CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$\vec{F}_{TOT} = \vec{0}$ ⟶ la QUANTITÀ DI MOTO SI CONSERVA

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i \quad , \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

Questo deriva dalla 2° legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, che riscrivo

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dp_x}{dt}\hat{i} + \frac{dp_y}{dt}\hat{j} + \frac{dp_z}{dt}\hat{k}$$

NB Analogia con la conservazione dell'energia meccanica, dove però ciò che si conserva è uno scalare e le forze devono essere conservative.

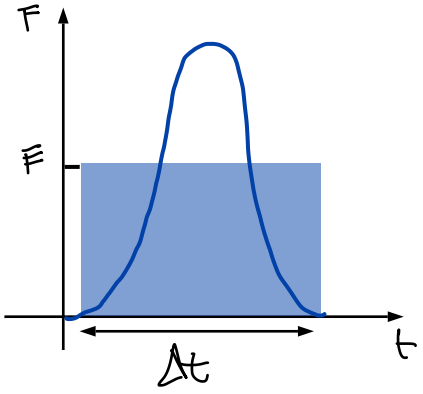
PROPRIETÀ ⟶ la quantità di moto della singola particella può variare anche se la quantità di moto totale del sistema si conserva

⟶ lo stesso vale per la struttura interna del sistema e la quantità di moto

IMPULSO

FORZE IMPULSIVE ⟶ forze che vengono esercitate per un tempo limitato, solitamente con alta intensità

⟶ In prima approssimazione possiamo considerare tutte le altre forze nulle durante l'applicazione della forza impulsiva



$$\sum \vec{F} = \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \longrightarrow d\vec{p} = \vec{F}\,dt$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt = \vec{J} \equiv \text{IMPULSO DI UNA FORZA}$$

$\vec{J}$ [N·s]

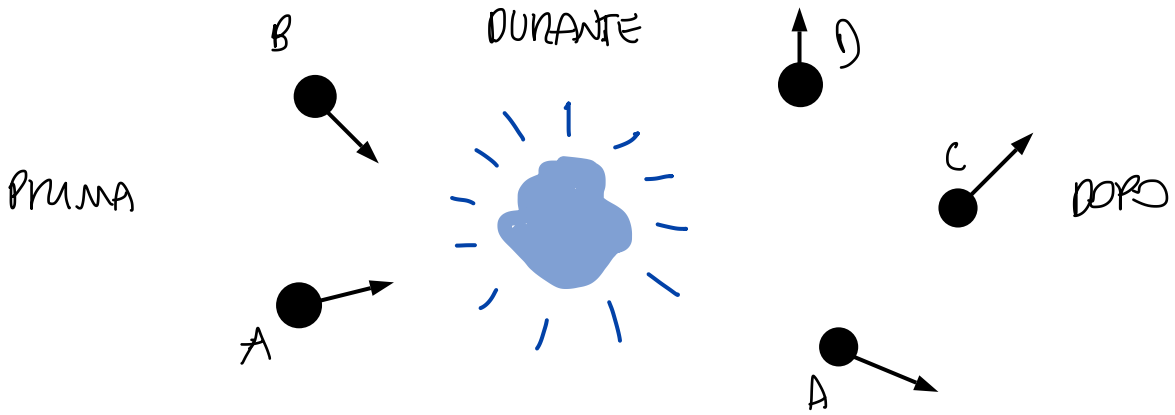
$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \langle \vec{F} \rangle dt$$

URTI

URTO → interazione tra 2 o più corpi che ha luogo in una regione limitata di tempo e spazio e poi lasciano tale regione

→ forze esterne trascurabili: la QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA SI CONSERVA PRIMA E DOPO L'URTO

→ vogliamo mettere in relazione le velocità iniziali e finali delle particelle

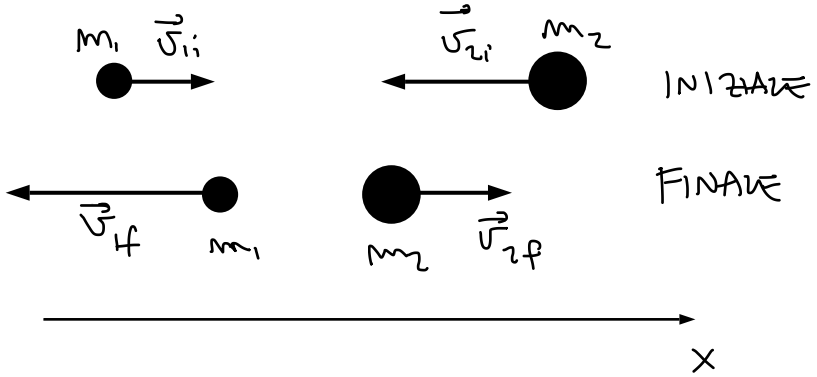


Abbiamo due tipologie di urti:

URTI ELASTICI → si conserva anche l'energia cinetica

URTI ANELASTICI → non si conserva l'energia cinetica

URTI ELASTICI 1D



Possiamo mettere a sistema conservazione di $\vec{p}$ e K

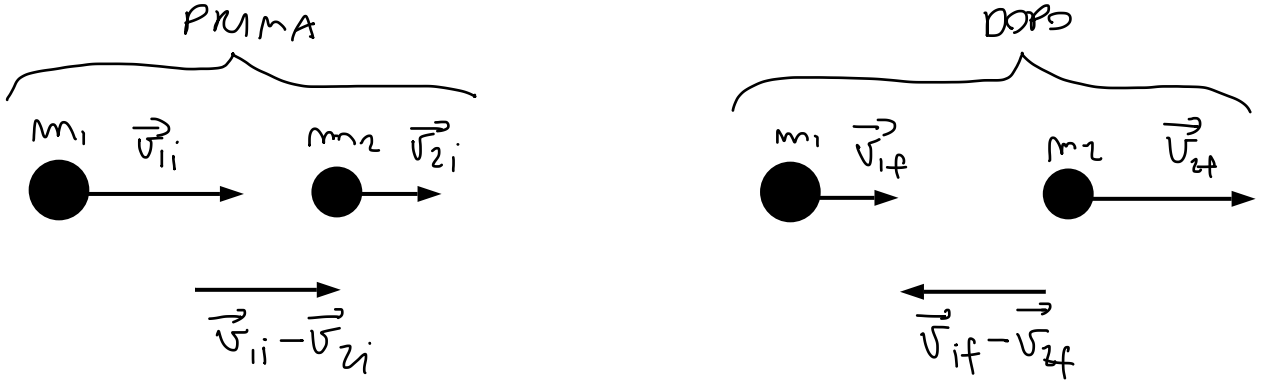
$$\begin{cases} m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m\vec{v}_{2f} \\ \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \end{cases}$$

Vediamo delle relazioni utili

$$\begin{cases} m_1(\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{1f}) = m_2(\vec{v}_{2i} - \vec{v}_{2f}) \\ m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2i}^2 - v_{2f}^2) \end{cases}$$

$$\frac{m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2)}{m_1(v_{1i} - v_{1f})} = \frac{m_2(v_{2i}^2 - v_{2f}^2)}{m_2(v_{2i} - v_{2f})} \longrightarrow \begin{aligned} v_{1i} + v_{1f} &= v_{2i} + v_{2f} \\ v_{1i} - v_{2i} &= -(v_{1f} - v_{2f}) \end{aligned}$$

NB VELOCITÀ RELATIVA dei corpi CAMBIA DI SEGNO, ma IL MODULO RIMANE LO STESSO.



(Rx) SECONDA PARTICELLA INIZIALMENTE FERMA ($v_{2i} = 0$)

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} v_{2f} &= v_{1i} + v_{1f} \\ m_1 v_{1i} &= m_1 v_{1f} + m_2(v_{1i} + v_{1f}) \end{aligned}$$

$$v_{1f} = v_{1i}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right), \quad v_{2f} = v_{1i}\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

Vediamo ora dei casi particolari per l'urto elastico

① $m_1 = m_2 \longrightarrow$ SCAMBIO DELLE VELOCITÀ

$m v_{1i} + m v_{2i} = m v_{1f} + m v_{2f} \longrightarrow v_{1i} + v_{2i} = v_{1f} + v_{2f}$

Sommo e sottraggo $v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$ ed ottengo

$$\begin{cases} v_{1i} + v_{2i} + v_{1i} - v_{2i} = v_{1f} + v_{2f} - v_{1f} + v_{2f} \longrightarrow v_{1i} = v_{2f} \\ v_{1i} + v_{2i} - v_{1i} + v_{2i} = v_{1f} + v_{2f} + v_{1f} - v_{2f} \longrightarrow v_{2i} = v_{1f} \end{cases}$$

② $v_{2i} = 0$, $m_1 \gg m_2 \longrightarrow v_{1f} \simeq v_{1f}$, v_{2f} RADDOPPIA

$$\begin{cases} v_{1f} = v_{1i}\left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \simeq v_{1i}\left(\dfrac{m_1}{m_1}\right) = v_{1i} \\ v_{2f} = v_{1i}\left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) \simeq v_{1i}\left(\dfrac{2m_1}{m_1}\right) = 2v_{1i} \end{cases}$$

③ $v_{2i} = 0$, $m_1 \ll m_2 \longrightarrow v_{2f} \simeq 0$, m_1 RIMBALZA CON STESSO $|v|$

$$\begin{cases} v_{1f} = v_{1i}\left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \simeq v_{1i}\left(-\dfrac{m_2}{m_2}\right) = -v_{1i} \\ v_{2f} = v_{1i}\left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) \simeq v_{1i}\left(\dfrac{2m_1}{m_2}\right) \longrightarrow 0 \text{ per } m_2 \gg m_1 \end{cases}$$

④ CASO GENERALE (algebra tediosa...)

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}, \quad v_{2f} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} v_{2i} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO 1D

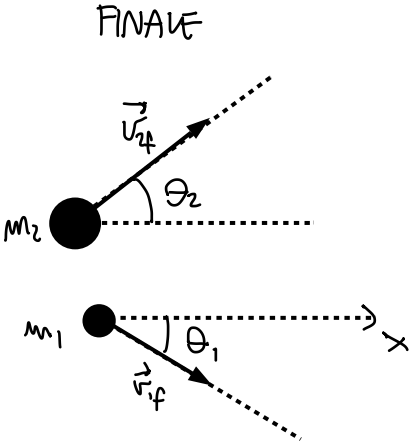
Se c'è solo una velocità finale v_f che si può determinare dalla conservazione di $\vec{p}$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

URTI IN 2D E 3D → In 2D ci sono quattro incognite: v_{1fx}, v_{1fy}, v_{2fx}, v_{2fy}. In 3D 6... la conservazione di $\vec{p}$ e E non basta.





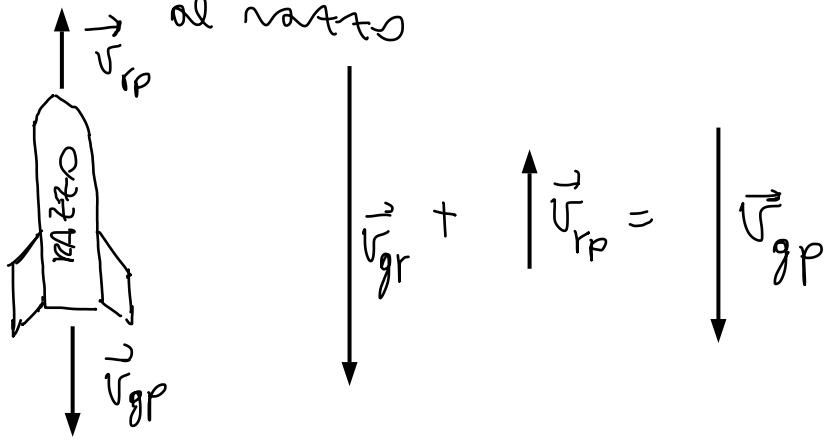
$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

→ Negli esperimenti si misura anche la direzione di una delle particelle scattered così che si possano determinare tutte le incognite.

MOTO DEI RAZZI

Studiamo il moto di un razzo di massa m e velocità iniziale $\vec{v}_{rp}$

ΔM → massa combustante espulsa indietro in Δt e $\vec{v}_{gr}$ rispetto al razzo



$$\vec{p}_i = m\vec{v}_{rp}$$

P = OSSERVATO INERZIALE

$\vec{v}_{gp}$ = VELOCITÀ GAS SCARICO

$$\begin{cases} \vec{p}_f = (m-\Delta M)(\vec{v}_{rp} + \Delta\vec{v}_{rp}) + \Delta M\,\vec{v}_{gp} \\ \vec{v}_{gp} = \vec{v}_{gr} + \vec{v}_{rp} \end{cases}$$

$$\vec{p}_f = (m-\Delta M)(\vec{v}_{rp} + \Delta\vec{v}_{rp}) + \Delta M(\vec{v}_{gr} + \vec{v}_{rp})$$

$$= m\vec{v}_{rp} + (m-\Delta M)\Delta\vec{v}_{rp} + \Delta M\,\vec{v}_{gr}$$

Per la seconda legge di Newton $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} \simeq \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{\Delta t}$, quindi

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{m\Delta\vec{v}_{rp} - \Delta M\Delta\vec{v}_{rp} + \Delta M\vec{v}_{gr}}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{m\Delta\vec{v}_{rp} + \Delta M\,\vec{v}_{gr}}{\Delta t}$$

ΔM è la massa di scarico, quindi corrisponde ad una variazione della massa del razzo di $-dm$

$$m\frac{d\vec{v}_{rp}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{v}_{gr}\frac{dm}{dt}$$

SPINTA NEL RAZZO

SPAZIO INTERSTELLARE $\rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = 0 \rightarrow m\frac{d\vec{v}_{rp}}{dt} = \vec{v}_{gr}\frac{dm}{dt}$

$$d\vec{v}_{rp} = \vec{v}_{gr}\frac{dm}{m} \rightarrow \int d\vec{v}_{rp} = \vec{v}_{gr}\int \frac{dm}{m}$$

$$(\vec{v}_{rp})_f - (\vec{v}_{rp})_i = \vec{v}_{gr}\left(\ln\frac{m_f}{m_i}\right)$$

QUANTO MAGGIORE È $\vec{v}_{gr}$ (SCARICO), + EFFICIENTE È LA PROPULSIONE