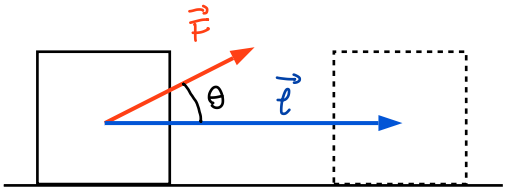
CAPITOLO 8

Trattiamo i concetti di LAVORO ed ENERGIA.

LAVORO → una forza deve agire su un corpo che deve muoversi

LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA COSTANTE

Lavoro di una forza costante su un corpo che si muove in linea retta.



$\Delta\vec{r} = \vec{\ell}$ SPOSTAMENTO

$W = \vec{F} \cdot \vec{\ell} = F\ell\cos\theta$ LAVORO

UNITÀ DI MISURA → $N \cdot m$ = Joule [J]

Il lavoro dipende dalle forze relative delle forze e dello spostamento.

$\vec{F} \perp \vec{\ell} \rightarrow W = 0$

$\vec{F}$ opposta a $\vec{\ell} \rightarrow W < 0$

$\sum_i \vec{F}_i \rightarrow \sum_i W_i$

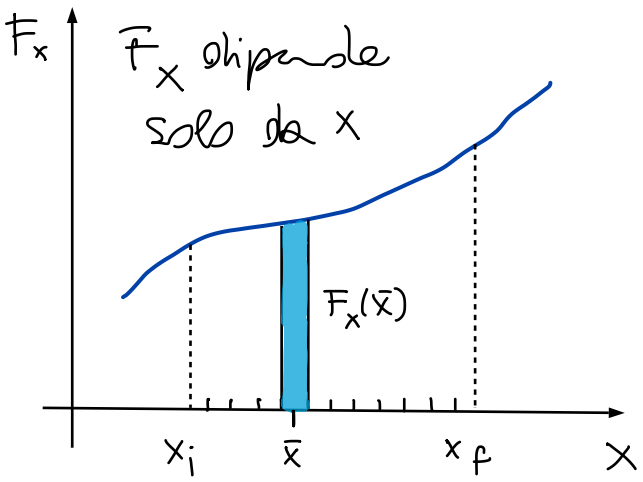
(ex) Determinare il lavoro compiuto dalla forza costante $\vec{F} = (2N)\hat{i} + (3N)\hat{j} - (5N)\hat{k}$ mentre spinge un corpo che si sposta di $\vec{\ell} = (9m)\hat{i} + (4m)\hat{j} + (6m)\hat{k}$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\ell} = (2N \cdot 9m) + (3N \cdot 4m) - (5N \cdot 6m)$$

$$= 18J + 12J - 30J = 0$$

LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA VARIABILE ED ESPRESSIONE GENERALE DEL LAVORO

Non tutte le forze sono costanti → FORZA ELASTICA dipende dall'allungamento della molla



LAVORO per $\ell = x_f - x_i$?

AREA REGIONE SOTTESA ALLA CURVA

$$\Delta W \approx \vec{F} \cdot \Delta\vec{\ell} = [F_x(\bar{x})\hat{\imath}] \cdot (\Delta x \hat{\imath}) = F_x(\bar{x})\Delta x$$

$$W \approx \sum F_x(\bar{x})\Delta x \quad \text{con } \bar{x} = \langle x \rangle \text{ in } \Delta x$$

Se N è il numero di intervalli tale che $N\Delta x = x_f - x_i$, più N aumenta, più Δx diminuisce e l'approssimazione $F_x(\bar{x})$ diventa più precisa.

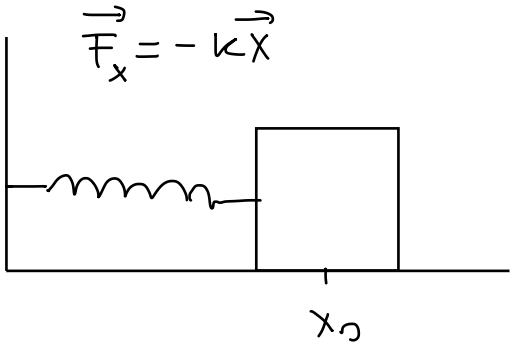
$$W = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta x \to 0}} \sum \vec{F}_x(\bar{x}) \cdot \Delta\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}(x) \cdot d\vec{x}$$

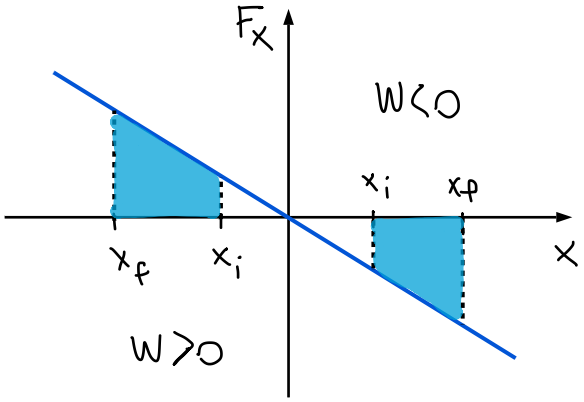
CURVA DI F_x SOPRA ASSE X → $W > 0$

CURVA DI F_x SOTTO ASSE X → $W < 0$

NB FORZA COSTANTE → $W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{x} = F \int_{x_i}^{x_f} dx = F(x_f - x_i)$

FORZA ELASTICA → la forza dipende dallo spostamento ed è una forza centrale, cioè cambia verso se c'è compressione o allungamento della molla





$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-k\vec{x})\cdot d\vec{x} = -k\int_{x_i}^{x_f} \vec{x}\cdot d\vec{x}$$

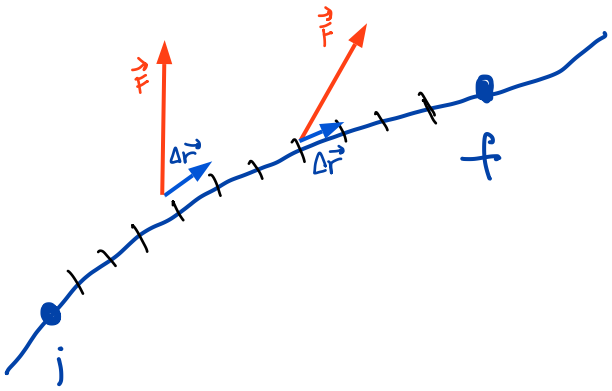
ALLUNGAMENTO $\longrightarrow \vec{x}\cdot d\vec{x} = x\,dx$

$$W = -k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = -k\,\frac{1}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right) < 0$$

COMPRESSIONE $\longrightarrow \vec{x}\cdot d\vec{x} = -x\,dx$

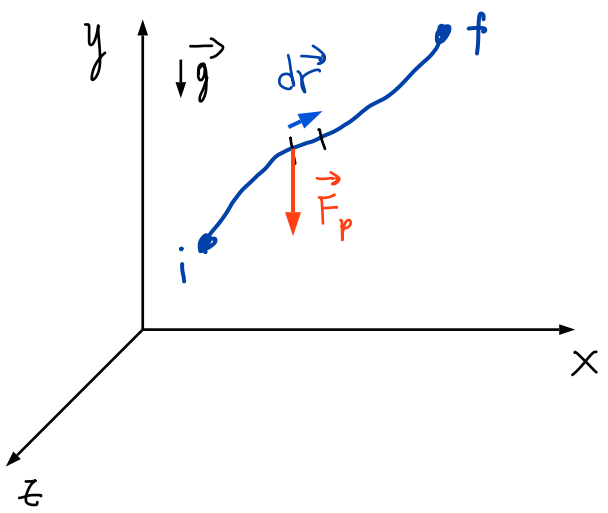
$$W = -k\int_{x_i}^{x_f} (-x\,dx) = k\,\frac{1}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right) > 0$$

ESPRESSIONE GENERALE DEL LAVORO $\longrightarrow$ Facciamo il caso generale di un corpo che si muove su traiettoria curva



$$W = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}$$
$$= \int_i^f (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Facciamo l'esempio applicato al LAVORO della FORZA PESO



$$\vec{F}_p = m\vec{g} \rightarrow F = -mg$$

$$W = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{y_i}^{y_f} (-mg)\,dy =$$

$$= -mg(y_f - y_i)$$

NB Non abbiamo specificato la traiettoria!

IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA GRAVITAZIONALE È INDIPENDENTE DAL PARTICOLARE PERCORSO CHE HA PER ESTREMI i E f.

TEOREMA LAVORO-ENERGIA ED ENERGIA CINETICA

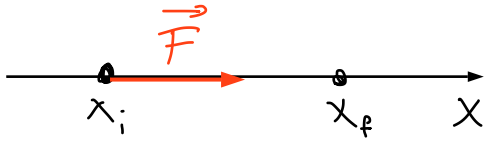
Relazione tra lavoro ed energia cinetica o energia di moto, ovvero tra VELOCITÀ-POSIZIONE, a prescindere dalla complicatezza del moto.

ENERGIA → MISURA DELLA CAPACITÀ DI UN SISTEMA DI PRODURRE LAVORO

→ SE LA VARIAZIONE DI UNA GRANDEZZA POSSEDUTA DA UN SISTEMA È CAPACE DI PRODURRE LAVORO, ALLORA SI DIRÀ CHE TALE GRANDEZZA È UN'ENERGIA.

Ci deve essere una relazione tra IL LAVORO DI UNA FORZA e MOTO DI UN CORPO.

Consideriamo un corpo che si muove lungo $\hat{x}$ perché sottoposto a $\vec{F}$ costante lungo x.



$$a_x = \sum \frac{F_x}{m}$$

Sappiamo dalla cinematica che

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a_x(x_f - x_i) \longrightarrow a_x(x_f - x_i) = \frac{1}{2}v_f^2 - \frac{1}{2}v_i^2$$

Calcoliamo il lavoro totale W_{TOT} della forza risultante agente sul corpo

$$W_{TOT} = \sum F_x(x_f - x_i) = ma_x(x_f - x_i) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

TEOREMA LAVORO-ENERGIA

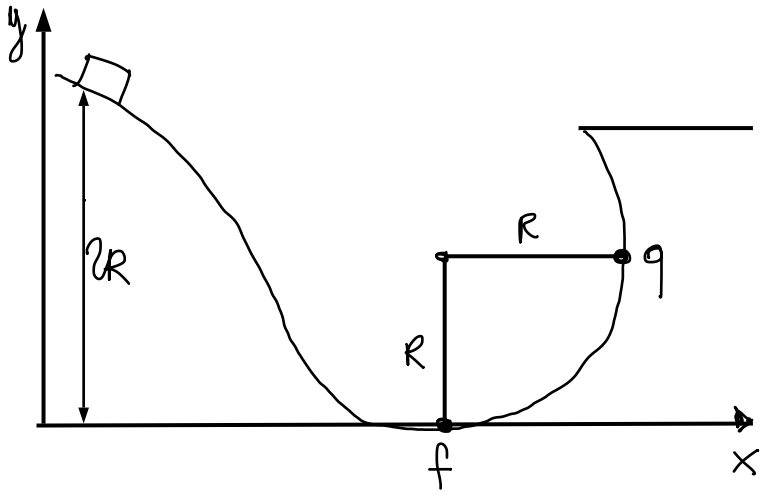
detto anche TEOREMA DELLE FORZE VIVE.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{ENERGIA CINETICA}$$

$$W_{TOT} = \Delta K = K_f - K_i$$

IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA RISULTANTE CHE AGISCE SU UN CORPO È PARI ALLA VARIAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA DI QUEL CORPO.

(ex) Slittino su una pista di ghiaccio



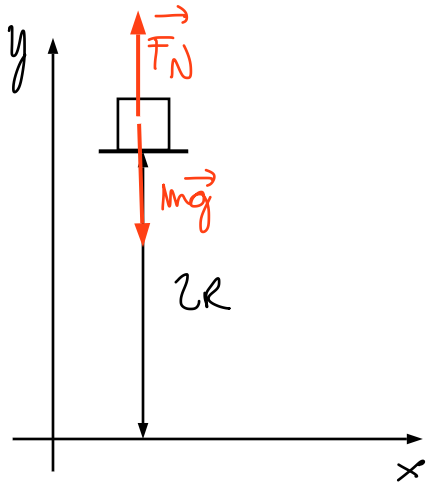
$|\vec{v}_f| = ?$

$|\vec{F}_N(f)| = ?$

$|\vec{v}_q| = ?$

$|\vec{F}_N(q)| = ?$

①

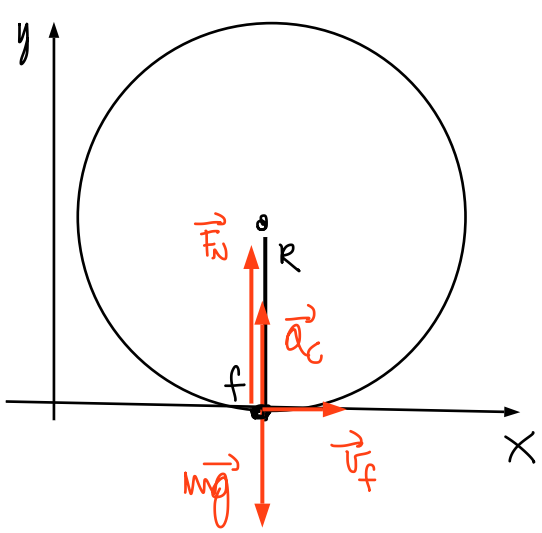


$$W = \Delta U$$

$$-mg(0-2R) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}m(0)^2$$

$$v_f = 2\sqrt{gR}$$

②



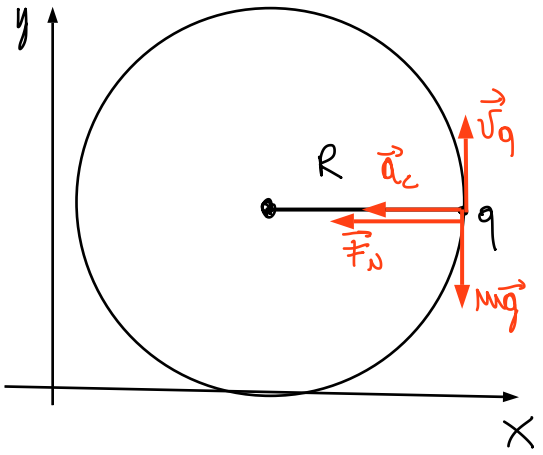
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} + \vec{F_N} = m\vec{a_c}$$

$$-mg + F_N = m\frac{v_f^2}{R}$$

$$F_N = mg + 4gm = 5mg$$

③



$$W = \Delta U$$

$$-mg(R-0) = \frac{1}{2}mv_q^2 - \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$-gR = \frac{1}{2}v_q^2 - \frac{1}{8}4gR$$

$$v_q^2 = -2gR + 4gR = 2gR$$

$$v_q = \sqrt{2gR}$$

$$\vec{F_N} = m\vec{a_c} \rightarrow -F_N = -m\frac{v_q^2}{R}$$

$$F_N = 2mg$$

CASO GENERALE TEOREMA LAVORO-ENERGIA → Ricaviamo il teorema nel caso generale per qualsiasi moto e traiettoria partendo dalla seconda legge di Newton

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \longrightarrow \int_i^f \left(\sum \vec{F}\right)\cdot d\vec{r} = \int_i^f (m\vec{a})\cdot d\vec{r}$$

Risolviamo il secondo termine in modo intelligente. Focalizzandoci per la componente a_x, per le altre sarà lo stesso

$$a_x dx = \frac{dv_x}{dt}dx = \frac{dv_x}{dt}v_x dt = v_x\left(\frac{dv_x}{dt}\right)dt = \frac{1}{2}\frac{dv_x^2}{dt}dt$$

NB $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_x^2\right) = \frac{1}{2}\frac{dv_x^2}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dv_x}{dt}v_x + v_x\frac{dv_x}{dt}\right) = v_x\left(\frac{dv_x}{dt}\right)$$

Moltiplichiamo per m e torniamo a tutte le componenti di $\vec{a}$

$$m\vec{a}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m\left[\frac{dv_x^2}{dt} + \frac{dv_y^2}{dt} + \frac{dv_z^2}{dt}\right]dt = \frac{1}{2}m\frac{d\vec{v}^2}{dt}dt$$

Così otteniamo il TEOREMA LAVORO-ENERGIA caso generale

$$W_{TOT} = \int_i^f \left(\sum \vec{F}\right)\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m\int_i^f \frac{d\vec{v}^2}{dt}dt = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

POTENZA

POTENZA → CON CHE RAPIDITÀ IL LAVORO VIENE COMPIUTO

$$\langle P\rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad P = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad \left[W = \frac{J}{s}\right]$$

WATT

Si può esprimere anche in funzione di $\vec{F}$ e SPOSTAMENTO

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta \vec{r} \to 0} P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Il consumo dell'energia può essere espresso in funzione della potenza nel tempo

$$\Delta E = P \Delta t$$