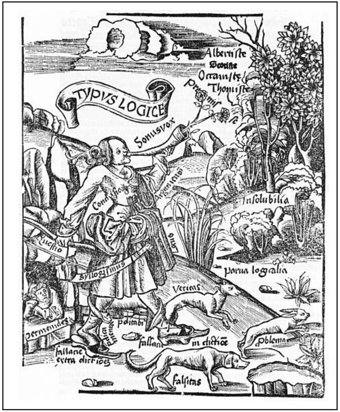
Clausole di Horn e linguaggi clausolari

Eugenio G. Omodeo DMG, 11&17/05/2016

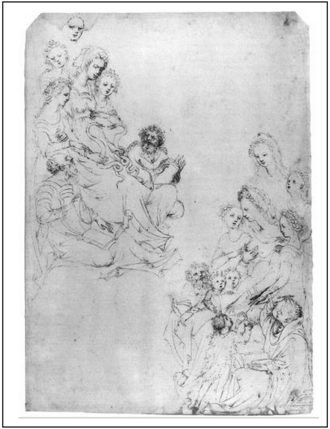


(Typus Logicae, Gregor Reisch)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Clausole di Horn e linguaggi clausolari

Eugenio G. Omodeo DMG, 11&17/05/2016

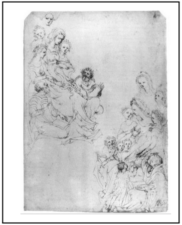


(Dialettica e grammatica, Stefano Da Zevio)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

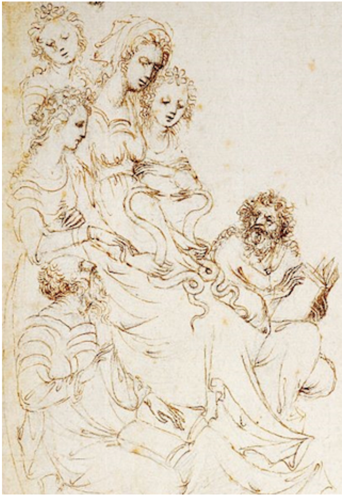
Scaletta

- Richiami, breve premessa storica
- Clausole di Horn, proposizionali e predicative
- La soddisfacibilità è garantita?
- Modello minimo per una base di clausole predicative
- Domande e risposte



(Dialettica e grammatica, Stefano Da Zevio)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE



Richiami, breve premessa storica

FORMA NORMALE $\boxed{\text{DIS}}$GIUNTIVA Si dice che un enunciato è in questa forma (in breve ***dnf***) se esso è della forma $D_0 \vee D_1 \vee \cdots \vee D_n$, dove $n \geqslant 0$ e ciascun D_i è **f** oppure è una congiunzione $L_{i,0} \,\&\, \cdots \,\&\, L_{i,m_i}$ di letterali $L_{i,j}$, con $m_i \geqslant 0$, dove

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

FORMA NORMALE $\boxed{\text{DIS}}$GIUNTIVA Si dice che un enunciato è in questa forma (in breve ***dnf***) se esso è della forma $D_0 \vee D_1 \vee \cdots \vee D_n$, dove $n \geqslant 0$ e ciascun D_i è **f** oppure è una congiunzione $L_{i,0} \,\&\, \cdots \,\&\, L_{i,m_i}$ di letterali $L_{i,j}$, con $m_i \geqslant 0$, dove

PER ***letterale*** s'intende una *lettera proposizionale* o la *negaz. di una lettera proposizionale*.

FORMA NORMALE $\boxed{\text{DIS}}$GIUNTIVA Si dice che un enunciato è in questa forma (in breve ***dnf***) se esso è della forma $D_0 \vee D_1 \vee \cdots \vee D_n$, dove $n \geqslant 0$ e ciascun D_i è **f** oppure è una congiunzione $L_{i,0} \,\&\, \cdots \,\&\, L_{i,m_i}$ di letterali $L_{i,j}$, con $m_i \geqslant 0$, dove

PER ***letterale*** s'intende una *lettera proposizionale* o la *negaz. di una lettera proposizionale*.

FORMA NORMALE $\boxed{\text{CON}}$GIUNTIVA Si dice che un enunciato è in questa forma (in breve ***cnf***) se esso è della forma $C_0 \,\&\, C_1 \,\&\, \cdots \,\&\, C_n$, dove $n \geqslant 0$ e ciascun C_i è **v** oppure è una disgiunzione $L_{i,0} \vee \cdots \vee L_{i,m_i}$ di letterali $L_{i,j}$, con $m_i \geqslant 0$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

1. Un enunciato in dnf è $\boxed{\text{assurdo}}$ se e solo se ciascuno dei suoi disgiunti D_i:

1. Un enunciato in dnf è $\boxed{\text{assurdo}}$ se e solo se ciascuno dei suoi disgiunti D_i: o è **f**,
   oppure contiene, simultaneamente,
   una lettera L_{i,j_1} e la sua negazione, $L_{i,j_0} = \neg L_{i,j_1}$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

1. Un enunciato in dnf è $\boxed{\text{assurdo}}$ se e solo se ciascuno dei suoi disgiunti D_i: o è **f**, oppure contiene, simultaneamente, una lettera L_{i,j_1} e la sua negazione, $L_{i,j_0} = \neg\, L_{i,j_1}$

2. Un enunciato in cnf è $\boxed{\text{tautologico}}$ se e solo se ciascuno dei suoi congiunti C_i): o è **v**, oppure contiene, simultaneamente, una lettera L_{i,j_1} e la sua negazione, $L_{i,j_0} = \neg\, L_{i,j_1}$

1. Un enunciato in dnf è $\boxed{\text{assurdo}}$ se e solo se ciascuno dei suoi disgiunti D_i: o è **f**, oppure contiene, simultaneamente, una lettera L_{i,j_1} e la sua negazione, $L_{i,j_0} = \neg L_{i,j_1}$
2. Un enunciato in cnf è $\boxed{\text{tautologico}}$ se e solo se ciascuno dei suoi congiunti C_i): o è **v**, oppure contiene, simultaneamente, una lettera L_{i,j_1} e la sua negazione, $L_{i,j_0} = \neg L_{i,j_1}$

> Parrebbe dunque conveniente utilizzare la dnf nel ragionamento per assurdo e la cnf per dimostrare 'in positivo'. (Ma è cosí?)

Dag Prawitz, riducendo il problema della dimostrazione in *logica predicativa del* 1º *ordine* a verifiche di assurdità di dnf, si scontrò con difficoltà insormontabili nella ricerca automatica di dimostrazioni peraltro modeste.

Dag Prawitz, riducendo il problema della dimostrazione in *logica predicativa del* 1° *ordine* a verifiche di assurdità di dnf, si scontrò con difficoltà insormontabili nella ricerca automatica di dimostrazioni peraltro modeste.

Ottennero successo molto maggiore Martin Davis e Hilary Putnam riportandosi a verifiche di assurdità di cnf .

Svolta dei primi anni '60: da dnf a cnf

Dag Prawitz, riducendo il problema della dimostrazione in *logica predicativa del* 1° *ordine* a verifiche di assurdità di dnf, si scontrò con difficoltà insormontabili nella ricerca automatica di dimostrazioni peraltro modeste.

Ottennero successo molto maggiore Martin Davis e Hilary Putnam riportandosi a verifiche di assurdità di cnf .

D&P contribuirono alla scoperta di due algoritmi fondamentali della logica computazionale:

- test di soddisfacibilità per cnf,
- unificazione sintattica per il calcolo predicativo del 1.o ordine

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dag Prawitz, riducendo il problema della dimostrazione in *logica predicativa del* 1° *ordine* a verifiche di assurdità di dnf, si scontrò con difficoltà insormontabili nella ricerca automatica di dimostrazioni peraltro modeste.

Ottennero successo molto maggiore Martin Davis e Hilary Putnam riportandosi a verifiche di assurdità di cnf .

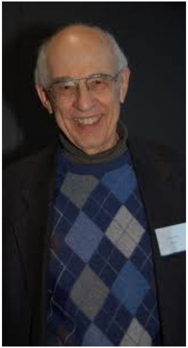
D&P contribuirono alla scoperta di due algoritmi fondamentali della logica computazionale:

- test di soddisfacibilità per cnf,
- unificazione sintattica per il calcolo predicativo del 1.o ordine

> il secondo in realtà già scoperto da Jacques Herbrand nel 1930, anche se popolarmente attribuito a J. Alan Robinson, 1965

(1936 –)

(1928 –)



(1926 – 2016)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

In *logica predicativa*, rappresentiamo una cnf come *insieme* (finito)

$$\mathcal{B} \;=\; \Big\{ K_0 \,, K_1 \,, \ldots, K_m \Big\} \,,$$

di disgiunzioni K_i (di formule atomiche asserite o negate).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

In *logica predicativa*, rappresentiamo una cnf come *insieme* (finito)

$$\mathcal{B} \;=\; \Big\{ K_0\,, K_1\,, \ldots, K_m \Big\}\,,$$

di disgiunzioni K_i (di formule atomiche asserite o negate).

Sostituendo lettere proposizionali alle formule atomiche, in base a una biiezione, otteniamo di qui le disgiunzioni *proposizionali*

$$K_0^*\,, K_1^*\,, \ldots, K_m^*\,.$$

In *logica predicativa*, rappresentiamo una cnf come *insieme* (finito)

$$\mathcal{B} \;=\; \Big\{ K_0\,, K_1\,, \ldots, K_m \Big\}\,,$$

di disgiunzioni K_i (di formule atomiche asserite o negate).

Sostituendo lettere proposizionali alle formule atomiche, in base a una biiezione, otteniamo di qui le disgiunzioni *proposizionali*

$$K_0^*\,, K_1^*\,, \ldots, K_m^*\,.$$

> Diremo che la cnf di partenza è ***manifestam. contraddittoria*** sse
>
> $$K_0^* \;\&\; K_1^* \;\&\; \cdots \;\&\; K_m^*$$
>
> è assurda ai sensi della *logica proposizionale*.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

A una cnf predicativa

$$\{ C_0 , \ldots , C_h \}$$

in cui $\boxed{\textit{non}\text{ figuri } =}$ possiamo sempre associare, in modo naturale, un universo di Herbrand.[1]

[1] Se non vi figurano costanti, introdurne una d’ufficio !

A una cnf predicativa

$$\Big\{\, C_0\,, \ldots, C_h \Big\}$$

in cui $\boxed{\textit{non}\ \text{figuri}\ =}$ possiamo sempre associare, in modo naturale, un universo di Herbrand.

Condizione necessaria e sufficiente affinché[1]

$$\Big(\, C_1 \,\&\, \cdots \,\&\, C_h \Big)^{\forall} \;\models\; \Big(\neg\, C_0\Big)^{\exists}$$

è che esista una cnf

$$\mathcal{B} = \Big\{\, K_0\,, K_1\,, \ldots, K_m \Big\}$$

manifestamente contraddittoria e costituita di *istanze* (v. sotto) delle clausole $C_0\,, \ldots,\, C_h$.

[1]Indichiamo con $\varphi^{\forall}$ l’enunciato che risulta da φ quando le sue varr. libere vengano universalm. quantificate. Analoga la def. di $\psi^{\exists}$.

Scelta di un caso favorevole, ma tipico

A tutt'oggi risolvere il famigerato problema CNF-SAT comporta, nel caso peggiore, un costo algoritmico esponenziale — non sappiamo se esso ammetta metodi risolutivi di costo polinomiale. . .

---

[2]  (Alfred Horn, 1918–2001)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

A tutt'oggi risolvere il famigerato problema CNF-SAT comporta, nel caso peggiore, un costo algoritmico esponenziale — non sappiamo se esso ammetta metodi risolutivi di costo polinomiale. . .

Da un lavoro di Alfred Horn[2] del 1951 emerse la rilevanza pratica di concentrarsi, nello studio delle cnf, su disgiunzioni di un ristretto tipo. . .

Scaturirono da tale restrizione:

---

[2]  (Alfred Horn, 1918–2001)

A tutt'oggi risolvere il famigerato problema CNF-SAT comporta, nel caso peggiore, un costo algoritmico esponenziale — non sappiamo se esso ammetta metodi risolutivi di costo polinomiale...

Da un lavoro di Alfred Horn[2] del 1951 emerse la rilevanza pratica di concentrarsi, nello studio delle cnf, su disgiunzioni di un ristretto tipo...

Scaturirono da tale restrizione:

Prolog: Un linguaggio di programmazione (Turing-completo)

---

[2]  (Alfred Horn, 1918–2001)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

A tutt'oggi risolvere il famigerato problema CNF-SAT comporta, nel caso peggiore, un costo algoritmico esponenziale — non sappiamo se esso ammetta metodi risolutivi di costo polinomiale...
Da un lavoro di Alfred Horn[2] del 1951 emerse la rilevanza pratica di concentrarsi, nello studio delle cnf, su disgiunzioni di un ristretto tipo...

Scaturirono da tale restrizione:

PROLOG: Un linguaggio di programmazione (Turing-completo)

DATALOG: Un linguaggio per la specifica di '*basi di conoscenza*'

---

[2] (Alfred Horn, 1918–2001)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

A tutt'oggi risolvere il famigerato problema CNF-SAT comporta, nel caso peggiore, un costo algoritmico esponenziale — non sappiamo se esso ammetta metodi risolutivi di costo polinomiale...
Da un lavoro di Alfred Horn[2] del 1951 emerse la rilevanza pratica di concentrarsi, nello studio delle cnf, su disgiunzioni di un ristretto tipo...
Scaturirono da tale restrizione:

- Prolog: Un linguaggio di programmazione (Turing-completo)
- Datalog: Un linguaggio per la specifica di '*basi di conoscenza*'
- Definite clause grammars: '***grammatiche di metamorfosi***' utilizzate per descrivere delle particolari sintassi

---

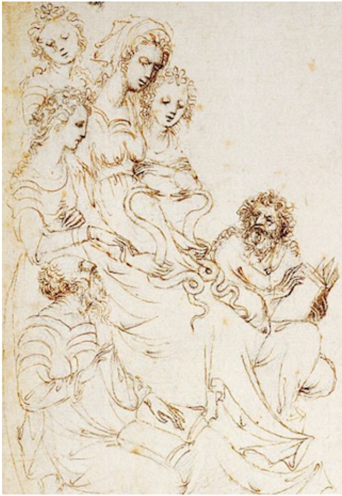
[2]  (Alfred Horn, 1918–2001)

Datalog$^{\pm}$: A Unifying Framework for Ontological Reasoning and Query Answering

Georg Gottlob and Andreas Pieris

Department of Computer Science
University of Oxford

Ontology, Rules, and Logic Programming for Reasoning and Applications,
October 31, 2013



Clausole di Horn: proposizionali, predicative

Una disgiunzione $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_M$ di letterali dei quali al piú uno è affermativo si chiama ***clausola di Horn***

Può essere (per ora) un

Una disgiunzione $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_M$ di letterali dei quali al piú uno è affermativo si chiama ***clausola di Horn***

Può essere (per ora) un

FATTO: ossia una lettera proposizionale H

Una disgiunzione $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_M$ di letterali dei quali al piú uno è affermativo si chiama ***clausola di Horn***

Può essere (per ora) un

FATTO: ossia una lettera proposizionale H

REGOLA: ossia una lettera H accompagnata da letterali negativi, dunque riscrivibile come:

$$\underbrace{H}_{\text{testa}} \leftarrow \underbrace{A_0 \,\&\, \cdots \,\&\, A_{M-2}}_{\text{corpo}}\,,$$ ove le A_i sono lettere

ed $M > 1$

Una disgiunzione $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_M$ di letterali dei quali al piú uno è affermativo si chiama ***clausola di Horn***

Può essere (per ora) un

FATTO: ossia una lettera proposizionale H

REGOLA: ossia una lettera H accompagnata da letterali negativi, dunque riscrivibile come:

$$\underbrace{H}_{\text{testa}} \quad \leftarrow \quad \underbrace{A_0 \,\&\, \cdots \,\&\, A_{M-2}}_{\text{corpo}},$$

ove le A_i sono lettere

ed $M > 1$

GOAL: solo letterali negativi, dunque

$$\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_M$$

Si chiama ***base di clausole*** una $\boxed{\text{cnf}}$

- costituita da clausole di Horn,
- alla quale non appartengono *goal*.

Idea:

- una base di clausole avrà il ruolo di ‘conoscenza’,
- ogni *goal* rappresenterà un’interrogazione rivolta a tale *knowledge base*.

Si chiama ***base di clausole*** una $\boxed{\text{cnf}}$

- costituita da clausole di Horn,
- alla quale non appartengono *goal*.

Idea:

- una base di clausole avrà il ruolo di 'conoscenza',
- ogni *goal* rappresenterà un'interrogazione rivolta a tale *knowledge base*.

Si chiama ***base di clausole*** una $\boxed{\text{cnf}}$

- costituita da clausole di Horn,
- alla quale non appartengono *goal*.

Idea:

- una base di clausole avrà il ruolo di 'conoscenza',
- ogni *goal* rappresenterà un'interrogazione rivolta a tale *knowledge base*.

Si chiama ***base di clausole*** una $\boxed{\text{cnf}}$

- costituita da clausole di Horn,
- alla quale non appartengono *goal*.

Idea:

- una base di clausole avrà il ruolo di 'conoscenza',
- ogni *goal* rappresenterà un'interrogazione rivolta a tale *knowledge base*.

Si chiama ***base di clausole*** una $\boxed{\text{cnf}}$

- costituita da clausole di Horn,
- alla quale non appartengono *goal*.

Idea:

- una base di clausole avrà il ruolo di 'conoscenza',
- ogni *goal* rappresenterà un'interrogazione rivolta a tale *knowledge base*. (Per questo teniamo i goal separati. . .)

Nella logica predicativa, i ***letterali*** vengono ad essere

> formule atomiche (anche con variabili)
> asserite o negate

Nella logica predicativa, i ***letterali*** vengono ad essere

> formule atomiche (anche con variabili)
> asserite o negate

Tutto il resto, ossia le deff. di

- dnf,
- cnf,
- clausola di Horn,
- base di clausole

viene adattato di conseguenza.

Nella logica predicativa, i ***letterali*** vengono ad essere

> formule atomiche (anche con variabili)
> asserite o negate

Tutto il resto, ossia le deff. di

- dnf,
- cnf,
- clausola di Horn,
- base di clausole

viene adattato di conseguenza.

Per un bel po' lasceremo fuori l'"$=$".

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Indichiamo (alla stregua di `Prolog`):

- le costanti con identificativi che iniziano con una *min*uscola
- le variabili individuali con id. che iniziano con una *maj*uscola

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Indichiamo (alla stregua di `Prolog`):

- le costanti con identificativi che iniziano con una *min*uscola
- le variabili individuali con id. che iniziano con una *maj*uscola

Sottintendiamo che ogni var. sia quantificata *universalm.* all'inizio della propria clausola.

Indichiamo (alla stregua di `Prolog`):

- le costanti con identificativi che iniziano con una *min*uscola
- le variabili individuali con id. che iniziano con una *maj*uscola

Sottintendiamo che ogni var. sia quantificata *universalm.* all'inizio della propria clausola.

Cosí, ad esempio:

ama(Chiunque , maria) .

va inteso come:

$$\forall x \;\; \mathrm{ama}(\, x \,,\ \mathrm{maria}\,)$$

Indichiamo (alla stregua di `Prolog`):

- le costanti con identificativi che iniziano con una *min*uscola
- le variabili individuali con id. che iniziano con una *maj*uscola

Sottintendiamo che ogni var. sia quantificata *universalm.* all'inizio della propria clausola.

Cosí, ad esempio:

$$\text{ama}(\,\text{Chiunque}\,,\ \text{maria}\,)\,.$$

va inteso come:

$$\forall x\ \ \text{ama}(\,x\,,\ \text{maria}\,)$$

(Non è piú un fatto isolato! Meglio chiamarlo ***asserzione***)

Avendo escluso l'uguaglianza, possiamo adottare come dominio naturale del discorso l'universo di Herbrand associato all'intera base delle clausole.[3]

3

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Avendo escluso l'uguaglianza, possiamo adottare come dominio naturale del discorso l'universo di Herbrand associato all'intera base delle clausole.[3]

[3]Se non vi figurano costanti, occorre introdurne una d'ufficio !

Quale dominio del discorso ?

Avendo escluso l'uguaglianza, possiamo adottare come dominio naturale del discorso l'universo di Herbrand associato all'intera base delle clausole.[3]

Cosí se la base è:

ama(	tizio ,	caia	) .
ama(	caia ,	sempronio	) .
ama(	Chiunque ,	maria	) .

l'universo è formato da 4 costanti.

3

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Avendo escluso l'uguaglianza, possiamo adottare come dominio naturale del discorso l'universo di Herbrand associato all'intera base delle clausole.[3]

Cosí se la base è:

ama(	tizio ,	caia	) .
ama(	caia ,	sempronio	) .
ama(	Chiunque ,	maria	) .

l'universo è formato da 4 costanti.

Continuiamo a chiamare ***fatti*** le prime due clausole (visto che non hanno varr.); chiamiamo asserzione solo la terza, che riassume 4 fatti

3

Avendo escluso l'uguaglianza, possiamo adottare come dominio naturale del discorso l'universo di Herbrand associato all'intera base delle clausole.[3]

Cosí se la base è:

ama(	tizio ,	caia	) .
ama(	caia ,	sempronio	) .
ama(	Chiunque ,	maria	) .

l'universo è formato da 4 costanti.

Continuiamo a chiamare ***fatti*** le prime due clausole (visto che non hanno varr.); chiamiamo asserzione solo la terza, che riassume 4 fatti (ma che, di norma (?), potrebbe riassumerne ∞ !)

[3]Se non vi figurano costanti, occorre introdurne una d'ufficio !

. . . le regole

$$
\begin{aligned}
\mathsf{zi}(\,\mathsf{F}\,,\,\mathsf{Y}\,) &\;\leftarrow\; \mathsf{fratello}(\,\mathsf{F}\,,\mathsf{X}\,)\ \&\ \mathsf{genitore}(\,\mathsf{X}\,,\,\mathsf{Y}\,)\,. \\
\mathsf{zi}(\,\mathsf{S}\,,\,\mathsf{Y}\,) &\;\leftarrow\; \mathsf{sorella}(\,\mathsf{S}\,,\mathsf{X}\,)\ \&\ \mathsf{genitore}(\,\mathsf{X}\,,\mathsf{Y}\,)\,.
\end{aligned}
$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

. . . le regole

$$\begin{array}{lcl} zi(F, Y) & \leftarrow & fratello(F, X)\ \&\ genitore(X, Y). \\ zi(S, Y) & \leftarrow & sorella(S, X)\ \&\ genitore(X, Y). \end{array}$$

Esplicitiamo:

$$\begin{array}{l} \forall f\, \forall y\, \forall x\, \forall s \Big(\big(\ fratello(f, x)\ \&\ genitore(x, y)\ \rightarrow\ zi(f, y) \big) \\ \qquad\qquad \&\ \big(\ sorella(s, x)\ \&\ genitore(x, y)\ \rightarrow\ zi(s, y) \big) \quad \Big) \end{array}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

. . . le regole

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{zi}(F, Y) & \leftarrow & \mathrm{fratello}(F, X)\ \&\ \mathrm{genitore}(X, Y)\,. \\ \mathrm{zi}(S, Y) & \leftarrow & \mathrm{sorella}(S, X)\ \&\ \mathrm{genitore}(X, Y)\,. \end{array}$$

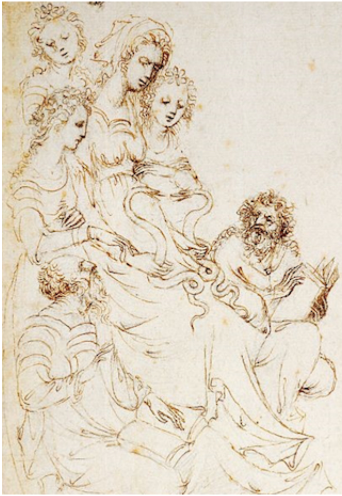
Esplicitiamo:

$$\forall f\, \forall y\, \forall x\, \forall s \Big(\big(\mathrm{fratello}(f, x)\ \&\ \mathrm{genitore}(x, y) \rightarrow \mathrm{zi}(f, y) \big) \\ \&\ \big(\mathrm{sorella}(s, x)\ \&\ \mathrm{genitore}(x, y) \rightarrow \mathrm{zi}(s, y) \big) \Big)$$

o anche:

$$\forall f\, \forall y \Big(\exists x \big(\mathrm{fratello}(f, x)\ \&\ \mathrm{genitore}(x, y) \big) \rightarrow \mathrm{zi}(f, y) \Big)\ \& \\ \forall s\, \forall y \Big(\exists x \big(\mathrm{sorella}(s, x)\ \&\ \mathrm{genitore}(x, y) \big) \rightarrow \mathrm{zi}(s, y) \Big)$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE



La soddisfacibilità
è garantita ?

In assenza di goal, la soddisfacibilità di una *con*giunzione di clausole di Horn è assicurata, per lo meno nel caso proposizionale:

In assenza di goal, la soddisfacibilità di una *con*giunzione di clausole di Horn è assicurata, per lo meno nel caso proposizionale:

- C'è un '*modello banale* ', che assegna **v** a qualsiasi lettera.

In assenza di goal, la soddisfacibilità di una *con*giunzione di clausole di Horn è assicurata, per lo meno nel caso proposizionale:

massimo

- C'è un '*modello* ~~*banale*~~', che assegna **v** a qualsiasi lettera.
- Individueremo anche un '*modello minimo*', che assegnerà **v** a una lettera solo qando tale val. è 'obbligato'.

In assenza di goal, la soddisfacibilità di una *con*giunzione di clausole di Horn è assicurata, per lo meno nel caso proposizionale:

- C'è un '*modello* *massimo* ~~*banale*~~', che assegna **v** a qualsiasi lettera.
- Individueremo anche un '*modello minimo*', che assegnerà **v** a una lettera solo qando tale val. è 'obbligato'.

Cambierà forse qualcosa nel passaggio da logica proposizionale a logica predicativa ?

In assenza di goal, la soddisfacibilità di una *con*giunzione di clausole di Horn è assicurata, per lo meno nel caso proposizionale:

- C'è un '*modello* ~~*banale*~~ *massimo*', che assegna **v** a qualsiasi lettera.
- Individueremo anche un '*modello minimo*', che assegnerà **v** a una lettera solo qando tale val. è 'obbligato'.

Cambierà forse qualcosa nel passaggio da logica proposizionale a logica predicativa ?

> **Suggerim.:** Tener presente l'analogia fra enunciati atomici predicativi e lettere proposizionali

Consideriamo le clausole:

```
presente( ora ).
```

Contro il modello massimo

Consideriamo le clausole:

$$
\begin{array}{lcl}
 & & \mathsf{presente}(\ \mathsf{ora}\ ). \\
\mathsf{futuro}(\ \mathsf{dopo}(\ X\ )\ ) & \leftarrow & \mathsf{presente}(\ X\ ). \\
\mathsf{futuro}(\ \mathsf{dopo}(\ X\ )\ ) & \leftarrow & \mathsf{futuro}(\ X\ ).
\end{array}
$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Consideriamo le clausole:

$$
\boxed{
\begin{array}{rcl}
\text{presente(ora).} & & \\
\text{futuro(dopo(} X \text{))} & \leftarrow & \text{presente(X) .} \\
\text{futuro(dopo(} X \text{))} & \leftarrow & \text{futuro(X) .} \\
\text{passato(prima(} X \text{))} & \leftarrow & \text{presente(X) .} \\
\text{passato(prima(} X \text{))} & \leftarrow & \text{passato(X) .}
\end{array}
}
$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Consideriamo le clausole:

$$\begin{array}{rcl} \text{presente}(\,\text{ora}\,). & & \\ \text{futuro}(\,\text{dopo}(\,X\,)\,) & \leftarrow & \text{presente}(\,X\,)\,. \\ \text{futuro}(\,\text{dopo}(\,X\,)\,) & \leftarrow & \text{futuro}(\,X\,)\,. \\ \text{passato}(\,\text{prima}(\,X\,)\,) & \leftarrow & \text{presente}(\,X\,)\,. \\ \text{passato}(\,\text{prima}(\,X\,)\,) & \leftarrow & \text{passato}(\,X\,)\,. \end{array}$$

Vi sembra naturale / accorto attribuire il valore **v** a

$$\text{passato}(\,\text{prima}(\,\text{prima}(\,\text{dopo}(\,\text{ora}\,)\,)\,)\,)$$

?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Consideriamo le clausole:

$$
\boxed{
\begin{array}{rcl}
\mathsf{presente}(\ \mathsf{ora}\ ). & & \\
\mathsf{futuro}(\ \mathsf{dopo}(\ X\ )\ ) & \leftarrow & \mathsf{presente}(\ X\ )\,. \\
\mathsf{futuro}(\ \mathsf{dopo}(\ X\ )\ ) & \leftarrow & \mathsf{futuro}(\ X\ )\,. \\
\mathsf{passato}(\ \mathsf{prima}(\ X\ )\ ) & \leftarrow & \mathsf{presente}(\ X\ )\,. \\
\mathsf{passato}(\ \mathsf{prima}(\ X\ )\ ) & \leftarrow & \mathsf{passato}(\ X\ )\,.
\end{array}
}
$$

Vi sembra naturale / accorto attribuire il valore **v** a

$$\mathsf{passato}(\ \mathsf{prima}(\ \mathsf{prima}(\ \mathsf{dopo}(\ \mathsf{ora}\ )\ )\ )\ )$$

$$\mathsf{futuro}(\ \mathsf{prima}(\ \mathsf{ora}\ )\ )$$

?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Abbiamo accantonato, fino a qs. momento, i *goal* (o '*mete*'): ma

Abbiamo accantonato, fino a qs. momento, i *goal* (o '*mete*'): ma

quando entreranno in scena, cercheremo di rendere veri pure loro. . .

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Abbiamo accantonato, fino a qs. momento, i *goal* (o '*mete*'): ma

quando entreranno in scena, cercheremo di rendere veri pure loro. . .

. . . cosa che il modello massimo ci precluderebbe !

Dimostrare l'insoddisfacibilità della cnf

```
futuro( domani ).
```

Esercizio:

Dimostrare l'insoddisfacibilità della cnf

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{futuro(domani).} \\ \text{futuro(dopo(} X \text{))} \quad \leftarrow \quad \text{futuro(X) .} \end{array}} \qquad (\ X \text{ variabile }\ )$$

Esercizio:

Dimostrare l'insoddisfacibilità della cnf

$$\begin{array}{|l|}\hline \quad \text{futuro}(\,\text{domani}\,). \\ \quad \text{futuro}(\,\text{dopo}(\,X\,)\,) \;\leftarrow\; \text{futuro}(\,X\,)\,. \\ \hline \quad \neg\,\text{futuro}(\,\text{dopo}(\,\text{dopo}(\,\text{domani}\,)\,)\,)\,. \\ \hline \end{array} \qquad (\,X \text{ variabile }\,)$$

Dimostrare l'insoddisfacibilità della cnf

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathsf{futuro}(\,\mathsf{domani}\,). \\ \mathsf{futuro}(\,\mathsf{dopo}(\,X\,)\,) \quad \leftarrow \quad \mathsf{futuro}(\,X\,)\,. \\ \neg\ \mathsf{futuro}(\,\mathsf{dopo}(\,\mathsf{dopo}(\,\mathsf{domani}\,)\,)\,)\,. \end{array}} \quad (\ X\ \text{variabile}\ )$$

indicando quanti esemplari di ciascuna clausola concorrano a formare una contraddizione di livello proposizionale e come vadano istanziate, per rendere manifesta la contraddizione, le loro variabili.

È evidente che nel caso visto ora, un *question-answering system* che ci indicasse che

futuro(dopo(dopo(domani)))

non trarrebbe un''*arbitraria illazione*' !

È evidente che nel caso visto ora, un *question-answering system* che ci indicasse che

$$\text{futuro}(\ \text{dopo}(\ \text{dopo}(\ \text{domani}\ )\ )\ )$$

non trarrebbe un''*arbitraria illazione*' !

D.: Che cos'è, in definitiva, il *modello minimo* di una fissata base di clausole ?

R.: È il sottoinsieme della base di Herbrand formato da. . .

È evidente che nel caso visto ora, un *question-answering system* che ci indicasse che

futuro(dopo(dopo(domani)))

non trarrebbe un''*arbitraria illazione*' !

D.: Che cos'è, in definitiva, il *modello minimo* di una fissata base di clausole ?

R.: È il sottoinsieme della base di Herbrand formato da...

1. ...tutti i fatti deducibili da fatti, asserzz. e regole *dati* ,
2. ...

È evidente che nel caso visto ora, un *question-answering system* che ci indicasse che

futuro(dopo(dopo(domani)))

non trarrebbe un''*arbitraria illazione*' !

D.: Che cos'è, in definitiva, il *modello minimo* di una fissata base di clausole ?

R.: È il sottoinsieme della base di Herbrand formato da...

1. ...tutti i fatti deducibili da fatti, asserzz. e regole *dati* ,
2. ...i fatti appartenenti a tutti i modelli di H. di tali clausole.

È evidente che nel caso visto ora, un *question-answering system* che ci indicasse che

futuro(dopo(dopo(domani)))

non trarrebbe un''*arbitraria illazione*' !

D.: Che cos'è, in definitiva, il *modello minimo* di una fissata base di clausole ?

R.: È il sottoinsieme della base di Herbrand formato da...

1. ...tutti i fatti deducibili da fatti, asserzz. e regole *dati* ,
2. ...i fatti appartenenti a tutti i modelli di H. di tali clausole.

ESERCIZIO:

Dimostrate l'equivalenza fra queste due caratterizzazioni .

Metodo di *concatenamento in avanti:* Si parte dall'acquisire i fatti, dei quali *si eliminano i complementi* nelle altre clausole, fin quando non si liberano piú fatti nuovi

Operativamente, nel caso proposizionale:

Metodo di *concatenamento in avanti:* Si parte dall'acquisire i fatti, dei quali *si eliminano i complementi* nelle altre clausole, fin quando non si liberano piú fatti nuovi

Se ci sono anche goal, una volta individuato il modello minimo, ci si domanda se qualche goal non si sia per caso 'svuotato', nel qual caso la congiunzione è assurda

Si considerino le clausole:

a	
b	
c ← b	f ← b & g
c ← r & e	f ← r & h
g ← r & e & c	f ← b & r
$\boxed{\text{r} \leftarrow \text{a \& b \& c}}$	

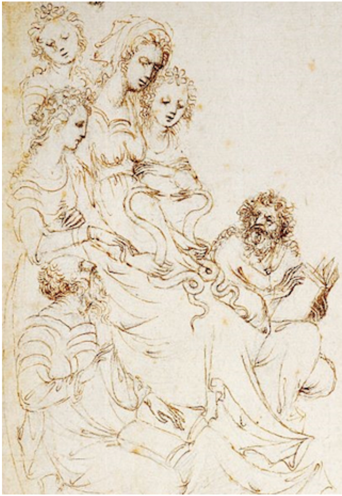
ovvero, secondo una comoda rappresentazione delle clausole introdotta da Davis-Putnam-Logemann-Loveland:

$$\big\{\{1\},\{2\},\{-2,3\},\{-4,-5,3\},\{-4,-5,-3,7\},\{-2,-7\},\{-4,-6\},\{-2,-3\},\boxed{\{4,\text{-}1,\text{-}2,\text{-}3\}},\ldots\big\}$$

$\longrightarrow$

A seconda che si includa o meno la regola su r, i goal saranno tutti o tre soddisfacibili, o soddisfacibili i primi due ma non il terzo.

Queste prove si possono effettuare anche nel linguaggio di programmazione `Prolog`, dove però la ricerca dell'assurdo procede per concatenamento *a ritroso*, che può causare (perfino a livello proposizionale) un '*impantanamento*' (in inglese: *floundering*)



Domande
e risposte

In *logica predicativa*, assieme a una base di clausole di Horn

$$\mathcal{B} \;=\; \left\{ C_1, \ldots, C_h \right\},$$

consideriamo un *goal* D , da chiamarsi '**domanda**'.

In *logica predicativa*, assieme a una base di clausole di Horn

$$\mathcal{B} \;=\; \left\{ C_1 , \ldots , C_h \right\},$$

consideriamo un *goal* D , da chiamarsi ‘**domanda**’.

Sostituendo lettere proposizionali alle formule atomiche, in base a una biiezione, otteniamo di qui le clausole di Horn *proposizionali*

$$C_1^* , \ldots , C_h^* , \;\; D^* \, .$$

In *logica predicativa*, assieme a una base di clausole di Horn

$$\mathcal{B} \;=\; \left\{ C_1 , \ldots , C_h \right\},$$

consideriamo un *goal* D , da chiamarsi '**domanda**'.

Sostituendo lettere proposizionali alle formule atomiche, in base a una biiezione, otteniamo di qui le clausole di Horn *proposizionali*

$$C_1^* , \ldots , C_h^* , \;\; D^* .$$

> Diremo che la cnf $\mathcal{B} \cup \{D\}$ è ***manifestam. contraddittoria*** sse ogni letterale ℓ in D^* trova il proprio complemento nel modello minimo di $\{ C_1^*, \ldots , C_h^* \}$.

Esempio:

$$\left\{\, p_2(\,\mathbf{0}\,) \leftarrow p_1(\,\mathbf{0}\,,\,X\,)\,,\;\; p_1(\,\mathbf{0}\,,\,X\,)\,,\;\; \neg\, p_2(\,\mathbf{0}\,) \,\right\}$$

$\boxed{\text{è}}$ manifestamente contraddittorio, dato che

$$\left\{\{\,2\,,\;-1\,\},\{\,1\,\},\;\;\{\,-2\,\}\right\}$$

è, al livello proposizionale, *assurdo*.

ESEMPIO:

$$\left\{\, p_2(\,Y\,) \leftarrow p_1(\,\mathbf{0}\,,\,X\,)\,,\;\; p_1(\,\mathbf{0}\,,\,X\,)\,,\;\; \neg\, p_2(\,\mathbf{0}\,)\,\right\}$$

$\boxed{\text{non è}}$ manifestamente contraddittorio —pur essendo insoddisfacibile in un'accezione piú ampia (quale. . . ?)—, dato che

$$\left\{\{3\,,\,-1\},\{1\},\;\{-2\}\right\}$$

è, al livello proposizionale, *soddisfacibile*.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esempio:

$$\left\{\, p_2(\,\mathbf{0}\,) \leftarrow p_1(\,\mathbf{0}\,,\, X\,)\,,\ \ p_1(\,\mathbf{0}\,,\, X\,)\,,\ \ \neg\, p_2(\,\mathbf{1}\,)\,\right\}$$

$\boxed{\text{non è}}$ manifestamente contraddittorio —per giunta è vero nel modello minimo—, dato che

$$\Big\{\{\,2\,,\,-1\,\},\{\,1\,\},\ \ \{\,-4\,\}\Big\}$$

è, al livello proposizionale, *soddisfacibile*.

Istanze di clausole

Definizione:

Per **istanza** di una clausola C s'intende una clausola K ottenuta rimpiazzando con dei termini (nei quali *possono* figurare varr.) le variabili logiche che compaiono in C (là dove si ripresenta la stessa variabile deve, naturalmente, essere sostituito lo stesso termine).

□

Istanze di clausole

Definizione:

Per **istanza** di una clausola C s'intende una clausola K ottenuta rimpiazzando con dei termini (nei quali *possono* figurare varr.) le variabili logiche che compaiono in C (là dove si ripresenta la stessa variabile deve, naturalmente, essere sostituito lo stesso termine).
Se

$$
\begin{array}{l}
v_1 \stackrel{\sigma}{\longmapsto} t_1 \\
\quad \ldots \\
\qquad \ldots \\
\qquad\quad \ldots \\
v_n \stackrel{\sigma}{\longmapsto} t_n
\end{array}
$$

è una funzione σ (leggi "sigma") avente per dominio un insieme finito $v_1, \ldots, v_n$ di variabili logiche, indicheremo con C^σ l'istanza di C che si ottiene rimpiazzando tutte le presenze di v_i all'interno di C con t_i, simultaneamente per $i = 1, \ldots, n$.

□

Definizione:

Per **istanza** di una clausola C s'intende una clausola K ottenuta rimpiazzando con dei termini (nei quali *possono* figurare varr.) le variabili logiche che compaiono in C (là dove si ripresenta la stessa variabile deve, naturalmente, essere sostituito lo stesso termine). Se

$$v_1 \overset{\sigma}{\longmapsto} t_1$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$v_n \overset{\sigma}{\longmapsto} t_n$$

è una funzione σ (leggi "sigma") avente per dominio un insieme finito $v_1, \dots, v_n$ di variabili logiche, indicheremo con C^σ l'istanza di C che si ottiene rimpiazzando tutte le presenze di v_i all'interno di C con t_i, simultaneamente per $i = 1, \dots, n$. Analoga notazione t^σ si adopera per un termine t. □

Definizione:

Siano $\mathcal{B}$ e D come sopra. Diremo che una sostituzione

$$v_1 \overset{\sigma}{\longmapsto} t_1$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$v_n \overset{\sigma}{\longmapsto} t_n$$

di termini t_i alle variabili logiche v_i presenti in D è una ***risposta corretta***, in $\mathcal{B}$, alla domanda D sse:

vi sono istanze $K_1, \ldots, K_m$ di clausole appartenenti a $\mathcal{B}$ tali che $\{ K_1, \ldots, K_m, \; D^\sigma \}$ sia manifestamente contraddittoria.

Risposte corrette

Definizione:

Siano $\mathcal{B}$ e D come sopra. Diremo che una sostituzione

$$v_1 \overset{\sigma}{\longmapsto} t_1$$
$$\cdots$$
$$\cdots$$
$$\cdots$$
$$v_n \overset{\sigma}{\longmapsto} t_n$$

di termini t_i alle variabili logiche v_i presenti in D è una ***risposta corretta***, in $\mathcal{B}$, alla domanda D sse:

vi sono istanze $K_1, \ldots, K_m$ di clausole appartenenti a $\mathcal{B}$ tali che $\{ K_1, \ldots, K_m, \; D^\sigma \}$ sia manifestamente contraddittoria.

Osservazioni:

Non è escluso che da una clausola di $\mathcal{B}$ possano originare piú K_j .

Definizione:

Siano $\mathcal{B}$ e D come sopra. Diremo che una sostituzione

$$\begin{array}{l} v_1 \overset{\sigma}{\longmapsto} t_1 \\ \ldots \\ \quad\ldots \\ \qquad\ldots \\ v_n \overset{\sigma}{\longmapsto} t_n \end{array}$$

di termini t_i alle variabili logiche v_i presenti in D è una ***risposta corretta***, in $\mathcal{B}$, alla domanda D sse:

vi sono istanze $K_1, \ldots, K_m$ di clausole appartenenti a $\mathcal{B}$ tali che $\{ K_1, \ldots, K_m, \quad D^\sigma \}$ sia manifestamente contraddittoria.

Osservazioni:

Non è escluso che da una clausola di $\mathcal{B}$ possano originare piú K_j.

Non è vietato che qualche t_i uguagli la corrispettiva v_i.

Definizione:

I termini cosí definiti, per ogni m in $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} \underline{0} & =_{\mathsf{Def}} & \mathbf{0}\,, \\ \underline{m+1} & =_{\mathsf{Def}} & \mathsf{s}(\underline{m})\,, \end{array}$$

designano in modo univoco tutti i numeri naturali. Formano un universo di Herbrand: l'universo dei ***numerali*** (in base 1).

Esercizio su domande e risposte

Definizione:

I termini cosí definiti, per ogni m in $\mathbb{N}$:

$$\underline{0} =_{\text{Def}} \mathbf{0} \,,$$
$$\underline{m+1} =_{\text{Def}} \mathsf{s}(\underline{m}) \,,$$

designano in modo univoco tutti i numeri naturali. Formano un universo di Herbrand: l'universo dei ***numerali*** (in base 1).

Specifica tramite clausole di Horn

Specificare tramite una $\mathcal{B}$ predicati

$$\mathsf{succ}_{/2}\,, \quad +_{/3}\,, \quad *_{/3}\,,$$

tali che in $\mathcal{B}$:

- l'unica risposta corretta a $\neg\, \mathsf{succ}(\, X\,,\ \underline{n}\,)$ sia $X \mapsto \underline{n+1}$;
- l'unica risposta corretta a $\neg\ +(\, X\,, \underline{n}\,,\ \underline{m}\,)$ sia $X \mapsto \underline{n+m}$;
- l'unica risposta corretta a $\neg\ *(\, X\,, \underline{n}\,,\ \underline{m}\,)$ sia $X \mapsto \underline{n \cdot m}$.

RIESTE

Definizione:

Siano σ e $\sigma_\star$ risposte corrette a D. Diremo che σ è *piú generale* di $\sigma_\star$ se:

- $\sigma \neq \sigma_\star$ ed inoltre
- c'è una sostituzione τ (leggi "tau") tale che, indicando esplicitamente σ come

$$\begin{array}{l} v_1 \stackrel{\sigma}{\longmapsto} t_1 \\ \cdots \\ \ \cdots \\ \ \ \cdots \\ v_n \stackrel{\sigma}{\longmapsto} t_n \ , \end{array}$$

$\sigma_\star$ risulti uguale a:

$$\begin{array}{l} v_1 \stackrel{\sigma}{\longmapsto} t_1^\tau \\ \cdots \\ \ \cdots \\ \ \ \cdots \\ v_n \stackrel{\sigma}{\longmapsto} t_n^\tau \ . \end{array}$$

□

DEFINIZIONE:

Un insieme Σ (finito oppure infinito) di risposte corrette a D in $\mathcal{B}$ si dice ***esaustivo*** sse, per ogni risposta corretta $\sigma_\star$ a D tale che in $D^{\sigma_\star}$ non figurino varr.:

- o si ha che $\sigma_\star \in \Sigma$,
- oppure c''e una risposta σ a D, piú generale di $\sigma_\star$, tale che $\sigma \in \Sigma$.

$\square$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Teorema:

Esiste un procedimento di ricerca (forse perpetua) che, assegnate una base di clausole $\mathcal{B}$ e una domanda D, genera un insieme esaustivo di risposte corrette a D. □

TEOREMA:

Esiste un procedimento di ricerca (forse perpetua) che, assegnate una base di clausole $\mathcal{B}$ e una domanda D, genera un insieme esaustivo di risposte corrette a D. $\square$

- Non è escluso che il procedimento possa avere termine, almeno in casi favorevoli, dopo aver generato un insieme esaustivo di risposte corrette ;

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Enumerabilità effettiva delle risposte

Teorema:

Esiste un procedimento di ricerca (forse perpetua) che, assegnate una base di clausole $\mathcal{B}$ e una domanda D, genera un insieme esaustivo di risposte corrette a D. $\square$

- Non è escluso che il procedimento possa avere termine, almeno in casi favorevoli, dopo aver generato un insieme esaustivo di risposte corrette ;
- né viene richiesto che l'insieme generato in risposta a D sia il piú succinto possibile

Enumerabilità effettiva delle risposte

Teorema:

Esiste un procedimento di ricerca (forse perpetua) che, assegnate una base di clausole $\mathcal{B}$ e una domanda D, genera un insieme esaustivo di risposte corrette a D. $\square$

- Non è escluso che il procedimento possa avere termine, almeno in casi favorevoli, dopo aver generato un insieme esaustivo di risposte corrette ;
- né viene richiesto che l'insieme generato in risposta a D sia il piú succinto possibile: potrà darsi, anzi, che vi compaia una risposta piú generale di un'altra, o di infinite altre.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

J.W. Lloyd.
Foundations of Logic Programming.
Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 1987.