IL MODELLO DI WHITTAKER-HENDERSON

Siano

$$\hat{q}_x, \qquad x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

le stime delle probabilità di morte q_x, $x = a, a+1, \dots, \omega - 1$, di un modello di sopravvivenza non parametrico ottenute secondo un approccio di stima di tipo non parametrico.

Tali stime presentano usualmente delle irregolarità spesso imputabili alla limitata numerosità della popolazione, in particolare in alcune classi di età.

Tali irregolarità possono essere rimosse mediante opportune procedure di perequazione.

Due obiettivi sono alla base della scelta di una procedura di perequazione:

- l'<u>accostamento</u> (o goodness of fit) delle stime perequate alle stime originali.
- la <u>regolarità</u> (o smoothness) delle stime perequate al variare dell'età;

Il modello di Whittaker-Henderson prevede una esplicita considerazione formale degli obiettivi di accostamento e di regolarità.

Si considera infatti una funzione obiettivo che combina linearmente un termine che misura l'accostamento ed uno che misura la regolarità.

<u>Osservazione</u>: per misurare il grado di regolarità di una funzione perequante si considerano vari ordini di differenze. Infatti,

se $f(x)$ è un polinomio di grado n allora

la funzione $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ è un polinomio di grado $n-1$

la funzione $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x)$ è un polinomio di grado $n-2$

la funzione $\Delta^3 f(x) = \Delta^2 f(x+1) - \Delta^2 f(x)$ è un polinomio di grado $n-3$

…

la funzione $\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+1) - \Delta^{n-1} f(x)$ è costante

la funzione $\Delta^{n+1} f(x)$ è nulla

Sia

u_x la sequenza da perequare, $x = a, a+1, \dots, b$

per es. $u_x = \hat{q}_x$, $x = a, a+1, \dots, b$

indichiamo con

v_x la sequenza perequata, $x = a, a+1, \dots, b$

Si considera la seguente funzione obiettivo

$$M = F + hS = \sum_{x=a}^{b} w_x (u_x - v_x)^2 + h \sum_{x=a}^{b-z} (\Delta^z v_x)^2$$

dove F misura l'accostamento; S misura la regolarità; h è un parametro

w_x sono pesi associati alle osservazioni (per es. $w_x = E_x / q'_x$, con q'_x tratto da una tavola standard con caratteristiche analoghe alla collettività osservata)

$$\Delta^z v_x = \sum_{h=0}^{z} \binom{z}{h} (-1)^h \, v_{x+z-h}$$

<u>Osservazione</u>:

z è l'ordine delle differenze dei valori perequati che misura la regolarità

per es. se $z = 4$ ed i valori perequanti v_x stanno su una cubica, allora $S = 0$

Si determinano i valori perequati v_x $x = a, a+1, \dots, b$

che rendono minima la funzione M .

Se $h = 0$

$$M = F = \sum_{x=a}^{b} w_x (u_x - v_x)^2$$

ed F è minima per $v_x = u_x$ per ogni $x = a, a+1, \dots, b$

Se $h \to +\infty$ allora $M \to +\infty$ a meno che non sia $S = 0$, quindi se

$$v_x = c_0 x^{z-1} + c_1 x^{z-2} + \dots + c_{z-1}$$ infatti è $\Delta^z v_x = 0$

La soluzione è il polinomio di grado minore o uguale a $z-1$ che rende minima la F

Si può scrivere la funzione M in forma matriciale

$$M = F + hS = \sum_{x=a}^{b} w_x (u_x - v_x)^2 + h \sum_{x=a}^{b-z} (\Delta^z v_x)^2$$

Infatti $$F = \sum_{x=a}^{b} w_x (u_x - v_x)^2 = (\underline{u} - \underline{v})^T W (\underline{u} - \underline{v})$$

è una forma quadratica definita positiva con

$$\underline{u}^T = (u_a, \ldots, u_b) \qquad \underline{v}^T = (v_a, \ldots, v_b) \qquad W = diag[w_x]$$

ed è allora $$\frac{\partial F}{\partial \underline{v}} = -2W(\underline{u} - \underline{v})$$

Inoltre $$S = \sum_{x=a}^{b-z} (\Delta^z v_x)^2 = (\underline{\Delta^z v})^T \underline{\Delta^z v}$$

con $$(\underline{\Delta^z v})^T = \left(\sum_{h=0}^{z} \binom{z}{h} (-1)^h v_{a+z-h}, \ldots, \sum_{h=0}^{z} \binom{z}{h} (-1)^h v_{b-z+z-h} \right)$$

Si prova che

$$(\underline{\Delta^z v})^T = \left(\sum_{h=0}^{z} \binom{z}{h} (-1)^h \, v_{a+z-h}, \ldots, \sum_{h=0}^{z} \binom{z}{h} (-1)^h \, v_{b-z+z-h} \right) = \Delta_z \, \underline{v}$$

con

$$\Delta_z = \begin{bmatrix} \binom{z}{z}(-1)^z & \binom{z}{z-1}(-1)^{z-1} & \cdots & \binom{z}{0}(-1)^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \binom{z}{z}(-1)^z & \cdots & \binom{z}{1}(-1)^1 & \binom{z}{0}(-1)^0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{z}{z}(-1)^z & \cdots & \binom{z}{1}(-1)^1 & \binom{z}{0}(-1)^0 \end{bmatrix}$$

Si ha allora

$$S = \sum_{x=a}^{b-z} (\Delta^z v_x)^2 = \underline{v}^T \left((\Delta_z)^T \Delta_z \right) \underline{v}$$

Quindi la funzione M può essere scritta in forma matriciale

$$M = F + hS = (\underline{u} - \underline{v})^T W(\underline{u} - \underline{v}) + h\ \underline{v}^T \left((\Delta_z)^T \Delta_z\right)\underline{v}$$

ed è allora

$$\frac{\partial M}{\partial \underline{v}} = -2W(\underline{u} - \underline{v}) + h\,2\left((\Delta_z)^T \Delta_z\right)\underline{v}$$

Quindi si ha

$$\frac{\partial M}{\partial \underline{v}} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[W + h\left((\Delta_z)^T \Delta_z\right)\right]\underline{v} = W\underline{u}$$

Si ha allora

$$\underline{v} = \left[W + h\left((\Delta_z)^T \Delta_z\right)\right]^{-1} W\underline{u}$$

Si prova che la soluzione così trovata rende minima la funzione M