CAPITOLO 9

Le forze si dividono in CONSERVATIVE e NON CONSERVATIVE.

FORZE CONSERVATIVE → lavoro della forza è nullo per qualsiasi cammino chiuso
→ IL LAVORO NON DIPENDE DAL PERCORSO (ex. forza gravitazionale)

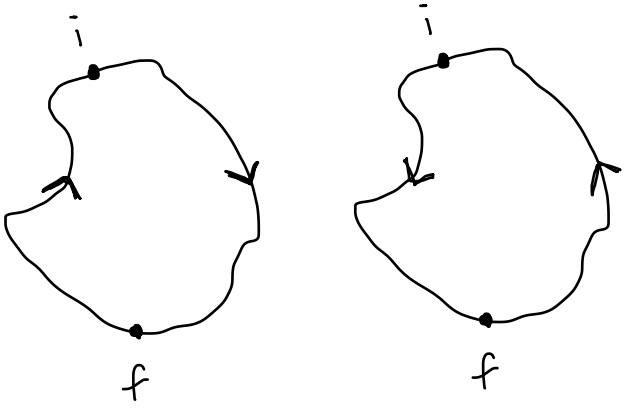
FORZA NON CONSERVATIVA → lavoro diverso da zero per almeno un cammino chiuso
→ IL LAVORO DIPENDE DAL PERCORSO (ex. forza d'attrito cinetico)

FORZE CONSERVATIVE ED ENERGIA POTENZIALE IN 3D

Per una forza conservativa la CIRCUITAZIONE è NULLA

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad \oint \equiv \text{INTEGRALE SU PERCORSO CHIUSO}$$

Possiamo dimostrare che una FORZA CONSERVATIVA compie lo STESSO LAVORO A PRESCINDERE DAL PERCORSO PRENDENDO GLI STESSI PUNTI INIZIALI E FINALI.



$d\vec{r} \to -d\vec{r}$ cambio verso di percorrenza

$$\int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ENERGIA POTENZIALE → LA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE È IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA CONSERVATIVA CAMBIATA DI SEGNO.

$$U_f - U_i = -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} \longrightarrow -dU(x,y,z) = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, U$$

NB Dato un campo vettoriale, è possibile sapere se è possibile scriverlo come il gradiente di un campo scalare se il suo rotore è nullo

se $\vec{rot}\,\vec{F} = 0$ allora $\exists\, U(x,y,z)$ t.c. $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, U$

$\vec{F}$ è CONSERVATIVA e U la sua ENERGIA POTENZIALE

L'energia potenziale è definita a meno di una costante: solo le differenze di energia potenziale si possono misurare, e quindi hanno significato.

CAMPO DI FORZE CONSERVATIVO $\longrightarrow \vec{rot}\,\vec{F} = 0$, $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

NB $$\vec{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Utilizzando l'OPERATORE NABLA, UNA FORZA CONSERVATIVA ha

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0\,, \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Partiamo dal TEOREMA ENERGIA-LAVORO che dice $W = \Delta K$

$$K_f - K_i = \Delta W = -(U_f - U_i) \longrightarrow K_f + U_f = K_i + U_i = E$$

$E \equiv$ ENERGIA MECCANICA

L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA SE IL LAVORO È COMPIUTO DA SOLE FORZE CONSERVATIVE.

ESEMPI DI ENERGIE POTENZIALE DI $\vec{F}$ CONSERVATIVE

Vediamo l'espressione dell'energia meccanica per delle forze già VISTE

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE $\longrightarrow$ $U_f - U_i = -\int_i^f m\vec{g}\cdot d\vec{y} = mgh_f - mgh_i$

con $\vec{g} = -g\,d\hat{y}$

ENERGIA POTENZIALE ELASTICA $\longrightarrow$ $U_f - U_i = -\int_i^f (-k\vec{x})\cdot d\vec{x} = \int_i^f k\vec{x}\cdot d\vec{x}$

$$= \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

Approssimiamo la compressione o estensione

ESTENSIONE $\longrightarrow \vec{x} \parallel d\vec{x} \longrightarrow U_f - U_i = \int_i^f kx\,dx =$

$$= k\int_i^f (x_c - 0)\,dx$$

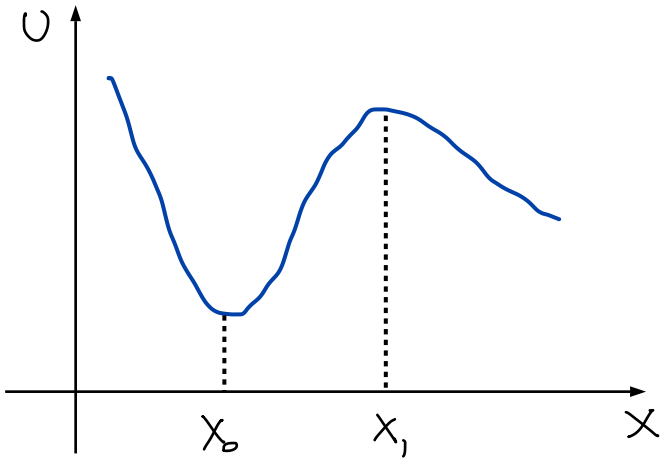
$$= \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

COMPRESSIONE $\longrightarrow \vec{x} \parallel -d\vec{x} \longrightarrow U_f - U_i = -\int_i^f kx\,dx =$

$$= -k\int_i^f (0 - x_c)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

ANALISI GRAFICA DEI SISTEMI CONSERVATIVI



$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = 0 \rightarrow$ PUNTO DI EQUILIBRIO

$\vec{x}_0 \equiv$ PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE

$\vec{x}_1 \equiv$ PUNTO DI EQUILIBRIO INSTABILE

EQUILIBRIO STABILE → Piccolo spostamento, le forze mi riportano in $\vec{x}_0$

EQUILIBRIO ISTABILE → Piccolo spostamento, le forze mi allontanano da $\vec{x}_1$

FORZE NON CONSERVATIVE

FORZE NON CONSERVATIVE → se compiono lavoro, l'energia meccanica non si conserva

Partiamo dal teorema lavoro-energia e abbiamo

$$K_f - K_i = W_{tot} = W_{cons} + W_{non} = -(U_f - U_i) + W_{non}$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i + W_{non}$$

$$E_f = E_i + W_{non}$$

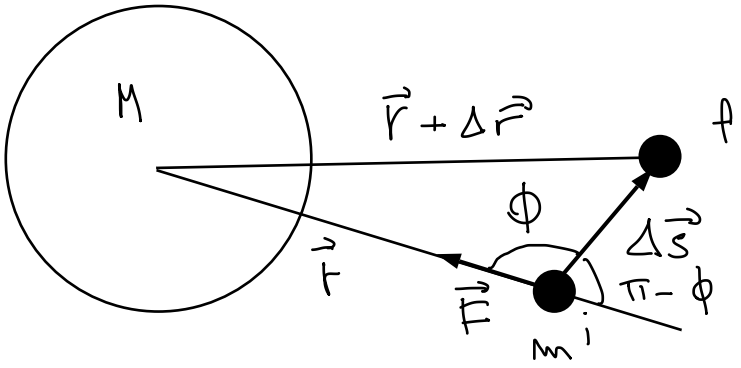
$W_{non} \equiv$ LAVORO FORZE NON CONSERVATIVE

Lo non sappiamo la forma funzionale: dipende dalla traiettoria e la forza che ne è responsabile

Questa è la FORMA MODIFICATA IN PRESENZA DI ATTRITO DEL TEOREMA LAVORO-ENERGIA.

MOTO DEI SATELLITI E VELOCITÀ DI FUGA

FORZA GRAVITAZIONALE → forza conservativa

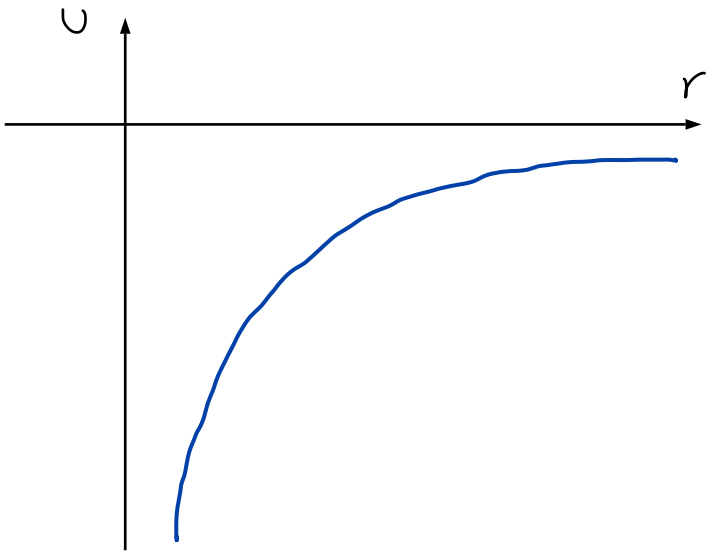


$$\Delta\vec{r} = |\Delta\vec{s}|\cos(\pi-\phi) = -\Delta s\cos\phi$$

$$W = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_{r_i}^{r_f} G\frac{Mm}{r^2}\,dr = -GMm\int_{r_i}^{r_f}\frac{1}{r^2}\,dr = GMm\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_i}\right)$$

Quindi posso ricavarmi l'energia potenziale gravitazionale

$$U_f - U_i = -GMm\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_i}\right)$$



$$U(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

Per convenzione è NEGATIVA

Voglio adesso ricavarmi l'ENERGIA CINETICA GRAVITAZIONALE usando la seconda legge di Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow -\frac{GmM}{r^2} = -\frac{v^2}{r}m$$

$$\frac{1}{2}K \cdot \frac{GMm}{r^2} = \frac{1}{2}r \cdot \frac{v^2}{r}m \longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

Adesso posso scrivere l'energia meccanica del sistema

$$E = K + U = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} + \left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

NB Un satellite in orbita ha MENO ENERGIA di quella che avrebbe se fosse legato alla Terra.

$$|E| = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

ENERGIA DI LEGAME × ORBITA CIRCOLARE

Posso anche calcolare la VELOCITÀ DI FUGA per sfuggire dal campo gravitazionale terrestre partendo da r_i:

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{r_i} \longrightarrow v_f = \sqrt{\frac{2GM}{r_i}}$$