Capitolo 6

Metà Seicento

6.1 Anticipi di modernità

Nel cuore del XVII secolo sono attivi tre matematici trascurati e sfortunati, "schiacciati" tra i due giganti di inizio secolo (Descartes e Fermat) e i due di fine secolo (Newton e Leibniz).

Da un punto di vista strettamente cronologico, le loro vite non occupano esattamente la metà del secolo, ma sono accomunati dall'anticipare alcuni aspetti della matematica moderna: in analisi, in geometria proiettiva, in algebra e aritmetica, in calcolo automatico.

Per il loro precorrere i tempi, la loro opera non è stata apprezzata dai contemporanei ma servirà come punto di partenza nei decenni successivi.

Qui tratteggiamo le loro biografie, osservando che due di loro (Torricelli e Pascal) hanno una vita breve che si fermerà prima dei quarant'anni e che, anche per questo, i loro contributi alla matematica sono da ritenersi straordinari.

6.2 Torricelli



Ritratto di Evangelista Torricelli (Lorenzo Lippi, 1647 circa)

6.2.1 Biografia

Evangelista Torricelli nasce a Roma nel **1608** da genitori romagnoli, Gaspare Ruberti, tessitore, e Giacoma Torricelli, originaria di Faenza.

Rimane orfano in tenera età e trascorre l'infanzia e l'adolescenza a Faenza, dove è iniziato allo studio dallo zio materno, Gian Francesco Torricelli (Don Jacopo, monaco camaldolese), parroco di S. Ippolito, che cura la sua educazione primaria.

Frequenta poi la scuola dei Gesuiti, prima a Faenza e quindi a Roma, dove si avvicina agli studi di matematica, che approfondisce sotto la guida di Benedetto Castelli (1577-1644), padre benedettino, rinomato professore di matematica e idraulica al Collegio della Sapienza, e illustre discepolo di Galileo.

Nel **1632** Evangelista Torricelli scrive a **Galileo Galilei** una lettera di risposta a sue richieste a Benedetto Castelli che, assente in quei giorni, lascia allo studente il compito di segretario; in tale lettera Torricelli coglie l'occasione per presentarsi a Galileo, che ammira grandemente come cultore di astronomia e di matematica. Tale lettera è conservata alla Biblioteca Nazionale di Firenze fra i *Manoscritti Galileiani*.

Il vivere da vicino le vicende del processo a Galileo induce Torricelli a dedicarsi soprattutto alla matematica, nonostante padroneggi gli strumenti e sia un abile costruttore di cannocchiali.

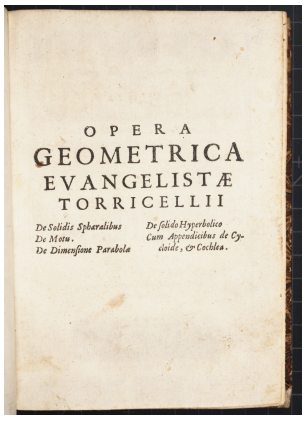
Negli anni dal 1632 al 1641 lavora e studia a Roma con padre Castelli e poi diventa segretario di Giovanni Ciampoli, un alto prelato e intellettuale devoto a Galileo, che Torricelli segue nei suoi incarichi governativi nelle Marche e nell'Umbria.

Nel **1641** Castelli presenta a Galileo, nel suo ritiro ad Arcetri, il manoscritto dell'opera di Torricelli dal titolo *De motu gravium*, suggerendogli di impiegarlo come discepolo e assistente. Infatti il 10 ottobre 1641 Torricelli diventa assistente di Galileo e su domanda e insistenza di Galilei si trasferisce nella sua abitazione.

Galileo muore pochi mesi dopo (8 gennaio del 1642). Alla sua morte, il granduca Ferdinando II de' Medici nomina Torricelli suo successore come matematico del Granducato di Toscana, carica che ricoprirà fino alla morte, e diventa professore di matematica presso l'Accademia fiorentina.

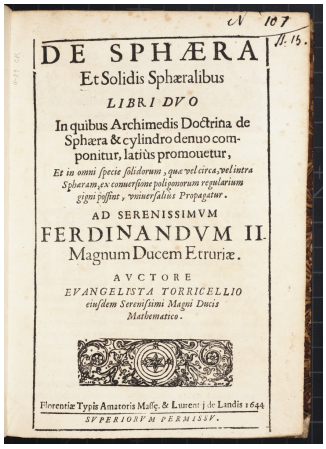
Oltre all'attività di matematico e studioso di geometria, Evangelista si dedica alla fisica, studiando il moto dei gravi e dei fluidi e approfondendo l'ottica. Possiede un laboratorio nel quale realizza egli stesso lenti e telescopi. A causa della sua prematura scomparsa, non conosciamo i particolari del processo originale di lavorazione, poiché lo scienziato lo tiene coperto da segreto.

Torricelli si dedica anche allo studio dei fluidi, giungendo a inventare il barometro a mercurio, chiamato "tubo di Torricelli" o "tubo da vuoto di Torricelli", prima della fine del 1644.


OPERA
GEOMETRICA
EVANGELISTÆ
TORRICELLII
De Solidis Sphæralibus
De Motu.
De Dimensione Parabolæ
De solido Hyperbolico
Cum Appendicibus de Cycloide, & Cochlea.

• Nel **1644** esce, a spese del granduca di Toscana, il solo volume da lui pubblicato, dal titolo *Opera geometrica*. E' costituito da tre parti e del quale *De motu gravium*, già mostrato a Galileo tre anni prima, costituisce la seconda parte, dedicata al moto dei proiettili; oltre a questa, sono trattate questioni di matematica col metodo degli indivisibili di Cavalieri.

Presto diffuso in tutta Europa, è lodato da Descartes, Pascal e Huygens.



DE SPHÆRA
Et Solidis Sphæralibus
LIBRI DVO
In quibus Archimedis Doctrina de Sphæra & cylindro denuo componitur, latiùs promouetur,
Et in omni specie solidorum, quæ vel circa, vel intra Sphæram, ex conuersione polygonorum regularium gigni possunt, vniuersalis Propagatur.
AD SERENISSIMVM
FERDINANDVM II.
Magnum Ducem Etruriæ.
AVCTORE
EVANGELISTA TORRICELLIO
eiusdem Serenissimi Magni Ducis
Mathematico.
Florentiæ Typis Amatoris Massæ & Laurentij de Landis 1644
SVPERIORVM PERMISSV.



QVADRATVRA
PARABOLAE.
Pluribus modis per duplicem positionem, more antiquorum, absoluta.
Lemma Primum.

La chiarezza dell'esposizione, scarsa nella trattazione di Cavalieri, riesce a diffondere il nuovo metodo, che precorre - come vedremo - la moderna analisi infinitesimale.

Torricelli muore a Firenze nel **1647**: ha appena compiuto 39 anni. Ha contratto probabilmente una malattia (tifo oppure polmonite) e viene sepolto nella basilica di San Lorenzo a Firenze.

6.2.2 Torricelli matematico

Essendo in diretto contatto con **Bonaventura Cavalieri**, inizia a lavorare su problemi analoghi e ben presto supera, secondo lo stesso Cavalieri, il suo maestro.

E' abilissimo nell'utilizzare le tecniche di Cavalieri, cioè il *Metodo degli indivisibili*, come anche il *Metodo d'esaustione* che era in uso presso gli antichi, fra tutti il grande Archimede, di cui Torricelli è entusiasta ammiratore: a lui dobbiamo la riscoperta secentesca del matematico siracusano.

Per il gusto di imitare i classici, Torricelli dimostra in ventun modi diversi un teorema di Archimede: undici con il metodo d'esaustione, dieci con il metodo degli indivisibili.

Spesso i risultati ottenuti con la geometria degli indivisibili vengono poi confermati con altre dimostrazioni, a causa della controversia sulla loro fondatezza.

E' interessante osservare che lo stesso Archimede aveva elaborato una sorta di *Geometria degli indivisibili*, ma non la riteneva rigorosa, e perciò ridimostrava sempre i suoi risultati con il metodo d'esaustione. Ma ciò si è scoperto soltanto nel 1906 ed è l'inizio di una avventurosa storia di un'opera di Archimede[1].

[1]Nel 1906, il filologo e storico danese **Johan Ludvig Heiberg** compì, a Costantinopoli, una delle più grandi scoperte della storia della scienza: individuò e identificò il *Palinsesto di Archimede*.

Heiberg si trovava nella biblioteca del monastero del Santo Sepolcro quando esaminò un eucologio (un libro di preghiere bizantino) scritto nel 1229 dal monaco Johannes Myronas. Il monaco, per risparmiare sulla costosa pergamena, aveva preso dei manoscritti più antichi, ne aveva raschiato via l'inchiostro, tagliato e ruotato i fogli, e vi aveva scritto sopra le preghiere (creando, appunto, un *palinsesto*).

Sotto il testo religioso, Heiberg notò delle deboli tracce di formule, diagrammi e scritte matematiche in greco bizantino. Armato solo di una lente d'ingrandimento e della luce naturale, riconobbe lo stile di Archimede di Siracusa e scattò delle fotografie dettagliatissime dei fogli. Grazie al lavoro di trascrizione di Heiberg, l'umanità ha potuto recuperare opere fondamentali che si credevano perdute per sempre, tra cui:

• Il *Metodo dei Teoremi Meccanici*: l'opera più straordinaria, in cui Archimede descriveva il suo "metodo di scoperta" geometrico e matematico basato sulla legge della leva, anticipando di secoli concetti del moderno calcolo infinitesimale.

• Lo *Stomachion*: un antico trattato su un complesso puzzle geometrico a tasselli.

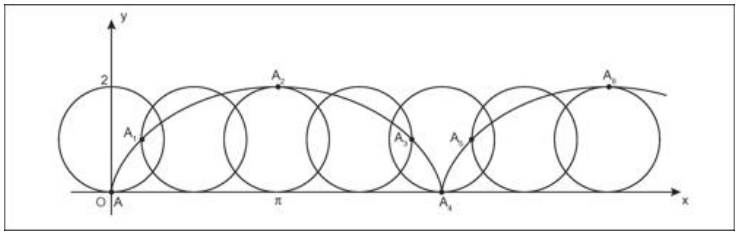
• *Sui corpi galleggianti*: l'unica copia superstite in lingua greca originale di questo testo cardine della fisica.

Dopo lo studio di Heiberg, il manoscritto subì alterazioni e sparì per decenni in mani private, ricomparendo solo nel **1998** quando fu acquistato all'asta da un collezionista privato e depositato al *Walters Art Museum* di Baltimora. Lì è stato sottoposto a sofisticate tecniche di imaging multispettrale e a raggi X per leggere i testi che persino Heiberg non era riuscito a decifrare a occhio nudo.

Nel marzo **2026**, questa storia ha visto un eccezionale colpo di scena: un team di ricercatori francesi ha ritrovato la pagina numero 123 del palinsesto, che si riteneva perduta da un secolo. La pagina è stata identificata nella collezione del *Musée des Beaux-Arts* di Blois proprio grazie al confronto con le fotografie d'archivio scattate da Heiberg nel 1906.

• Nel **1643** Torricelli invia a Mersenne la quadratura della *cicloide*. Questa è la curva tracciata da un punto fisso su una circonferenza che rotola (senza strisciare) lungo una retta. La sua equazione parametrica è dunque

$$\begin{cases} x = r\,(t - \sin t) \\ y = r\,(1 - \cos t) \end{cases}.$$



L'area sottostante la cicloide è pari a 3 volte l'area del cerchio generatore; tale equivalenza era già sospettata da Galileo, il quale, non riuscendo a misurare per via teorica l'area, la riscontra per via fisica, pesando materialmente dei pezzi di metallo ritagliati secondo la sagoma della curva e della circonferenza generatrice. Galileo deduce, così, per via empirica che il rapporto deve essere prossimo a $3:1$, ma rifiuta la sua prima intuizione forse ritenendo tale rapporto troppo semplice e anzi si convince persino dell'erroneità della sua prima impressione dopo una serie di errori accidentali in successivi studi e misurazioni.

Torricelli ne fornisce una dimostrazione col *Metodo degli indivisibili*.

• Già Descartes aveva incontrato, attraverso Mersenne - portavoce di Galileo in Francia - la *spirale logaritmica*: i matematici francesi dell'epoca discutono animatamente su questa "possibile traiettoria" di un grave sulla Terra. L'equazione in coordinate polari

$$r = ae^{b\theta}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

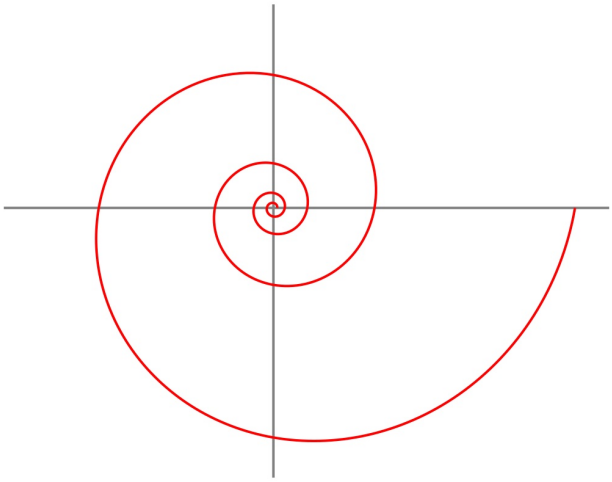
mostra che la distanza tra le spire cresce all'aumentare dell'angolo (mentre nella spirale archimedea $r = a + b\theta$ è costante).

L'equazione equivalente

$$\theta = \frac{1}{b}\,\ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

giustifica il nome "logaritmica".

Descartes che rifiutava decisamente di studiare le curve "meccaniche" (cioè "non-geometriche") la ignorò.



Torricelli nel **1645** ne rettifica con riga e compasso l'intero tratto compreso tra un punto qualunque della curva e il centro, cui la curva tende dopo infinite rivoluzioni.

• Torricelli estende la teoria di Cavalieri con l'introduzione degli *indivisibili curvi*; confronta cioè due figure piane anche scomponendone una con un sistema di curve, in straterelli di spessore infinitesimo (indivisibili curvi) e l'altra con un sistema di rette parallele (indivisibili rettilinei): se ogni indivisibile curvo risulta equiesteso del corrispondente indivisibile rettilineo, le due figure hanno eguale area. Il principio si estende facilmente anche alle figure solide.

• Oltre che a questi risultati di calcolo integrale, i suoi studi (in particolare quelli sul moto) lo portano a notevoli risultati di calcolo differenziale: intuisce il concetto di derivata e riconosce implicitamente il carattere inverso delle operazioni d'integrazione e di derivazione. Il teorema fu enunciato esplicitamente da **Isaac Barrow** (1630-1677), matematico inglese e maestro di Newton, e perciò detto di *Teorema di Torricelli-Barrow*. La sua importanza verrà riconosciuta soltanto da Newton. Ecco l'enunciato del **Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale** in linguaggio moderno.

Teorema di Torricelli-Barrow

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile sul suo dominio e che ammetta primitiva $F(x)$. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

• Torricelli è pioniere anche nel settore delle serie infinite. Nella sua opera, *De dimensione parabolae* (la terza parte di *Opera geometrica*), Torricelli considera una successione decrescente di termini positivi $a_0 > a_1 > a_2 \cdots > 0$ e mostra che la corrispondente serie telescopica

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \cdots$$

converge necessariamente a $a_0 - L$, dove L denota il limite della successione; in questo modo riesce a dare una dimostrazione della espressione per la somma della serie geometrica.

La corrispondenza scientifica con scienziati italiani e francesi è il mezzo di diffusione delle sue maggiori scoperte scientifiche e la causa di accese polemiche di priorità, tra le quali fu aspra quella con **Roberval** (vedi Sezione 5.5). Infatti quest'ultimo, in una delle sue numerose lettere, sostiene di aver anticipato tutti i migliori risultati che Torricelli aveva ottenuti e divulgati in Italia e in Francia. Ancora col *metodo degli indivisibili* Roberval scopre alcune proprietà della cicloide ed espone i calcoli relativi (quadratura, centro di gravità, misura del solido generato dalla sua rotazione intorno alla base). Ma Torricelli pubblica questi risultati prima di lui e quindi Roberval lo accusa di essere un volgare plagiario.

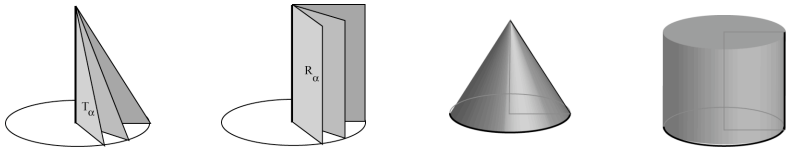
Roberval calcola anche la tangente alla cicloide, componendo i due moti che la generano: ha quindi un approccio cinematico alla geometria piana, simile a quello di Torricelli.

Ancora calcola la rettificazione della spirale (come Torricelli ma indipendentemente da lui).

Certamente, come si evince anche dalle polemiche del tempo, uno dei temi cruciali del periodo era il calcolo delle quadrature. Quest'ultima sarà l'argomento del prossimo Paragrafo 6.2.4, prima del quale riprendiamo alcuni elementi della *Teoria degli indivisibili* e delle conseguenze del *Principio* di Bonaventura Cavalieri (vedi Paragrafi 5.2.2 e 5.2.3).

6.2.3 I dubbi di Cavalieri

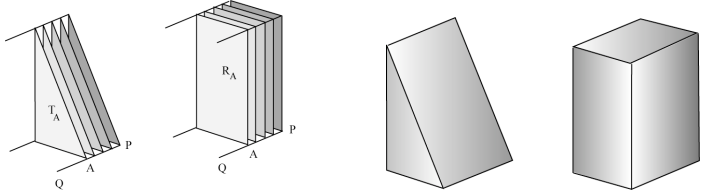
Un cono si ottiene ruotando un triangolo rettangolo attorno a un cateto e risulta quindi formato da infiniti triangoli rettangoli T_α, uno per ogni angolo α. Se raddoppiamo il triangolo rettangolo fino a ottenere un rettangolo che ruotiamo nello stesso modo, abbiamo un cilindro che risulta formato da infiniti rettangoli R_α, uno per ogni angolo α e ognuno con una estensione doppia di quella del triangolo.



Dato che il cilindro è fatto dalla stessa infinità di parti del cono e dato che ogni parte R_α ha estensione doppia della corrispondente parte T_α, ci si aspetterebbe che l'estensione del cilindro, cioè il suo volume sia il doppio di quello del cono. Risulta invece che il volume del cilindro è tre volte quello del cono. Ancora una difficoltà a estendere ragionamenti su insiemi finiti a insiemi infiniti: evidentemente, se le parti da sommare sono infinite la proprietà distributiva non si può applicare.

Da quello che Cavalieri stesso afferma, questa preoccupazione attira lungamente la sua attenzione, fino a un'improvvisa illuminazione che modifica il suo punto di vista.

Se invece di disporre le infinite fette attorno a un asse le sovrapponiamo una all'altra traslandole lungo un dato segmento PQ, la situazione è analoga: per ogni punto $A \in PQ$ abbiamo un triangolo T_A e un rettangolo R_A di area doppia, ma ora il volume del solido formato dai rettangoli è il doppio di quello formato dai triangoli dato che il volume di questi prismi si ottiene moltiplicando l'altezza PQ (che è la stessa nei due solidi) con le basi che hanno area una il doppio dell'altra.



Da questo, o da simili ragionamenti, Cavalieri arriverà a formulare il suo *Principio* (Paragrafo 5.2.3) del quale afferma di avere verificato la validità su moltissimi esempi: i solidi debbono essere costruiti con "fette parallele" e allora, se le altezze sono le stesse (cioè comporta che le fette corrispondano biunivocamente ai punti di uno stesso segmento) e se il rapporto tra le aree delle fette che si corrispondono è costante, allora anche i volumi sono nello stesso rapporto. La formula dello stesso Cavalieri si riduce alla sentenza:

Ut unum ad unum sic omnia ad omnia

6.2.4 La Tromba dell'Arcangelo

Torricelli sarebbe diventato famoso per la costruzione di un solido di rotazione infinitamente lungo detto *tromba di Gabriele*, da lui chiamato *solido iperbolico acutissimo*. Per molto tempo tale solido sarà considerato un paradosso "incredibile" per molti, incluso lo stesso Torricelli, che cercherà diverse spiegazioni alternative.



Problema Secundum. 113

Lemma V.

Cuiuscunque cylindri ghil intra solidum acutum descripti (vt in precedenti figura) superficies sine basibus æqualis est circulo cuius semidiameter sit linea df. nempe semiaxis, siue semilatus versum ipsius hyperbolæ. Hoc enim in ipso progressu præcedentis lemmatis demonstratum est.

Theorema.

SOlidum acutum hyperbolicum infinitè longum, sectum plano ad axem erecto, vnà cum cylindro suæ basis, æquale est cylindro cuidam recto, cuius basis diameter sit latus versum, siue axis hyperbolæ, altitudo verò sit æqualis semidiametro basis ipsius acuti solidi.

Esto hyperbola cuius asymptoti *ab*, *ac* angulum rectum contineant; sumptoq; in hyperbola quolibet puncto *d*, ducatur *dc* æquidistans ipsi *ab*, & *dp* æquidistans *ac*. Tũ contertatur vniuersa figura circa axẽ *ab*. ità vt fiat solidum acutum hyperbolicum *ebd*, vna cum cylindro suæ basis *fede*. Poducatur *ba* in *b*. ita vt *ab* æqualis sit integro axi, siue lateri verso hyperbolæ. Et circa diametrum *ab* intelligatur circulus erectus ad asymptoton *ac*: & super basi *ab* concipiatur cylindrus rectus *acgh*, cuius altitudo sit *ac*, nempe semidiameter basis acuti solidi. Dico solidum vniuersum *febdc*, quanquam sine fine longum, æquale tamen esse cylindro *acgh*.

Accipiatur in recta *ac* quodlibet punctum *i*, & per *i* intelligatur ducta superficies cylindrica *onli* in solido acuto com-

P 2

La tromba di Gabriele in *Opera Geometrica*

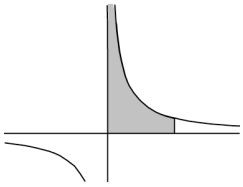
Il solido in questione scatena un'aspra controversia sulla natura dell'infinito, che coinvolge anche il filosofo Thomas Hobbes. In questa disputa alcuni sostengono che il solido conduca all'idea di un "infinito completo".

L'esempio del giovanissimo Torricelli, entusiasta del principio di Cavalieri, è così estremo che lo stesso Cavalieri ne ebbe a dubitare.

Torricelli inventa un solido, che lui chiama il *solido iperbolico*, che si ottiene ruotando una superficie di area infinita ma che, come solido, ha un volume finito e superficie "laterale" infinita.

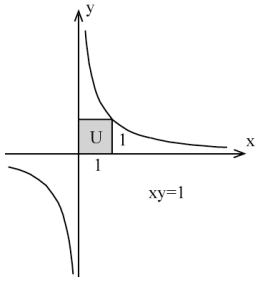
In questa costruzione emerge, con maggiore chiarezza, la difficoltà a trattare ingenuamente concetti come quello di infinito, finito, illimitato, limitato, e per la prima volta un oggetto illimitato (che nessuna sfera può racchiudere) ha l'ardire di avere un volume finito.

La superficie iniziale che viene ruotata è quella compresa tra un arco di iperbole equilatera e un suo asintoto.



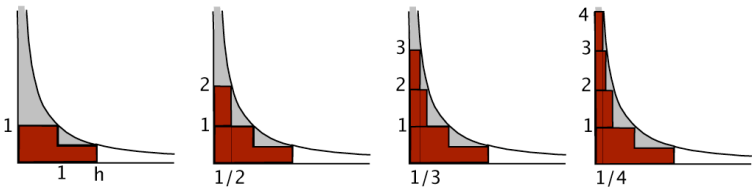
• *Torricelli prova che la superficie tratteggiata nella figura ha un'area S maggiore di un qualunque numero K e dunque è infinita.*

Scegliendo come assi di riferimento i due asintoti, le coordinate (x, y) di un punto P dell'iperbole equilatera verificano l'equazione $xy = a^2$, dove a è una costante che, per semplicità, possiamo prendere come unità di misura. Quindi ogni punto dell'iperbole ha coordinate $(x, 1/x)$.



L'unità di misura per le aree è il quadrato U di lato 1 indicato nella figura precedente e le aree saranno tutte espresse in rapporto a U.

Costruiamo ora un "grattacielo" H_n di n piani interamente contenuto in S e diamo una minorazione della sua area.



Posto $h = 2$ nella figura precedente, il primo piano ha un'area che vale $h_0 = 1 + \frac{1}{2}$.
Il secondo piano ha altezza 1 e larghezza $1/2$, e dunque area $1/2$.
Il terzo piano ha altezza 1 e larghezza $1/3$, e dunque area $1/3$.
In generale l'ennesimo piano avrà altezza 1 e larghezza $1/n$ e dunque area $1/n$. Pertanto l'area occupata dal grattacielo di n piani sarà

$$H_n = h_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Raggruppando opportunamente i termini della somma precedente (dove ovviamente $n \geq 2^{k+1}$) si ottiene che

$$H_n > \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k + 1} + \cdots + \frac{1}{2^k + 2^k}\right).$$

Per minorare tale quantità, basta osservare che

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{5} > \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{6} > \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{7} > \frac{1}{8} \cdots$$

e quindi

$$S > H_n > \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{k+1}{2}, \quad n \geq 2^{k+1}.$$

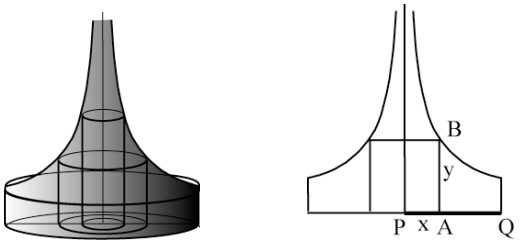
Ora, per ogni numero K, se si sceglie $k \geq 2K - 1$ e, successivamente, si sceglie $n \geq 2^{k+1}$, si ottiene

$$S > H_n > \frac{k+1}{2} \geq K$$

e dunque l'area S è infinita.

• *Il giovane Torricelli prova che il solido che si ottiene ruotando S attorno all'asintoto ha un volume calcolabile usando la teoria degli indivisibili curvi sviluppata da Cavalieri. Sorprendentemente, tale volume è finito.*

Torricelli immagina questo solido formato da infinite "fette cilindriche parallele" ognuna delle quali è la superficie laterale di un cilindro che ha come base il cerchio di raggio $PA = x$ e come altezza il segmento AB che misura $y = 1/x$.

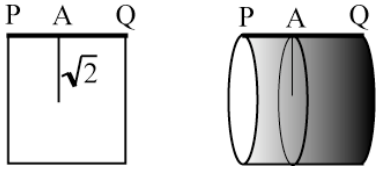


La superficie laterale del cilindro di raggio PA ha come area

$$S_A = (2\pi x)y = 2\pi$$

dunque costante, per ogni punto A del segmento PQ. Anche se tali fogli cilindrici sono uno dentro l'altro e, se il loro raggio PA decresce, la loro altezza AB cresce.

Si applica ora il "principio di Cavalieri": interpretiamo S_A come misura dell'area di un cerchio di raggio $\sqrt{2}$ e pensiamolo "applicato" nel punto A. Variando il punto A nel segmento PQ, questi fogli circolari, uguali tra loro, descrivono un cilindro di raggio $\sqrt{2}$ e altezza uguale al segmento PQ.



Dato che il solido iperbolico è formato da infiniti fogli cilindrici paralleli e dato che i fogli corrispondono a un cerchi paralleli di un cilindro di raggio $\sqrt{2}$ e altezza $PQ = h$ e dato che i fogli cilindrici e i cerchi hanno la stessa area, usando il *Principio di Cavalieri*, abbiamo che il volume del solido iperbolico è uguale a quello del cilindro:

$$V = 2\pi h.$$

Osserviamo che il diametro di tale cilindro vale $2\sqrt{2}$ che è la distanza tra i vertici dell'iperbole (asse dell'iperbole).

Questo fatto fortunato permette a Torricelli di dare un elegante enunciato del suo stupefacente risultato: *il volume di un solido iperbolico che ha come base un cerchio di raggio h e come profilo una iperbole equilatera di asse p è uguale al volume del cilindro di altezza h e diametro p.*

• Con simili ragionamenti, Torricelli prova che *la superficie laterale del solido è infinita.* Tale risultato è meno sorprendente, alla luce del fatto (dimostrato all'inizio) che l'area S che viene ruotata è infinita.

6.2.5 I calcoli odierni

Con gli strumenti dell'analisi moderna, il calcolo precedente e quello della superficie laterale del solido iperbolico (che Torricelli calcola analogamente) sono facili esercizi dei primi corsi di analisi.
Infatti, consideriamo ancora la funzione $y = \frac{1}{x}$ e il solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x (per praticità di calcolo) della curva del grafico nell'intervallo $[1, +\infty)$.
Per ogni $a \in [1, +\infty)$, il volume e l'area relativi all'intervallo $[1, a]$ sono

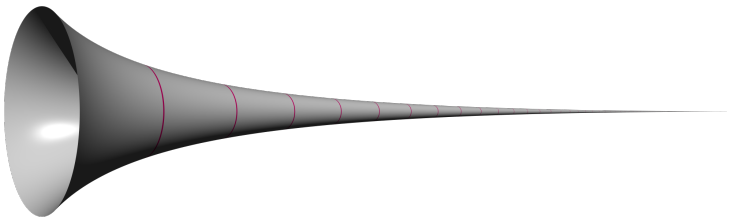
$$V_a = \pi \int_1^a \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

$$A_a = 2\pi \int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx > 2\pi \int_1^a \frac{1}{x}\, dx = 2\pi \ln(a)$$

Quindi

$$V = \lim_{a\to\infty} \pi \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \pi \quad , \quad A > \lim_{a\to\infty} 2\pi \ln(a) = +\infty.$$

(La discordanza col risultato di Torricelli riguardo al volume ($V = 2\pi$ nel caso $h = 2$) è dovuto al cilindro di raggio $PQ = 1$ e di altezza 1: tale volume è infatti π e va sottratto dal risultato di Torricelli.)



6.3 Desargues



Girard Desargues (1591-1661)

6.3.1 Biografia e opere

Si sa poco della biografia di **Girard Desargues**. Nato a Lione nel **1591**, dapprima ingegnere militare, conosce nel 1626 Descartes, con cui partecipa all'assedio di La Rochelle e di cui poi sarà sempre amico.

Vive a Parigi fin verso il 1650 facendo parte del circolo di padre **Mersenne** e ha come amici **Étienne** e **Blaise Pascal**. Ma le sue idee riguardo alla geometria sono poco ortodosse. Non si sente capito e torna quindi a Lione, dove esercita l'architettura.

Probabilmente è condotto a perfezionare i metodi della geometria dalle applicazioni nell'architettura militare e civile; infatti, quasi due secoli dopo, le idee di Desargues saranno sviluppate da tre studiosi di materie militari: Carnot, Poncelet, Brianchon.

Il suo punto di partenza sono gli autori d'arte militare e di prospettiva italiani del secolo precedente. Appare però dai suoi scritti che studia a fondo anche Euclide, Apollonio, Tolomeo e Pappo.

• Propone un nuovo tipo di matematica in uno sfortunato capolavoro che è la sua opera principale, un saggio sulle coniche: *Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan* (**1639**), traducibile come *Bozza di un saggio su quello che si ottiene sezionando un cono con un piano*.

◦ Il suo stile è nuovo e usa una originale terminologia botanica (forse un'idea ricavata dagli artisti rinascimentali); è influenzato anche da Kepler riguardo al "principio di continuità". Ad esempio, muovendo una circonferenza nello spazio con continuità si vede una serie di ellissi.

◦ Intuisce che la proiezione di una conica è ancora una conica e che alcune proprietà si mantengono per proiezione.

◦ Inventa l'involuzione su una retta (rapporto armonico).

◦ Inventa le proprietà polari relative a una conica.

◦ La trattazione è elegante e nuova, arrivando all'introduzione dei "punti all'infinito". Sostanzialmente è un'introduzione a una teoria delle coniche unificata attraverso le proprietà invarianti per proiezione. In questo ambito, molti teoremi hanno una formulazione unitaria e sintetica.

◦ L'opera di Desargues non è accolta dai contemporanei: solo Fermat l'apprezza. Perfino il suo amico Descartes rimane costernato: Desargues aveva trattato le coniche senza usare l'algebra!

◦ Il testo viene stampato in soli 50 esemplari ma a fine secolo non ne circola più neanche uno. Risultano quindi tutti perduti eccetto una copia manoscritta da **Philippe de La Hire** e riscoperta da **Michel Chasles** (1793-1880) a Parigi nel 1847.

◦ Desargues è noto per un teorema che non ha mai pubblicato personalmente e che sarà uno dei fondamenti della geometria del XIX secolo: solo allora il valore di Desargues come iniziatore della geometria proiettiva sarà unanimemente riconosciuto.

◦ Il teorema viene pubblicato ufficialmente per la prima volta nel **1648** dall'incisore Abraham Bosse, nella sua opera *Manière universelle de M. Desargues pour practiquer la perspective*.

◦ Dopo aver vissuto a lungo a Parigi e aver affrontato accese polemiche scientifiche, Desargues si allontana dal dibattito matematico attivo intorno al 1645 per dedicarsi prevalentemente all'architettura e all'ingegneria.

Negli ultimi anni si ritira nella sua casa di campagna a Condrieu, vicino a Lione, dove ama occuparsi personalmente del giardino.

Muore a Lione nell'ottobre 1661, all'età di 70 anni.

6.3.2 Teorema di Desargues

Prima dell'enunciato occorrono alcune nozioni preliminari.

Definizioni

• Due triangoli sono *in prospettiva rispetto a un punto* se le rette che uniscono i vertici corrispondenti sono concorrenti nel punto.

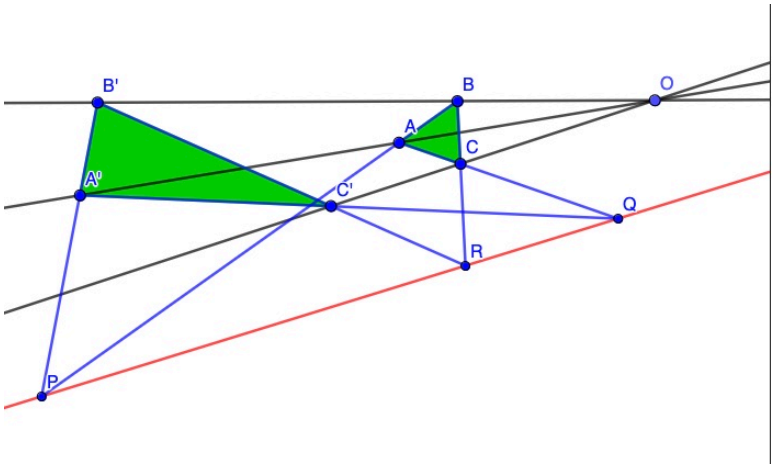
In altri termini, se i triangoli hanno vertici A, B, C e A', B', C', rispettivamente, tali triangoli sono *in prospettiva rispetto a un punto* O se le rette $r_{AA'}, r_{BB'}, r_{CC'}$ si intersecano in O.

• Si dice che due triangoli sono *in prospettiva rispetto a una retta* se le coppie di rette contenenti lati corrispondenti si tagliano in 3 punti allineati.

In altri termini, se i triangoli hanno vertici A, B, C e A', B', C', rispettivamente, tali triangoli sono *in prospettiva rispetto a una retta* s se i punti $r_{AB} \cap r_{A'B'}, r_{AC} \cap r_{A'C'}, r_{BC} \cap r_{B'C'}$ appartengono a s.

Teorema di Desargues (1639)

Se due triangoli (non aventi alcun vertice in comune) sono in prospettiva rispetto a un punto, allora sono in prospettiva anche rispetto a una retta.



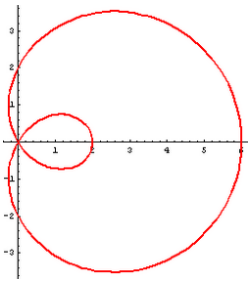
6.4 Pascal



Blaise Pascal (1623-1662)

6.4.1 Biografia e opere

E' figlio d'arte: suo padre Etienne è anche lui un matematico, noto per la "chiocciola di Pascal": $r = a + b\cos\theta$.

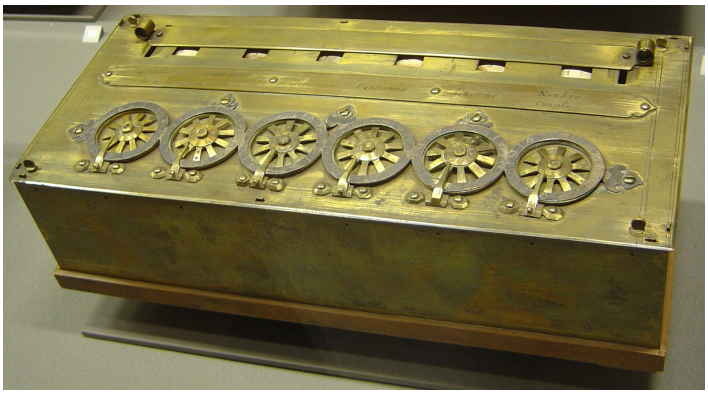


Blaise è un *enfant prodige*. Il padre lo vuole lontano dai libri per motivi di salute, ma poi si arrende all'evidenza e lo lascia studiare. Ecco in sintesi le straordinarie tappe del suo percorso intellettuale.

◦ 14 anni: partecipa col padre all'Accademia di Mersenne a Parigi e viene a contatto con le idee di **Desargues**.

• 16 anni: pubblica *Essay sur les coniques* (1640). E' una sola pagina, contenente il "Teorema di Pascal" (prossimo Paragrafo 6.4.2): è un *mysterium exagrammaticum*! Pascal afferma che ha molti corollari, ad esempio la determinazione delle tangenti a una conica. Utilizza il linguaggio di Desargues: sostanzialmente la formulazione è nel piano proiettivo (altrimenti l'enunciato sarebbe falso). Pascal stesso riconosce di dovere molto a Desargues.

◦ 18 anni: progetta e realizza una macchina calcolatrice (in futuro nota come la *Pascalina*), ottenendo un grande successo commerciale.



La *Pascalina*, 1642

◦ 25 anni: si interessa all'idrostatica: sono celebri i suoi esperimenti sulla pesantezza dell'aria e sulla pressione dei fluidi.

◦ 31 anni (**1654**)

◇ Progetta una grande opera sulle coniche, mai stampata e andata perduta. Ma Leibniz riesce a vederla e cita alcuni risultati. Usa sempre metodi sintetici: si sente a disagio con l'algebra.

◇ Intraprende con Pierre de Fermat uno scambio epistolare in cui discutono il cosiddetto "problema della divisione". L'opera di Pascal in merito a questo problema segna l'inizio della **teoria della probabilità** e, nel celebre argomento della scommessa contenuto nelle *Pensées*, della **teoria delle decisioni**.

Supponiamo che due giocatori abbiano scommesso una posta da dare in premio al vincitore di una partita di un qualsiasi gioco d'azzardo, per esempio dieci giri del gioco dei dadi; qualora i giocatori non riescano a portare a termine la partita, il problema è stabilire un'equa divisione della posta in gioco.

Pascal parte dal considerare alcuni esempi nei quali il punteggio e il numero delle mani nella partita rendono facile giungere a una divisione equa. Passa poi ad analizzare casi sempre più difficili, facendo ricorso a quelli più ovvi [2].

• Collega questi problemi al "Triangolo aritmetico"; studia le sue proprietà in modo così nuovo e profondo che d'ora in poi sarà noto come "Triangolo di Pascal" (prossimo Paragrafo 6.4.3). Stampa nel **1654** i risultati in un trattato, che assieme ad altri, confluirà nel volume *Traité du triangle arithmétique*.

La nota editoriale posta all'inizio del volume, pubblicato tre anni dopo la morte di Pascal, cioè nel **1665**, informa che i trattati che compongono questa raccolta sono stati "tutti trovati stampati tra i documenti di Monsieur Pascal, il che dimostra che intendeva pubblicarli. Ma, avendo, poco dopo, abbandonato completamente questo tipo di studi, trascurò di pubblicare tali opere". Solo la pagina del titolo generale, la nota editoriale e la tavola contenente la figura del triangolo aritmetico sono stampati *ex novo* nel 1665: il resto è costituito dall'assemblaggio di stampe realizzate nel 1654 ma che la "seconda conversione" di Pascal nel novembre di quell'anno gli impedisce di pubblicare.

Questa opera fondamentale è composta dall'insieme di **undici trattati diversi**, i primi cinque dei quali sono in francese, i successivi sei in latino. Pascal fornisce un resoconto generale e sistematico delle sue scoperte nel calcolo delle probabilità. Il centro del suo argomento è occupato dalla figura del "triangolo aritmetico", una tabella che dispone in righe e colonne numeri che corrispondono a regole di progressione date, costituendo ciò che Pascal chiama "ordini numerici" e corrispondenti ai vecchi "numeri figurativi".

Questa disposizione di per sé non è rivoluzionaria ed era nota ai cinesi, a Cardano, a Tartaglia e a diversi matematici del XVI secolo; ma la

[2] Liberamente tratto da: *La Rivoluzione scientifica: i protagonisti. Blaise Pascal* di Daniel Fouke (2002) (sul sito www.treccani.it).

novità di Pascal è fornire una teoria attraverso la quale espone i principi del ragionamento per ricorrenza.

Il *Traité du triangle arithmétique* riveste un'importanza particolare per la sua accurata analisi delle proprietà dei coefficienti binomiali. Utilizzando il triangolo per risolvere il problema delle divisioni discusso con Fermat, Pascal fornisce una rigorosa spiegazione del principio dell'induzione.

• Tra gli undici trattati che costituiscono il *Traité du triangle arithmétique*, nel *Potestatum numericarum summa* Pascal si cimenta in Teoria dei numeri calcolando la formula per determinare la somma delle m-esime potenze dei primi n numeri naturali (prossimo Paragrafo 6.4.4). Come tecnica, usa lo sviluppo del binomio di Newton (che lui ricava tramite le proprietà del triangolo) per costruire una somma telescopica in grado di determinare ricorsivamente le somme delle potenze successive.

◦ Nel novembre del 1654 ha una esperienza mistica e decide di abbandonare la matematica, dedicandosi alla teologia.

◦ 35 anni (**1658**)

◦ Per distrarsi da un forte mal di denti notturno, riprende in mano la matematica e si concentra sulla cicloide. Miracolosamente il dolore cessa e Pascal riprende lo studio della matematica.

• Dopo aver trovato certe aree volumi e centri di gravità associati alla cicloide, Pascal propone una mezza dozzina di questioni del genere ai matematici del suo tempo, offrendo premi per la loro soluzione e nominando Roberval come uno dei giudici. Per la scarsa pubblicità della cosa, vengono presentati soltanto due gruppi di soluzioni che contengono comunque alcuni errori di calcolo. Perciò Pascal non assegna alcun premio ma pubblica le proprie soluzioni assieme ad altri risultati preceduti tutti da una *Histoire de la roulette* in una serie di *Lettres de A. Dettonville* nel 1658[3].

Le questioni della contesa matematica e *Lettres de A. Dettonville* mettono la cicloide al centro dell'interesse generale ma sollevano anche un vespaio di polemiche. I due finalisti Antoine de Lalouvière e John Wallis, entrambi esperti matematici, rimangono scontenti per il fatto che i premi sono stati ritirati e i matematici italiani si indignano perché la *Storia della cicloide* di Pascal non dà virtualmente nessun credito a Torricelli e riconosce la priorità della scoperta soltanto a Roberval.

[3]Il nome Amos Dettonville era un anagramma di Louis de Montalte, lo pseudonimo usato nelle *Lettres provinciales* scritte da Pascal due anni prima.

• Nel 1658, all'interno delle *Lettres de A. Dettonville*, Pascal pubblica il *Traité des sinus du quart de cercle*. Lo stesso Leibniz racconterà che, leggendolo, ha una folgorazione e intuisce che la tangente a un curva dipende dal rapporto tra le differenze della ordinate e le differenze delle ascisse, quando queste diventano infinitamente piccole, e che le quadrature dipendono dalla somma delle ordinate, ossia dei rettangoli infinitamente piccoli che formavano l'area (maggiori dettagli nel prossimo capitolo).

Siamo a un passo dall'analisi infinitesimale.

◦ Nel 1662 muore, come Torricelli, a 39 anni.

6.4.2 Teorema di Pascal

Tra i numerosi risultati di Pascal in matematica, uno dei più famosi è forse questo teorema che generalizza un antico risultato di Pappo (vedi Paragrafo 1.5.6) e quindi è anche chiamato *Teorema di Pappo-Pascal*. Nel Teorema di Pappo la conica in questione è degenere e viene enunciata solo una implicazione.

Teorema di Pascal

Siano $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sei punti distinti del piano e siano B_1, B_2, B_3 i punti comuni alle coppie di rette contenenti i lati opposti dell'esagono:

$$B_1 = r(A_1, A_2) \cap r(A_4, A_5)$$

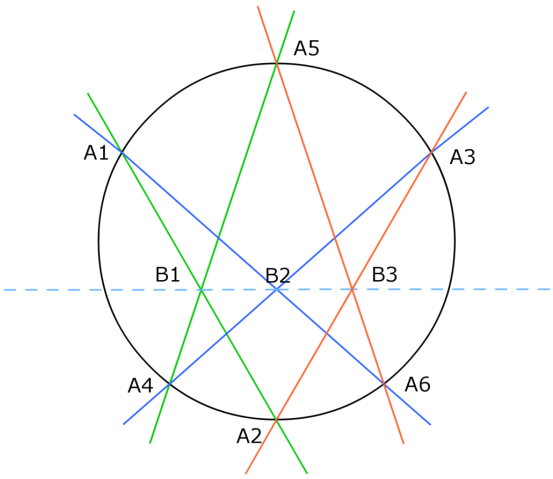
$$B_2 = r(A_3, A_4) \cap r(A_6, A_1)$$

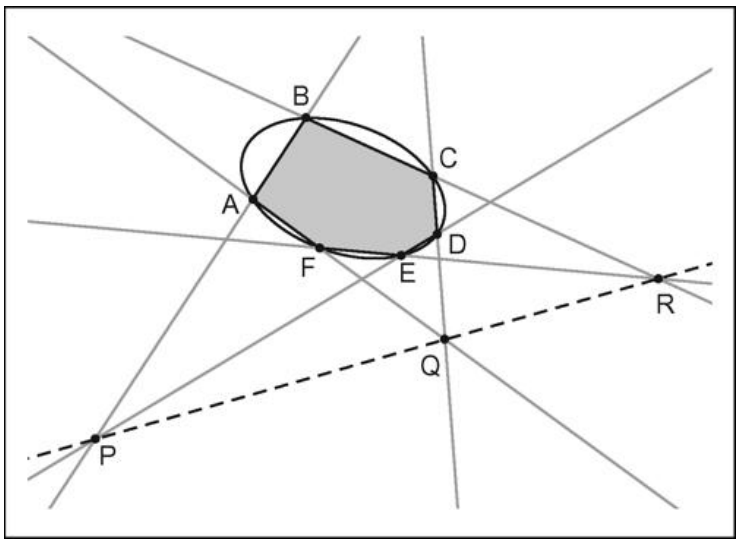
$$B_3 = r(A_2, A_3) \cap r(A_5, A_6).$$

I sei punti iniziali appartengono a una conica se, e soltanto se, i tre punti B_1, B_2, B_3 appartengono a una retta.

Fissata una conica iniziale, a seconda dell'**ordinamento** dei 6 punti sulla conica, è possibile inscrivere nella conica ben 60 figure di sei lati (anche tra loro intrecciati) aventi per vertici tali punti e applicare il teorema anche a tali configurazioni, ottenendo 60 *rette di Pascal*.

Le successive figure mostrano due esempi, il primo dei quali considera consecutivi i punti $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ mentre nel secondo sono consecutivi i punti A, B, C, D, E, F.





Il numero 60 delle possibili configurazioni deriva dal calcolo combinatorio applicato ai modi in cui è possibile ordinare e collegare 6 punti su una conica per individuare un esagono:

- (Permutazioni totali di 6 punti) Il numero di modi in cui si possono disporre 6 punti distinti $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ in una sequenza è dato dal fattoriale $6! = 720$.

- (Equivalenza per rotazione o ciclicità) Nell'esagono inscritto, l'ordine dei vertici è ciclico. Ad esempio, la sequenza $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ e la

sequenza ruotata $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_1$ danno luogo allo stesso esagono. Poiché ci sono 6 posizioni possibili per lo stesso ciclo, occorre dividere per sei: $720 : 6 = 120$.

- (Equivalenza per inversione) Percorrere i vertici in un senso oppure nel senso opposto, ad esempio

$$(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) \; e \; (A_6, A_5, A_4, A_3, A_2, A_1),$$

genera lo stesso esagono. Questo dimezza ulteriormente le configurazioni: $120 : 2 = 60$.

Nel complesso, l'insieme di queste 60 rette (e dei corrispondenti 60 punti di intersezione speciali) dà origine a una splendida struttura geometrica nota storicamente come *Hexagrammum mysticum*, cioè *Esagramma Mistico*, nome datole dallo stesso Blaise Pascal e usato anche da Leibniz.

6.4.3 Triangolo di Pascal

Nonostante la vastità dei suoi interessi, Pascal è noto soprattutto per il triangolo aritmetico, presentato nel suo *Trattato sul Triangolo Aritmetico* del 1654.

Le prime righe del triangolo (infinito) sono le seguenti:

$n = 0$							1							
$n = 1$						1		1						
$n = 2$					1		2		1					
$n = 3$				1		3		3		1				
$n = 4$			1		4		6		4		1			
$n = 5$		1		5		10		10		5		1		
$n = 6$	1		6		15		20		15		6		1	
$n = 7$		7		21		35		35		21		7		1

Ogni numero che non si trova sui lati del triangolo è ottenuto sommando i due numeri adiacenti che si trovano sulla riga superiore.

I numeri del triangolo di Pascal corrispondono ai coefficienti ottenuti nello sviluppo della potenza di un binomio. Ad esempio nella seconda e la terza riga troviamo i coefficienti dei seguenti sviluppi:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

I coefficienti negli sviluppi binomiali sono chiamati infatti *coefficienti binomiali*. Il coefficiente del monomio $a^k b^{n-k}$ nello sviluppo di $(a+b)^n$ viene indicato con il *simbolo binomiale*

$$\binom{n}{k}.$$

6.4.4 Identità di Pascal

Il problema consiste nel calcolare il valore di una somma di potenze, con esponente fissato, di interi consecutivi.

In simboli, si vuole calcolare la seguente somma di potenze:

$$S_r(n) = \sum_{k=1}^{n} k^r = 1^r + 2^r + \cdots + n^r$$

dove $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Usualmente si pone $S_r(0) = 0$.

Le prime formule erano conosciute fin dall'antichità ai grecie e agli arabi:

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

e possono oggi essere dimostrate facilmente mediante il metodo di induzione matematica.

I pitagorici dimostrarono la prima formula, quella per $S_1(n)$, con metodi geometrici: i numeri naturali consecutivi possono essere disposti per formare un triangolo, e avvicinando due triangoli si forma un rettangolo. Nicomaco di Gerasa (60-120 d.C.) dimostrò la formula per $r = 3$.

Pascal, usando il *Triangolo aritmetico*, dimostra il seguente teorema che permette, (mediante ricorsività) di calcolare $S_r(n)$ nel caso generale.

Identità di Pascal

$$(n+1)^{r+1} - 1 = \sum_{k=0}^{r} \binom{r+1}{k} S_k(n).$$

In forma estesa la formula è

$$(n+1)^{r+1} - 1 = \binom{r+1}{0} S_0(n) + \binom{r+1}{1} S_1(n) + \cdots + \binom{r+1}{r} S_r(n)$$

dunque si ricava $S_r(n)$ dopo aver calcolato $S_0(n), S_1(n), \ldots, S_{r-1}(n)$.

6.5 Inizio di transizione

A metà del Seicento si spengono Cavalieri (1647), Torricelli (1647) e Descartes (1650). Nei primi anni Sessanta del XVII secolo muoiono gli altri tre matematici che hanno segnato questa fase centrale del secolo: Desargues (1661), Pascal (1662) e Fermat (1665).

Si apre un "periodo di transizione" che ha per scenario molteplici paesi europei e per protagonisti figure intermedie, in attesa dei due giganti che, con la loro opera, chiuderanno fastosamente il Seicento.

Questo tempo è l'oggetto del prossimo capitolo.