potenze di $1,0000000001$.

Le potenze successive di un numero del genere risultano estremamente ravvicinate, e ciò è sufficiente per eliminare quelle fastidiose spaziature viste in precedenza.

Napier sceglie alla fine una ragione leggermente inferiore a 1, ossia $0,9999999$. In questo modo la sua successione geometrica "si sposta all'indietro" da un numero grande a numeri sempre più piccoli.

Esplicitamente, considera come base del logaritmo

$$0,9999999 = 1 - \frac{1}{10^7}$$

In questo modo, però, i termini della progressione sono troppo vicini fra loro. Per ottenere un maggior equilibrio e per evitare fastidiose cifre decimali, Napier moltiplica ciascuna potenza per $10.000.000$ (ovvero 10^7).

Se un qualunque numero N si può scrivere come

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

allora L verrà definito il *logaritmo neperiano* del numero N.

Da ciò si può concludere che il logaritmo neperiano di 10^7 è 0. Infatti, ponendo $N = 10^7$ abbiamo:

$$10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L = 10^7 \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L = 1 \quad \Rightarrow \quad L = 0.$$

Ecco giustificata l'espressione:

$$\boxed{\text{Neplog}\, 10.000.000 = 0.}$$

Analogamente si ha l'espressione

$$\boxed{\text{Neplog}\, 9.999.999 = 1,}$$

infatti:

$$10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) \quad \Rightarrow \quad L = 1.$$

(Queste ultime due uguaglianze sono particolarmente sorprendenti: $10.000.000$ e $9.999.999$ differiscono solo di uno mentre i loro *Neplog* sono nettamente diversi).

Il logaritmo di Napier soddisfa inoltre la seguente equazione:

$$\boxed{\text{Neplog}\,(10^7 xy) = \text{Neplog}\,(x) + \text{Neplog}\,(y).}$$

Se Napier avesse diviso per 10^7 i numeri, si sarebbe ottenuto un sistema di logaritmi aventi come base $1/e$, ove e (circa $2,718...$) designa proprio la costante nota come *numero di Nepero*. Infatti

$$\boxed{\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \cong \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.}$$

Invece il limite della successione che dà proprio il numero di Nepero è:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

In realtà, la costante e viene chiamata, a volte, anche *numero di Eulero*, in quanto Eulero fu il primo a far uso della lettera "e" per indicare tale numero, come si può riscontrare nella sua opera *Mechanica* (1736).

Il logaritmo in base e di un numero x viene chiamato oggi *logaritmo naturale* e indicato con $\ln x$.

4.4.2 Briggs e Bürgi

A proposito di base 10, colui che la introduce (e che, allo stesso tempo, semplifica notevolmente il concetto di logaritmo) è **Henry Briggs** (1561-1630), il primo professore *saviliano* di geometria all'Università di Oxford.

Briggs, nel 1615, fa visita proprio a Napier in Scozia e con lui discute in merito a modifiche da introdurre nel metodo dei logaritmi. Napier, confessando di averci già pensato, dichiara di essere d'accordo con le idee del collega. Purtroppo, però, prima che tali idee possano essere diffuse, Napier muore. La morte dell'inventore dei logaritmi avviene il 4 aprile **1617**, anno in cui esce la sua già citata opera *Rabdologiæ*.

• Due anni dopo sarà pubblicato (postumo) il secondo trattato di Napier, *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (**1619**).

• Briggs si impegna a calcolare una tavola di logaritmi *briggsiani* (cioè in base 10), partendo da $\lg 10 = 1$ e considerando radici quadrate successive.

Nel 1617 pubblica *Logarithmorum chilias prima*, i logaritmi degli interi da 1 a 1000, calcolati sino a 14 cifre decimali. Il suo lavoro del 1624 *Arithmetica logarithmica* contiene i logaritmi in base 10 dei numeri da 1 a 20.000 e da 90.000 a 100.000, sempre con 14 cifre decimali.

• L'idea si diffonde molto rapidamente per l'Europa: **John Speidell** (1600 - 1634) determina i logaritmi delle funzioni trigonometriche (come $\lg \sin x$), pubblicandone le tavole nei suoi *New Logarithmes* nel 1619.

• L'orologiaio svizzero **Jobst Bürgi** (1552-1632) pubblica i suoi risultati sui logaritmi nel 1620 e, tra l'altro, sembra che ne avesse scoperto l'idea di base nel 1588, persino prima di Napier[4].

[4]Tuttavia, nella storia della matematica, ciò che ha un'importanza cruciale è quello che è stato effettivamente pubblicato e non ciò che è rimasto confinato all'interno della vita privata di una singola persona. Dunque, da questo punto di vista, è lecito attribuire l'invenzione dei logaritmi a Napier, seppur tenendo conto che, probabilmente, l'orologiaio svizzero è pervenuto alla nuova idea ben prima di lui.

4.5 La fisica

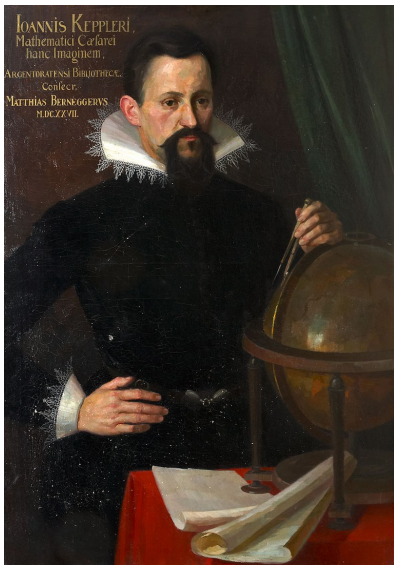
Il terzo e ultimo filone della matematica tardo cinquecentesca riguarda la fisica (statica, dinamica, astronomia) e la ricerca della matematica che la può sostenere. I nomi più significativi di studiosi "pratici" e interessati alle applicazioni della matematica sono:

- Simon Stevin (1548-1620)
- Galileo Galilei (1564-1642)
- Johannes Kepler (1571 - 1630).

4.5.1 Kepler

Johannes Kepler (1571 – 1630) (italianizzato in Giovanni Keplero), è un astronomo, astrologo, matematico, cosmologo, teorico musicale, filosofo della natura e teologo luterano tedesco, che scopre empiricamente le omonime leggi che regolano il movimento dei pianeti.

Professore di materie scientifiche in diverse università della Germania e dell'Austria e protetto dell'imperatore Rodolfo II, Kepler, contemporaneo di **Galileo Galilei** (nato sette anni prima), è, come Galilei stesso, un convinto sostenitore del sistema copernicano.



Ritratto di Johannes Kepler nel 1620

Nato in una famiglia di umili origini, viene avviato dai genitori alla carriera ecclesiastica. Infatti, nel 1584 entra nel seminario di Adelberg, trasferendosi nel 1586 nel seminario superiore a Maulbronn. Nel 1588 comincia i suoi studi presso l'università di Tubinga, seguendo due anni di istruzione generale, con lezioni di etica, dialettica, retorica, greco, ebraico, astronomia e fisica. Nel 1592 intraprende lo studio della teologia a Tubinga, università protestante dove insegnano alcuni seguaci del copernicanesimo; tra questi c'è Michael Maestlin, che convince Kepler della validità delle teorie di Niccolò Copernico.

Nel 1594 Kepler deve interrompere gli studi teologici, perché gli viene affidato l'insegnamento di matematica presso la Scuola Evangelica di Graz (Austria) e successivamente diventa matematico territoriale degli Stati di Stiria. Tra i suoi compiti c'è l'obbligo di insegnare presso l'università di Graz, redigere carte astrali e, secondo l'uso del tempo, fare previsioni astrologiche. Nel suo primo *Calendarium et Prognosticum* per l'anno 1595 prevede un inverno molto rigido, le rivolte contadine e la guerra con i Turchi.

• Nel **1596** pubblica l'opera *Mysterium Cosmographicum*, nella quale tenta una prima descrizione dell'ordine dell'Universo.

Lo scopo principale dell'opera non è difendere il sistema copernicano, ma dimostrare che, per la creazione del mondo e la disposizione dei cieli, Dio si è ispirato ai cinque solidi regolari introdotti da Pitagora e Platone: il cubo, il tetraedro, il dodecaedro, l'icosaedro, l'ottaedro (vedi Capitolo 1).

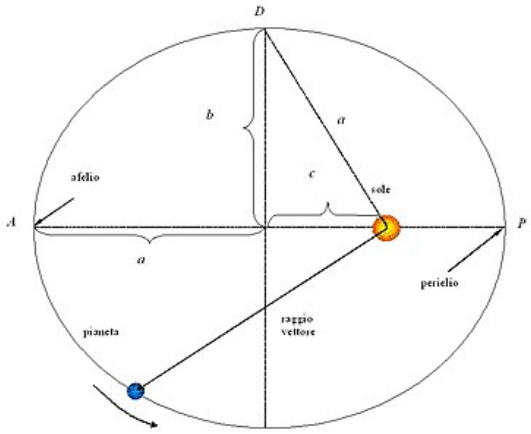
Nell'aprile 1597 sposa Barbara Mühleck, che morirà prematuramente nel 1611 dopo avergli dato cinque figli (due dei quali morti in giovane età).

Verso la fine del 1599 **Tycho Brahe** gli offre un posto come suo assistente, che Kepler accetta, sfuggendo così anche agli editti contro i luterani che vengono emanati in Austria dai sovrani Ferdinando II d'Austria e Massimiliano III d'Austria, entrambi ferventi controriformatori. Quindi, nel 1600, Kepler si aggiunge alla squadra di assistenti di Brahe presso la corte di Rodolfo II, imperatore cattolico mecenate, a Praga.

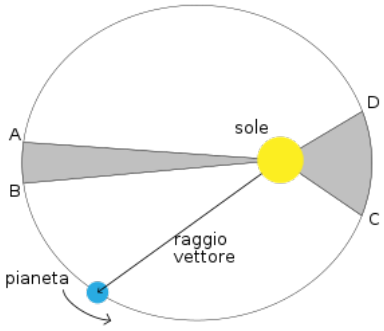
Nel 1601, dopo la morte di Brahe, ne diventa il successore nell'incarico di *matematico, astronomo e astrologo imperiale a Praga*. Nel 1604 osserva una supernova che ancora oggi è nota col nome di *Stella di Kepler*. Nel 1606 scrive il pronostico per stabilire la data dell'anno di nascita di Gesù Cristo, che nel 1614 fissò all'anno 5 a.C., quando si era verificata la congiunzione

massima di Saturno e Giove in cuspide del segno cardinale dell'Ariete, che secondo l'astrologia indica il cambiamento millenario.

• Le basi per le sue scoperte astronomiche vengono gettate nel **1609**, quando pubblica il suo capolavoro *Astronomia nova*, in cui formula le sue **prime due leggi**.



I legge di Kepler: L'orbita descritta da ogni pianeta nel proprio moto di rivoluzione è un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.



II legge di Kepler: Durante il movimento del pianeta, il raggio che unisce il centro del pianeta al centro del Sole (raggio vettore) descrive aree uguali in tempi uguali.

Nel 1966 Koyrè, percorrendo i calcoli tortuosi di Kepler , concluse che questa legge è stata derivata da una premessa errata, e cioè che la velocità della Terra sia inversamente proporzionale alla sua distanza dal Sole, e con calcoli errati. Inoltre stabilì che questa legge venne ricavata prima della legge delle orbite ellittiche. La legge comunque è esatta ed è una semplice conseguenza della conservazione del momento angolare.

Alla morte dell'imperatore Rodolfo II (1612), il nuovo imperatore Mattia, fratello di Rodolfo, approva che Kepler ricopra la carica di "matematico territoriale" (*Landschaftsmathematiker*) a Linz, pur mantenendo la nomina di matematico imperiale e quindi l'obbligo di portare avanti l'elaborazione delle *Tabulae Rudolphinae*, opera che comprende un catalogo astronomico e diverse tavole planetarie.

Nel 1613 Kepler si sposa per la seconda volta, con la ventiquattrenne Susanna Reuttinger, dalla quale avrà altri sei figli, tre dei quali morti durante l'infanzia.

• Il 15 maggio **1618** Kepler scopre la **terza legge** che prende il suo nome e la rende nota l'anno dopo nell'opera *Harmonices Mundi*.

> **III legge di Kepler**: Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo della sua distanza media dal Sole.

Nel 1620 la madre di Kepler viene arrestata dopo essere stata accusata di stregoneria dalla Chiesa protestante e rilasciata solo nel 1621; il processo dura sei anni e Kepler assume la sua difesa.

Lo scienziato, in disgrazia e in povertà, muore nel 1630 a 58 anni a Ratisbona, e viene qui sepolto presso il Cimitero di San Pietro.

La sua tomba andrà perduta nel 1632 quando le truppe di Gustavo Adolfo distruggono il cimitero.

Rimane però l'epitaffio da lui stesso composto:

"Mensus eram coelos, nunc terrae metior umbras.
Mens coelestis erat, corporis umbra iacet"

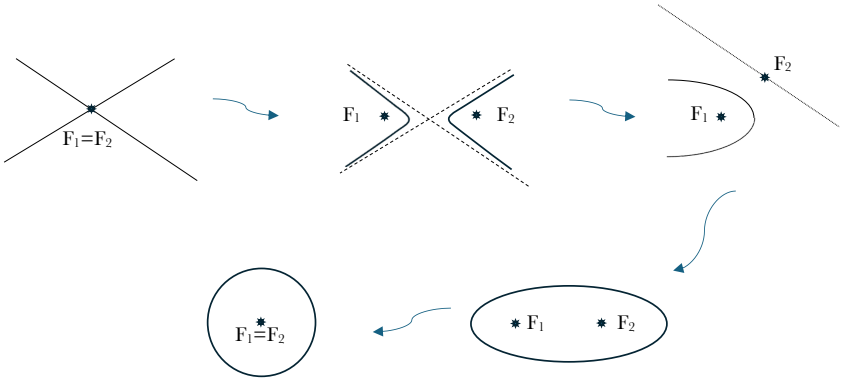
(Misuravo i cieli, ora fisso le ombre della terra. La mente era nella volta celeste, ora il corpo giace nell'oscurità).

4.5.2 Contributi di Kepler alla matematica

• Kepler è interessato all'ottica e quindi alle coniche. Mentre Apollonio ne elenca 3 tipi (ellisse, parabola, iperbole), Kepler ne individua 5, ispi-

rato dall'armonia archimedea del "Principio di continuità". Le classifica facendo variare con continuità i fuochi.

Come mostra la seguente illustrazione, inizialmente i fuochi coincidono col punto singolare di una conica semplicemente degenere, poi si separano nel caso dell'iperbole, poi uno di essi va all'infinito e l'altro è il fuoco di una parabola. Intuitivamente, il fuoco all'infinito ritorna nel piano affine ("dall'altra parte"!) e, col restante, costituiscono i due fuochi dell'ellisse; portandoli a coincidere, si arriva alla circonferenza.



Infatti è Kepler a usare per primo il termine *fuoco*, assieme a una speculazione ardita sui punti all'infinito, anticipando le intuizioni di Desargues.

• Calcola l'area del cerchio e dell'ellisse, ispirandosi all'opera di Oresme.

• La sua opera *Nova stereometria doliorum vinariorum* o brevemente *Stereometria doliorum* (1615) affronta il problema pratico di calcolare il volume di una botte di vino, una questione di grande importanza per i commercianti di vino dell'epoca.

Kepler utilizza metodi di calcolo basati sulla scomposizione di figure complesse in elementi più semplici per calcolarne il volume. Di fatto applica metodi di geometria solida per risolvere problemi di massimo e minimo, ma in realtà l'opera ha svolto un ruolo fondamentale nello sviluppo del calcolo infinitesimale, anticipando concetti che sarebbero stati espressi più formalmente da Cavalieri, Torricelli, Newton e Leibniz.

Saranno le modifiche apportate (per motivi pratici) ai metodi infinitesimali degli antichi che porteranno alla fine al moderno "calcolo infinitesimale".

4.5.3 Stevin

Simon Stevin (1548-1620) è un ingegnere fiammingo ma ammiratore di Archimede e affascinato dall'algebra di Diofanto.

- Introduce, come Pacioli in Italia, la partita doppia nei Paesi Bassi.

- Difende strenuamente il sistema decimale contro quello sessagesimale e introduce una notazione particolare a riguardo.

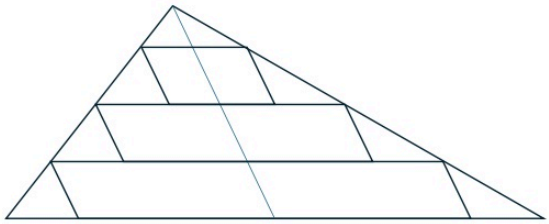
- Introduce anche una nuova notazione per le potenze intere e vuole estenderla anche a quelle frazionarie.

- Si interessa di Fisica e studia la caduta di un grave, anticipando molte conclusioni di Galilei.

- E' interessante la sua dimostrazione del fatto che il centro di gravità (baricentro) di un triangolo sta su una mediana (e quindi su tutte). Di conseguenza il baricentro appartiene alle tre mediane ed è quindi il loro punto di intersezione.

Usa un grafico, seguito dal Principio di Archimede e passando al limite (infinito) della procedura.

Inserisce nel triangolo il massimo numero di parallelogrammi aventi un lato parallelo a un lato del triangolo e l'altro parallelo alla mediana relativa. Il Principio di Archimede garantisce che le due parti in cui è diviso ogni parallelogramma sono in equilibrio. Poi passa al limite, facendo tendere all'infinito il numero dei parallelogrammi e coprendo in tal modo tutto il triangolo.



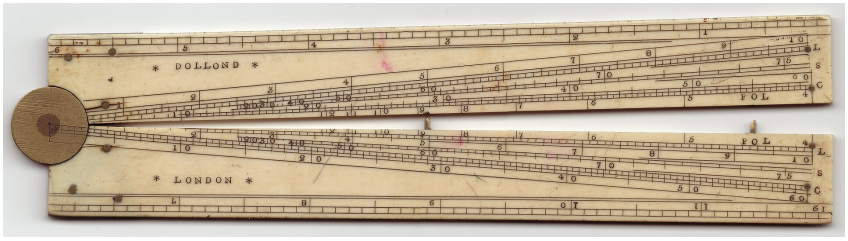
4.5.4 Galilei

Galileo Galilei (1564-1642) studia medicina, ma ama Euclide e Archimede. Ottiene la cattedra di matematica a Pisa e poi a Padova. Ma non è un matematico nel senso moderno del termine: insegna fisica e ingegneria e la matematica applicata che serve a queste discipline.

• Pubblica il libretto *Compasso geometrico e militare* (1606) con un grande successo editoriale e economico. E' l'unico trattato strettamente matematico di Galileo, ma in fisica e in astronomia ha idee e intuizioni che anticipano il calcolo infinitesimale, come Stevin e Kepler.

Il compasso geometrico militare permetteva di compiere in modo più rapido e semplice complesse operazioni matematiche e geometriche per usi civili e militari. Si misuravano distanze, altezze, profondità e pendenze; si calcolava la balistica dei tiri d'artiglieria; si poteva ridisegnare una mappa con una scala diversa; si calcolavano cambi di monete e interessi.

Lo strumento, a metà tra il goniometro e il regolo calcolatore consiste di due righelli di uguale lunghezza uniti su un disco (nocella) come cerniera che ne permette l'apertura a compasso. Sui due righelli sono riportate sette scale proporzionali (aritmetiche, geometriche, stereometriche, tetragoniche, poligrafiche, scala dei metalli e linee aggiunte) e un arco di cerchio graduato munito di scala dei gradi, scala delle pendenze e quadrato delle ombre. Lo strumento si fondava teoreticamente sulla proporzionalità tra i lati omologhi di due triangoli dimostrata da Euclide[5].



Il compasso geometrico militare

Galileo lavora principalmente in due direzioni: l'astronomia e la fisica (meccanica).
Due famosi trattati (scritti in volgare) espongono i suoi studi a riguardo:

• *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632)

[5] da Wikipedia

- *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638).

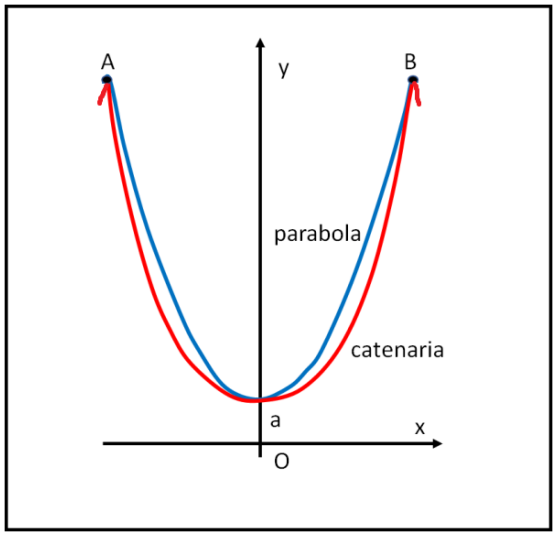
Non sono opere strettamente matematiche ma ragionano anche sulle proprietà dell'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo.

Nel trattato sulla dinamica studia il moto dei proiettili (componente orizzontale a velocità uniforme e componente verticale uniformemente accelerata) e scopre che la traiettoria descrive una parabola. D'altro canto, in astronomia viene utilizzata l'ellisse. Quindi, dopo 2000 anni, si intraprende l'applicazione delle coniche alla fisica e all'astronomia.

Galileo è affascinato da curve "particolari": la *cicloide*, come i suoi contemporanei, e dalla *catenaria*, studiata in *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*.

> La catenaria è definita come la curva piana descritta da una fune (o catena) omogenea, flessibile e non estendibile, lasciata pendere liberamente e sostenuta solo ai suoi due estremi.

Una ricostruzione che si è affermata nel tempo narra che Galileo creda erroneamente che la catenaria sia una parabola, giustificato dalla poca precisione dei disegni dell'epoca, come mostra la seguente figura[6].



In realtà, nella citata opera del 1638, Galileo spiega inequivocabilmente che la distinzione tra catenaria e parabola gli era chiara:

[6] www.infinitoteatrodelcosmo.it/2020/05/22/funzioni-iperboliche-la-catenaria

> *"la corda così tesa, e poco o molto tirata, si piega in linee, le quali assai si avvicinano alle paraboliche: e la similitudine è tanta, che [...] vedrete, allentando più o meno la detta catenuzza, incurvarsi e adattarsi alla medesima parabola, e tale adattamento tanto più esser preciso, quanto la segnata parabola sarà men curva, cioè più distesa; sì che nelle parabole descritte con elevazioni sotto a i gr. 45, la catenella camina quasi ad unguem sopra la parabola".*

Mezzo secolo più tardi Jacob Bernoulli sfiderà i matematici del tempo a trovare l'esatta equazione della curva. Nel giugno del 1691, Leibniz, Huygens e Johann Bernoulli pubblicheranno le rispettive soluzioni (indipendenti) basate sul coseno iperbolico:

$$y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right).$$

(I protagonisti di questa vicenda sono citati nel Capitolo 8, dedicato al Settecento.)

Infine Galileo intuisce che esistono infiniti di "ordine superiore" e che insiemi infiniti uno contenuto nell'altro possano essere in corrispondenza biunivoca ma non è interessato a un approfondimento concettuale di questi temi.