Indecidibilità essenziale dell'aritmetica

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI

Trieste, 25–26/05/2015

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

- Richiamo: I concetti di formalismo e di teoria
-
-
-
-
-
-
-

Scaletta

- Richiamo: I concetti di formalismo e di teoria
- Due teorie cui ancorare le nostre riflessioni
-
-
-
-
-
-

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

- Richiamo: I concetti di formalismo e di teoria
- Due teorie cui ancorare le nostre riflessioni
- Gli insiemi ereditariamente finiti
-
-
-
-

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

- Richiamo: I concetti di formalismo e di teoria
- Due teorie cui ancorare le nostre riflessioni
- Gli insiemi ereditariamente finiti
- Aspirare alla completezza: a quale scopo ?
-
-
-

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

- Richiamo: I concetti di formalismo e di teoria
- Due teorie cui ancorare le nostre riflessioni
- Gli insiemi ereditariamente finiti
- Aspirare alla completezza: a quale scopo ?
- 'Patologia' dell'indecidibilità essenziale
-
-

Scaletta

- Richiamo: I concetti di formalismo e di teoria
- Due teorie cui ancorare le nostre riflessioni
- Gli insiemi ereditariamente finiti
- Aspirare alla completezza: a quale scopo ?
- 'Patologia' dell'indecidibilità essenziale
- L'aritmetica dei naturali ha *Entscheidungsproblem* insolubile
-

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

- Richiamo: I concetti di formalismo e di teoria
- Due teorie cui ancorare le nostre riflessioni
- Gli insiemi ereditariamente finiti
- Aspirare alla completezza: a quale scopo ?
- 'Patologia' dell'indecidibilità essenziale
- L'aritmetica dei naturali ha *Entscheidungsproblem* insolubile
- Non tutto è patologico: Aritmetiche di Presburger, di Tarski,...

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Richiamo: I concetti di formalismo e di teoria

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Definizione

Un ***formalismo*** è una quaterna

$$\mathcal{E},\quad \vdash,\quad \mathrm{RE},\quad \mathrm{MO}$$

di oggetti *metalogici*, dei quali due, e cioè

$\mathcal{E}$: l'insieme dei cosiddetti ***enunciati***, e

$\vdash$: la relazione detta di ***derivabilità*** fra sottoinsiemi di $\mathcal{E}$ e membri di $\mathcal{E}$,

sono **sintattici**, mentre gli altri due, ⇝

$\rightsquigarrow$

DEFINIZIONE (CONT.)

sono **sintattici**, mentre gli altri due,

RE : la classe delle ***strutture interpretative*** (o '***realizzazioni***'), e

MO : la funzione che associa a ogni enunciato α di $\mathcal{E}$ una sottoclasse di RE, chiamata classe dei ***modelli*** di α,

sono **semantici**.

□

$\rightsquigarrow$

DEFINIZIONE (CONT.)

sono **sintattici**, mentre gli altri due,

RE : la classe delle ***strutture interpretative*** (o '***realizzazioni***'), e

MO : la funzione che associa a ogni enunciato α di $\mathcal{E}$ una sottoclasse di RE, chiamata classe dei ***modelli*** di α,

sono **semantici**.

Si richiede che RE sia unione di tutte le $\mathrm{MO}(\alpha)$ con α in $\mathcal{E}$.

□

Allora...

$$\mathcal{A} \models \alpha$$

(leggi: α è ***conseguenza logica*** di $\mathcal{A}$) significa che

$$\bigcap_{\gamma \text{ in } \mathcal{A}} \mathrm{MO}(\gamma) \subseteq \mathrm{MO}(\alpha)\,,$$

ossia che

Allora...

$$\mathcal{A} \models \alpha$$

(leggi: α è ***conseguenza logica*** di $\mathcal{A}$) significa che

$$\bigcap_{\gamma \text{ in } \mathcal{A}} \mathrm{MO}(\gamma) \subseteq \mathrm{MO}(\alpha)\,,$$

ossia che

> qualunque interpretazione renda veri, simultaneamente, tutti gli enunciati in $\mathcal{A}$, rende del pari vero anche α .

ALLORA...

$$\mathcal{A} \models \alpha$$

(leggi: α è ***conseguenza logica*** di $\mathcal{A}$) significa che

$$\bigcap_{\gamma \text{ in } \mathcal{A}} \mathrm{MO}(\gamma) \subseteq \mathrm{MO}(\alpha)\,,$$

ossia che

> qualunque interpretazione renda veri, simultaneamente, tutti gli enunciati in $\mathcal{A}$, rende del pari vero anche α .

N.B.: Se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ e $\mathcal{B} \models \beta$ allora $\mathcal{A} \models \beta$.

Richiamo: Cos'è una teoria

Una *teoria* è un insieme di enunciati chiuso rispetto alla

1. consequenzialità logica $\models$:

e dunque

Una *teoria* è un insieme di enunciati chiuso rispetto alla

1. consequenzialità logica $\models$:

DEFINIZIONE. PER UN FORMALISMO C.S.:

Un insieme $\Gamma \subseteq \mathcal{E}$ è una ***teoria*** sse

$$\mathsf{Cn}(\Gamma) \subseteq \Gamma,$$

dove vige la def.

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{A}) =_{\mathsf{Def}} \{\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \mid \mathcal{A} \models \vartheta\},$$

per ogni $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$. □

e dunque

Una *teoria* è un insieme di enunciati chiuso rispetto alla

1. consequenzialità logica $\models$:

DEFINIZIONE. PER UN FORMALISMO C.S.:

Un insieme $\Gamma \subseteq \mathcal{E}$ è una ***teoria*** sse

$$\mathsf{Cn}(\Gamma) \subseteq \Gamma,$$

dove vige la def.

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{A}) =_{\mathsf{Def}} \{\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \mid \mathcal{A} \models \vartheta\},$$

per ogni $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$. □

e dunque—se il formalismo è *completo*—rispetto alla

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Una *teoria* è un insieme di enunciati chiuso rispetto alla

1. consequenzialità logica $\models$:

DEFINIZIONE. PER UN FORMALISMO C.S.:

Un insieme $\Gamma \subseteq \mathcal{E}$ è una ***teoria*** sse

$$\mathsf{Cn}(\Gamma) \subseteq \Gamma,$$

dove vige la def.

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{A}) =_{\mathsf{Def}} \{\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \mid \mathcal{A} \models \vartheta\},$$

per ogni $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$. □

e dunque—se il formalismo è *completo*—rispetto alla

2. deducibilità $\vdash$
   (istruita con assiomi *logici* e regole d'inferenza).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esempio semantico. Per un formalismo c.s.:

Qualsiasi $\mathfrak{I}$ in RE definisce una teoria: la

$$\mathsf{Th}(\{\mathfrak{I}\}) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \{\,\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \mid \mathfrak{I} \text{ in } \mathsf{MO}(\vartheta)\,\}\,.$$

Esempio semantico. Per un formalismo c.s.:

Qualsiasi $\mathfrak{I}$ in RE definisce una teoria: la

$$\mathsf{Th}(\{\mathfrak{I}\}) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \{\,\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \,|\, \mathfrak{I} \text{ in } \mathsf{MO}(\vartheta)\,\}\,.$$

Piú in generale, spesso un matematico si interessa di una teoria della forma

$$\mathsf{Th}(\mathfrak{R}) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \{\,\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \,|\, \mathfrak{R} \subseteq \mathsf{MO}(\vartheta)\,\}\,.$$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esempio semantico. Per un formalismo c.s.:

Qualsiasi $\mathfrak{I}$ in RE definisce una teoria: la

$$\mathsf{Th}(\{\mathfrak{I}\}) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \{\,\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \,|\, \mathfrak{I} \text{ in } \mathsf{MO}(\vartheta)\,\}\,.$$

Piú in generale, spesso un matematico si interessa di una teoria della forma

$$\mathsf{Th}(\mathfrak{R}) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \{\,\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \,|\, \mathfrak{R} \subseteq \mathsf{MO}(\vartheta)\,\}\,.$$

Riflex.-lampo: Qual è la differenza fra un $\mathfrak{R}$ singolo o multiplo ?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esempio assiomatico. Per un formalismo c.s.:

Qualsiasi $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ definisce una teoria: la

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{A}) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \{\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \mid \mathcal{A} \models \vartheta\}.$$

Esempio assiomatico. Per un formalismo c.s.:

Qualsiasi $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ definisce una teoria: la

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{A}) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \{\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \mid \mathcal{A} \models \vartheta\}.$$

Ciò assicura, quanto meno, l'enumerabilità effettiva della teoria, nel caso di

Esempio assiomatico. Per un formalismo c.s.:

Qualsiasi $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ definisce una teoria: la

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{A}) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \{\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \mid \mathcal{A} \models \vartheta\}.$$

Ciò assicura, quanto meno, l'enumerabilità effettiva della teoria, nel caso di

- formalismo *completo*, unito a

Esempio assiomatico. Per un formalismo c.s.:

Qualsiasi $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ definisce una teoria: la

$$\mathrm{Cn}(\mathcal{A}) \quad =_{\mathrm{Def}} \quad \{\vartheta \text{ in } \mathcal{E} \mid \mathcal{A} \models \vartheta\}.$$

Ciò assicura, quanto meno, l'enumerabilità effettiva della teoria, nel caso di

- formalismo *completo*, unito a
- *computabilità* della funzione

$$\alpha \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \in \mathcal{A}, \\ 0 & \text{se } \alpha \notin \mathcal{A}, \end{cases}$$

definita per α in $\mathcal{E}$, il che rende accettabile $\mathcal{A}$ come insieme ***assiomi propri.***

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Ha senso riferire ad $\mathcal{E}$ la computabilità?

"$\mathcal{E}$ è un oggetto sintattico" va inteso in modo che il concetto di computabilità sia 'mutuabile' da $\mathbb{N}$. Di norma è possibile:

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Ha senso riferire ad $\mathcal{E}$ la computabilità?

"$\mathcal{E}$ è un oggetto sintattico" va inteso in modo che il concetto di computabilità sia 'mutuabile' da $\mathbb{N}$. Di norma è possibile:

- identificare $\mathcal{E}$ con un sottoinsieme di un $\mathbb{A}^*$: '*universo linguistico*' formato dalle sequenze finite, ovvero '*parole*' su di un '*alfabeto*' finito $\mathbb{A}$; quindi,

Ha senso riferire ad $\mathcal{E}$ la computabilità?

"$\mathcal{E}$ è un oggetto sintattico" va inteso in modo che il concetto di computabilità sia 'mutuabile' da $\mathbb{N}$. Di norma è possibile:

- identificare $\mathcal{E}$ con un sottoinsieme di un $\mathbb{A}^*$: '*universo linguistico*' formato dalle sequenze finite, ovvero '*parole*' su di un '*alfabeto*' finito $\mathbb{A}$; quindi,
- vedendo le parole su $\mathbb{A}$ come numeri espressi in base $|\mathbb{A}|$, ...

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Ha senso riferire ad $\mathcal{E}$ la computabilità?

"$\mathcal{E}$ è un oggetto sintattico" va inteso in modo che il concetto di computabilità sia 'mutuabile' da $\mathbb{N}$. Di norma è possibile:

- identificare $\mathcal{E}$ con un sottoinsieme di un $\mathbb{A}^*$: '*universo linguistico*' formato dalle sequenze finite, ovvero '*parole*' su di un '*alfabeto*' finito $\mathbb{A}$; quindi,
- vedendo le parole su $\mathbb{A}$ come numeri espressi in base $|\mathbb{A}|$, ...
- riconoscere fra le parole quelle che sono '*ben formate*' (ad es., termini, formule) in particolare,

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Ha senso riferire ad $\mathcal{E}$ la computabilità?

"$\mathcal{E}$ è un oggetto sintattico" va inteso in modo che il concetto di computabilità sia 'mutuabile' da $\mathbb{N}$. Di norma è possibile:

- identificare $\mathcal{E}$ con un sottoinsieme di un $\mathbb{A}^*$: '*universo linguistico*' formato dalle sequenze finite, ovvero '*parole*' su di un '*alfabeto*' finito $\mathbb{A}$; quindi,
- vedendo le parole su $\mathbb{A}$ come numeri espressi in base $|\mathbb{A}|$, ...
- riconoscere fra le parole quelle che sono '*ben formate*' (ad es., termini, formule) in particolare,
- individuare gli enunciati.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Ha senso riferire ad $\mathcal{E}$ la computabilità?

"$\mathcal{E}$ è un oggetto sintattico" va inteso in modo che il concetto di computabilità sia 'mutuabile' da $\mathbb{N}$. Di norma è possibile:

- identificare $\mathcal{E}$ con un sottoinsieme di un $\mathbb{A}^*$: '*universo linguistico*' formato dalle sequenze finite, ovvero '*parole*' su di un '*alfabeto*' finito $\mathbb{A}$; quindi,
- vedendo le parole su $\mathbb{A}$ come numeri espressi in base $|\mathbb{A}|$, ...
- riconoscere fra le parole quelle che sono '*ben formate*' (ad es., termini, formule) in particolare,
- individuare gli enunciati.

(Analogo discorso per le seq. finite di enunciati, come a suo tempo illustrato per la logica proposizionale.)

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Due teorie cui ancorare
le nostre riflessioni

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Firma del linguaggio:

$$\langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle = \langle \{ 0 \}, \{ \mathsf{s}_{/1}, +_{/2}, *_{/2} \}, \{ =_{/2}, \leqslant_{/2} \} \rangle .$$

Firma del linguaggio:

$$\langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle \;=\; \langle \{ 0 \}, \{ \mathsf{s}_{/1}, +_{/2}, *_{/2} \}, \{ =_{/2}, \leqslant_{/2} \} \rangle .$$

Assiomi $\mathcal{P}$: Chiusura universale di ciascuna delle formule

$$\begin{aligned}
\mathsf{s}\, x &\neq 0, \\
\mathsf{s}\, x = \mathsf{s}\, y &\rightarrow x = y, \\
x + 0 &= x, \\
x + \mathsf{s}\, y &= \mathsf{s}(x + y), \\
x * 0 &= 0, \\
x * \mathsf{s}\, y &= (x * y) + x, \\
x \leqslant 0 &\rightarrow x = 0, \\
x \leqslant \mathsf{s}\, y &\rightarrow x \leqslant y \;\vee\; x = \mathsf{s}\, y, \\
x \leqslant \mathsf{y} &\;\vee\; y \leqslant x,
\end{aligned}$$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Firma del linguaggio:

$$\langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle \;=\; \langle \{ 0 \}, \{ \mathsf{s}_{/1}, +_{/2}, *_{/2} \}, \{ =_{/2}, \leqslant_{/2} \} \rangle .$$

Assiomi $\mathcal{P}$: Chiusura universale di ciascuna delle formule

$$\begin{aligned}
\mathsf{s}\, x &\neq 0 , \\
\mathsf{s}\, x = \mathsf{s}\, y &\rightarrow x = y , \\
x + 0 &= x , \\
x + \mathsf{s}\, y &= \mathsf{s}(x + y) , \\
x * 0 &= 0 , \\
x * \mathsf{s}\, y &= (x * y) + x , \\
x \leqslant 0 &\rightarrow x = 0 , \\
x \leqslant \mathsf{s}\, y &\rightarrow x \leqslant y \;\vee\; x = \mathsf{s}\, y , \\
x \leqslant \mathsf{y} &\vee y \leqslant x ,
\end{aligned}$$

nonché *di* ogni esemplare dello *schema d'induzione*

$$\gamma(0) \;\rightarrow\; \forall x \left(\gamma(x) \rightarrow \gamma(\mathsf{s}\, x) \right) \;\rightarrow\; \forall x\, \gamma(x) .$$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

γ, *formula*, passa sul serio in rassegna tutti i sotto-insiemi $\boldsymbol{\gamma}$ di $\mathbb{N}$?

Altra riflex.-lampo sull'induzione

Che vi sia un insieme d'assiomi equivalente a $\mathcal{P}$ ma finito ?

Altra riflex.-lampo sull'induzione

Che vi sia un insieme d'assiomi equivalente a $\mathcal{P}$ ma finito ?

([Davis(1993), pagg. 40–41])

Firma del linguaggio:

$$\langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle = \langle \{\}, \{\}, \{ =_{/2}, \in_{/2} \} \rangle .$$

Firma del linguaggio:

$$\langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle \;=\; \langle \{\}, \{\}, \{ =_{/2}, \in_{/2} \} \rangle .$$

Assiomi $\mathcal{W}$: I due enunciati

$$\exists z \, \forall v \; v \notin z ,$$

$$\forall x \, \forall e \, \exists w \, \forall u \left(\; u \in w \;\leftrightarrow\; u \in x \vee u = e \; \right) .$$

Debita riflessione meta-teorica

Come convincersi che né la teoria di Peano né quella di Vaught sia contraddittoria?

Debita riflessione meta-teorica

Come convincersi che né la teoria di Peano né quella di Vaught sia contraddittoria?

Merita discutere almeno la seconda questione...

Gli insiemi ereditariamente finiti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Indicando ora con $\mathcal{P}(X)$ l'***insieme potenza*** di qualsiasi insieme X, veniamo ora alle definizioni, in successione infinita, di:

numeri:

$0 =_{\text{Def}} \varnothing$,

$1 =_{\text{Def}} \{0\}$,

$2 =_{\text{Def}} 1 \cup \{1\}$,

$3 =_{\text{Def}} 2 \cup \{2\}$,

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Indicando ora con $\mathcal{P}(X)$ l'***insieme potenza*** di qualsiasi insieme X, veniamo ora alle definizioni, in successione infinita, di:

numeri:		e	**livelli**:	
0	$=_{\text{Def}} \varnothing$,		$\mathcal{V}_0$	$=_{\text{Def}} \varnothing$;
1	$=_{\text{Def}} \{0\}$,		$\mathcal{V}_1$	$=_{\text{Def}} \mathcal{P}(\mathcal{V}_0)$;
2	$=_{\text{Def}} 1 \cup \{1\}$,		$\mathcal{V}_2$	$=_{\text{Def}} \mathcal{P}(\mathcal{V}_1)$;
3	$=_{\text{Def}} 2 \cup \{2\}$,		$\mathcal{V}_3$	$=_{\text{Def}} \mathcal{P}(\mathcal{V}_2)$;

ecc.,

Indicando ora con $\mathcal{P}(X)$ l'***insieme potenza*** di qualsiasi insieme X, veniamo ora alle definizioni, in successione infinita, di:

numeri:		e	**livelli**:	
0	$=_{\mathsf{Def}} \varnothing\,,$		$\mathcal{V}_0$	$=_{\mathsf{Def}} \varnothing\,;$
1	$=_{\mathsf{Def}} \{0\}\,,$		$\mathcal{V}_1$	$=_{\mathsf{Def}} \mathcal{P}(\mathcal{V}_0)\,;$
2	$=_{\mathsf{Def}} 1 \cup \{1\}\,,$		$\mathcal{V}_2$	$=_{\mathsf{Def}} \mathcal{P}(\mathcal{V}_1)\,;$
3	$=_{\mathsf{Def}} 2 \cup \{2\}\,,$		$\mathcal{V}_3$	$=_{\mathsf{Def}} \mathcal{P}(\mathcal{V}_2)\,;$

ecc.,

espandendo le quali possiamo effettivamente determinare i livelli come segue: $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$

$$\mathcal{V}_1 = \{\mathbf{0}\} = 1 = \{\mathcal{V}_0\}, \qquad \mathcal{V}_2 = \{0, \ \mathbf{1}\} = 2 = \{0, \ \mathcal{V}_1\},$$
$$\mathcal{V}_3 = \{0, 1, \ \{1\}, \mathbf{2}\} = \{0, 1, \ \{1\}, \mathcal{V}_2\},$$
$$\mathcal{V}_4 = \Big\{0, 1, \{1\}, 2, \ \{\{1\}\}, \{2\}, \{0, \{1\}\}, \{0, 2\}, \{1, \{1\}\}, \{1, 2\}, \{0, 1, \{1\}\},$$
$$\mathbf{3}, \{\{1\}, 2\}, \{0, \{1\}, 2\}, \{1, \{1\}, 2\}, \mathcal{V}_3\Big\},$$

ecc..

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

$\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$

$$\mathcal{V}_1 = \{\mathbf{0}\} = 1 = \{\mathcal{V}_0\}, \qquad \mathcal{V}_2 = \{0, \ \mathbf{1}\} = 2 = \{0, \ \mathcal{V}_1\},$$
$$\mathcal{V}_3 = \{0, 1, \ \{1\}, \mathbf{2}\} = \{0, 1, \ \{1\}, \mathcal{V}_2\},$$
$$\mathcal{V}_4 = \Big\{0, 1, \{1\}, 2, \ \{\{1\}\}, \{2\}, \{0, \{1\}\}, \{0, 2\}, \{1, \{1\}\}, \{1, 2\}, \{0, 1, \{1\}\},$$
$$\mathbf{3}, \{\{1\}, 2\}, \{0, \{1\}, 2\}, \{1, \{1\}, 2\}, \mathcal{V}_3\Big\},$$

ecc..

Si noti che i naturali, intesi come sopra, sono dei particolarissimi insiemi. I livelli $\mathcal{V}_i$, come pure gli elementi di ciascuno di essi, si affacciano come insiemi nel corso *di questa costruzione*.

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

$\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$

$$\mathcal{V}_1 = \{\mathbf{0}\} = 1 = \{\mathcal{V}_0\}, \qquad \mathcal{V}_2 = \{0,\ \mathbf{1}\} = 2 = \{0,\ \mathcal{V}_1\},$$
$$\mathcal{V}_3 = \{0, 1,\ \{1\}, \mathbf{2}\} = \{0, 1,\ \{1\}, \mathcal{V}_2\},$$
$$\mathcal{V}_4 = \Big\{0, 1, \{1\}, 2,\ \{\{1\}\}, \{2\}, \{0, \{1\}\}, \{0, 2\}, \{1, \{1\}\}, \{1, 2\}, \{0, 1, \{1\}\},$$
$$\mathbf{3}, \{\{1\}, 2\}, \{0, \{1\}, 2\}, \{1, \{1\}, 2\}, \mathcal{V}_3\Big\},$$

ecc..

Si noti che i naturali, intesi come sopra, sono dei particolarissimi insiemi. I livelli $\mathcal{V}_i$, come pure gli elementi di ciascuno di essi, si affacciano come insiemi nel corso *di questa costruzione*.

Ogni livello $\mathcal{V}_{i+1}$ ha la quantità di elementi *finita*
(ma, ahimé, *iperesponenziale*):

$$\left.2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\} \ i \text{ volte}$$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

$\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$

Esercizio: Mostrare che per ogni i in $\mathbb{N}$:

1. $\mathcal{V}_i \in \mathcal{V}_{i+1}$;
2.
3.
4. □

$\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$

Esercizio: **Mostrare che per ogni i in $\mathbb{N}$:**

1. $\mathcal{V}_i \in \mathcal{V}_{i+1}$;
2. $\mathcal{V}_i \supset \bigcup_{j<i} \mathcal{V}_j$ (*inscatolamento*);
3.
4. $\square$

$\rightsquigarrow$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

$\rightsquigarrow$

Esercizio: **Mostrare che per ogni i in $\mathbb{N}$:**

1. $\mathcal{V}_i \in \mathcal{V}_{i+1}$;
2. $\mathcal{V}_i \supset \bigcup_{j<i} \mathcal{V}_j$ (*inscatolamento*);
3. $i \in \mathcal{V}_{i+1} \setminus \mathcal{V}_i$ (*gerarchia vera e propria*);
4. $\square$

$\rightsquigarrow$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

$\rightsquigarrow$

Esercizio: Mostrare che per ogni i in $\mathbb{N}$:

1. $\mathcal{V}_i \in \mathcal{V}_{i+1}$;
2. $\mathcal{V}_i \supset \bigcup_{j<i} \mathcal{V}_j$ (*inscatolamento*);
3. $i \in \mathcal{V}_{i+1} \setminus \mathcal{V}_i$ (*gerarchia vera e propria*);
4. da $i = 3$ in poi, $\mathcal{V}_i$ ha fra i suoi elementi dei non-numeri. □

$\rightsquigarrow$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

$\rightsquigarrow$

Esercizio: Mostrare che per ogni i in $\mathbb{N}$:

1. $\mathcal{V}_i \in \mathcal{V}_{i+1}$;
2. $\mathcal{V}_i \supset \bigcup_{j<i} \mathcal{V}_j$ (*inscatolamento*);
3. $i \in \mathcal{V}_{i+1} \setminus \mathcal{V}_i$ (*gerarchia vera e propria*);
4. da $i = 3$ in poi, $\mathcal{V}_i$ ha fra i suoi elementi dei non-numeri. □

Esercizio: Mostrare che per i, j in $\mathbb{N}$:

1.
2.
3. □

$\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$

Esercizio: Mostrare che per ogni i in $\mathbb{N}$:

1. $\mathcal{V}_i \in \mathcal{V}_{i+1}$;
2. $\mathcal{V}_i \supset \bigcup_{j<i} \mathcal{V}_j$ (*inscatolamento*);
3. $i \in \mathcal{V}_{i+1} \setminus \mathcal{V}_i$ (*gerarchia vera e propria*);
4. da $i = 3$ in poi, $\mathcal{V}_i$ ha fra i suoi elementi dei non-numeri. □

Esercizio: Mostrare che per i, j in $\mathbb{N}$:

1. $i \in j \quad \leftrightarrow \quad i \subsetneq j$;
2.
3. □

$\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$

Esercizio: Mostrare che per ogni i in $\mathbb{N}$:

1. $\mathcal{V}_i \in \mathcal{V}_{i+1}$;
2. $\mathcal{V}_i \supset \bigcup_{j<i} \mathcal{V}_j$ (*inscatolamento*);
3. $i \in \mathcal{V}_{i+1} \setminus \mathcal{V}_i$ (*gerarchia vera e propria*);
4. da $i = 3$ in poi, $\mathcal{V}_i$ ha fra i suoi elementi dei non-numeri. □

Esercizio: Mostrare che per i, j in $\mathbb{N}$:

1. $i \in j \quad \leftrightarrow \quad i \subsetneq j$;
2. $i \in j \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{V}_i \subsetneq \mathcal{V}_j$;
3. □

$\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$

Esercizio: Mostrare che per ogni i in $\mathbb{N}$:

1. $\mathcal{V}_i \in \mathcal{V}_{i+1}$;
2. $\mathcal{V}_i \supset \bigcup_{j<i} \mathcal{V}_j$ (*inscatolamento*);
3. $i \in \mathcal{V}_{i+1} \setminus \mathcal{V}_i$ (*gerarchia vera e propria*);
4. da $i = 3$ in poi, $\mathcal{V}_i$ ha fra i suoi elementi dei non-numeri. □

Esercizio: Mostrare che per i, j in $\mathbb{N}$:

1. $i \in j \quad \leftrightarrow \quad i \subsetneq j$;
2. $i \in j \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{V}_i \subsetneq \mathcal{V}_j$;
3. $\mathcal{V}_i \in \mathcal{V}_j \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{V}_i \subsetneq \mathcal{V}_j$. □

$\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$

Definizione:

La **gerarchia cumulativa** $\mathcal{V}_\omega$ degli insiemi **ereditariamente finiti** puri ('puri' nel senso che nella loro formazione non intervengono altro che insiemi, tutti in ultima analisi fondati sullo $\varnothing$) è costituita da tutti gli insiemi che entrano a far parte di $\mathcal{V}_i$ dopo un numero finito di passi della precedente costruzione:

$$\begin{aligned} \omega &=_{\text{Def}} \mathbb{N} =_{\text{Def}} \{0, 1, 2, \dots\} \\ \mathcal{V}_\omega &=_{\text{Def}} \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3 \cup \cdots \end{aligned}$$

(*ad infinitum*).

□

$\rightsquigarrow$

Definizione:

La **gerarchia cumulativa** $\mathcal{V}_\omega$ degli insiemi **ereditariamente finiti** puri ('puri' nel senso che nella loro formazione non intervengono altro che insiemi, tutti in ultima analisi fondati sullo $\varnothing$) è costituita da tutti gli insiemi che entrano a far parte di $\mathcal{V}_i$ dopo un numero finito di passi della precedente costruzione:

$$\begin{aligned} \omega &=_{\text{Def}} \mathbb{N} =_{\text{Def}} \{0, 1, 2, \dots\} \\ \mathcal{V}_\omega &=_{\text{Def}} \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_3 \cup \cdots \end{aligned}$$

(*ad infinitum*).

Si chiama **rango** di x, per ciascun x in $\mathcal{V}_\omega$, il primo degli i per cui x appartiene a $\mathcal{V}_{i+1}$ (ossia x è incluso in $\mathcal{V}_i$). □

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esercizio:

- Mostrare che su $\mathcal{V}_\omega$ la relazione $\in$ non forma alcuna '*catena discendente*'

$$\cdots \in x_2 \in x_1 \in x_0$$

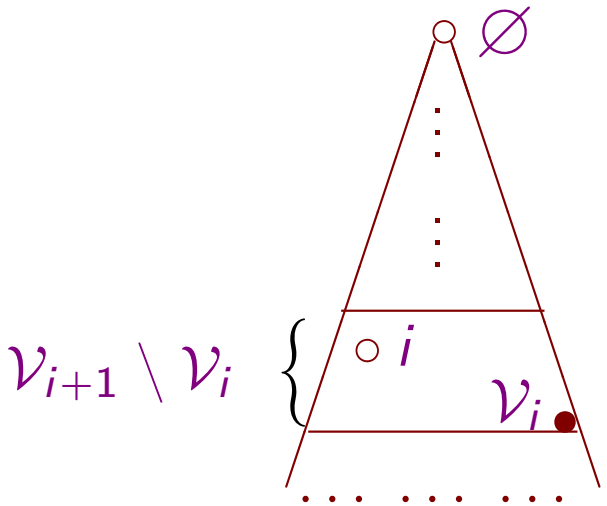
di lunghezza infinita (con o senza x_j ripetuti).

Esercizio:

- Mostrare che su $\mathcal{V}_\omega$ la relazione $\in$ non forma alcuna '*catena discendente*'

$$\cdots \in x_2 \in x_1 \in x_0$$

di lunghezza infinita (con o senza x_j ripetuti).



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esempi: Ogni numero i ha rango i; il rango di $\{0, 2\}$ è 3 .

Esempi: Ogni numero i ha rango i; il rango di $\{0, 2\}$ è 3 .

Possiamo vedere il rango di un insieme come una misura di quanto profondamente vi è rannidato lo $\varnothing$ quando esso viene scritto nella notazione primitiva—ad esempio $\{0, 2\}$ dev'essere riscritto come $\Big\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\Big\}$.

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esempi: Ogni numero i ha rango i; il rango di $\{0, 2\}$ è 3 .

Possiamo vedere il rango di un insieme come una misura di quanto profondamente vi è rannidato lo $\varnothing$ quando esso viene scritto nella notazione primitiva—ad esempio $\{0, 2\}$ dev'essere riscritto come $\Big\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\Big\}$.

La seguente formuletta ricorsiva ci permette di determinare il rango di qualsiasi insieme X in $\mathcal{V}_\omega$:

$$\mathsf{rk}(X) \;=\; \bigcup \Big\{ \mathsf{rk}(y) \cup \big\{\mathsf{rk}(y)\big\} : y \in X \Big\}.$$

$$\check{X} \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \sum_{y \in X} 2^{\check{y}} \, .$$

$$\check{X} \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \sum_{y \in X} 2^{\check{y}} \, .$$

Esercizio

Questa formula definisce davvero una funzione da $\mathcal{V}_\omega$ in $\mathbb{N}$?

$$\check{X} \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \sum_{y \in X} 2^{\check{y}} \,.$$

Esercizio

Questa formula definisce davvero una funzione da $\mathcal{V}_\omega$ in $\mathbb{N}$?

- mostrare che $x \mapsto \check{x}$ è suriettiva. . .

$$\check{X} \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \sum_{y \in X} 2^{\check{y}} \, .$$

Esercizio

Questa formula definisce davvero una funzione da $\mathcal{V}_\omega$ in $\mathbb{N}$?

- mostrare che $x \mapsto \check{x}$ è suriettiva...
- ...iniettiva...

$$\check{X} \quad =_{\text{Def}} \quad \sum_{y \in X} 2^{\check{y}} \,.$$

Esercizio

Questa formula definisce davvero una funzione da $\mathcal{V}_\omega$ in $\mathbb{N}$?

- mostrare che $x \mapsto \check{x}$ è suriettiva...
- ...iniettiva...
- ...induce su $\mathcal{V}_\omega$ l'ordinamento (anti-)lessicografico — che dunque è buono e compatibile col confronto tra ranghi.

$$\check{X} \quad =_{\text{Def}} \quad \sum_{y \in X} 2^{\check{y}} \,.$$

Esercizio

Questa formula definisce davvero una funzione da $\mathcal{V}_\omega$ in $\mathbb{N}$?

- mostrare che $x \mapsto \check{x}$ è suriettiva. . .
- . . . iniettiva. . .
- . . . induce su $\mathcal{V}_\omega$ l'ordinamento (anti-)lessicografico — che dunque è buono e compatibile col confronto tra ranghi.

In quest'ottica numerica naturale, che relazione è $\in$?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

L'ordinamento di Ackermann

$$\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\{\varnothing\}\},\ \{\varnothing,\{\varnothing\}\},\ \big\{\{\{\varnothing\}\}\big\},\ \big\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\big\},\ \big\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\big\},\ldots$$

ci suggerisce l'inversa

$$p \ \mapsto \ \widehat{p}\,.$$

della $\check{}$, che va da $\mathbb{N}$ agli insiemi ereditariamente finiti puri.

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

L'ordinamento di Ackermann

$$\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\{\varnothing\}\},\ \{\varnothing,\{\varnothing\}\},\ \Big\{\{\{\varnothing\}\}\Big\},\ \Big\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\Big\},\ \Big\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\Big\},\ldots$$

ci suggerisce l'inversa

$$p \ \mapsto\ \widehat{p}\,.$$

della $\check{}$, che va da $\mathbb{N}$ agli insiemi ereditariamente finiti puri.

Ad es., $0, 1, 2, 3$ e 4 sono le *posizioni* che competono ai rispettivi insiemi $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ e $\Big\{\{\{\varnothing\}\}\Big\}$, in quanto che

$$\widehat{0}=\varnothing\,,\ \widehat{1}=\{\varnothing\}\,,\ \widehat{2}=\{\{\varnothing\}\}\,,\ \widehat{3}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\ \widehat{4}=\Big\{\{\{\varnothing\}\}\Big\}\,,$$

e cosí via.

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

L'ordinamento di Ackermann

$$\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\{\varnothing\}\},\ \{\varnothing,\{\varnothing\}\},\ \Big\{\{\{\varnothing\}\}\Big\},\ \Big\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\Big\},\ \Big\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\Big\},\ldots$$

ci suggerisce l'inversa

$$p \ \mapsto\ \widehat{p}\,.$$

della $\widehat{\ }$, che va da $\mathbb{N}$ agli insiemi ereditariamente finiti puri.

Ad es., $0, 1, 2, 3$ e 4 sono le *posizioni* che competono ai rispettivi insiemi $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ e $\Big\{\{\{\varnothing\}\}\Big\}$, in quanto che

$$\widehat{0}=\varnothing\,,\ \widehat{1}=\{\varnothing\}\,,\ \widehat{2}=\{\{\varnothing\}\}\,,\ \widehat{3}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\ \widehat{4}=\Big\{\{\{\varnothing\}\}\Big\}\,,$$

e cosí via.
Sulla scorta di questa corrispondenza, possiamo chiederci in quali relazioni e operazioni numeriche si traducano le relaz. e le operaz. insiemistiche basilari. Una parziale risposta

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

$\rightsquigarrow$

Una parziale risposta viene dalla seg. tabella:

$\widehat{q} \lhd \widehat{p}$	$q < p$
$\widehat{q} \in \widehat{p}$	$\lfloor p/2^q \rfloor$ è dispari

$\rightsquigarrow$

Una parziale risposta viene dalla seg. tabella:

$\widehat{q} \lhd \widehat{p}$	$q < p$
$\widehat{q} \in \widehat{p}$	$\lfloor p/2^q \rfloor$ è dispari
$\varnothing$	0
$\{\widehat{p}\}$	2^p
$\widehat{p} \cup \widehat{q}$	$p + q$ quando $\widehat{p} \cap \widehat{q} = \varnothing$
$\widehat{p} \setminus \widehat{q}$	$p - q$ quando $\widehat{p} \subseteq \widehat{q}$
$\max\ \widehat{p}$	$\lfloor \log_2 p \rfloor$
$\langle \widehat{p}, \widehat{q} \rangle$	$(1 + 2^{2^p}) \cdot (\text{if } p = q \text{ then } 1 \text{ else } 2^{2^q} \text{ fi})$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Aspirare alla completezza:
a quale scopo ?

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Ora che la via per un confronto fra le due teorie è spianata, risulta

MENO plausible che la teoria di Vaught sia *contraddittoria* ;

Ora che la via per un confronto fra le due teorie è spianata, risulta

MENO plausible che la teoria di Vaught sia *contraddittoria* ;

PIÚ plausibile ch'essa sia ***incompleta***, nella duplice accezione:

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{W}) \subsetneq \mathsf{Th}(\{\mathcal{V}_\omega\}),$$

Ora che la via per un confronto fra le due teorie è spianata, risulta

MENO plausible che la teoria di Vaught sia *contraddittoria* ;

PIÚ plausibile ch'essa sia ***incompleta***, nella duplice accezione:

$$\begin{aligned} \mathsf{Cn}(\mathcal{W}) &\subsetneq \mathsf{Th}(\{\mathcal{V}_\omega\}) , \\ \{\rho \text{ in } \mathcal{E} \mid \mathcal{W} \models \neg\rho\} \cup \mathsf{Cn}(\mathcal{W}) &\subsetneq \mathcal{E} . \end{aligned}$$

Ora che la via per un confronto fra le due teorie è spianata, risulta

MENO plausible che la teoria di Vaught sia *contraddittoria* ;

PIÚ plausibile ch'essa sia ***incompleta***, nella duplice accezione:

$$\begin{aligned} \mathsf{Cn}(\mathcal{W}) &\subsetneq \mathsf{Th}(\{\mathcal{V}_\omega\}) , \\ \{\rho \text{ in } \mathcal{E} \mid \mathcal{W} \models \neg\rho\} \cup \mathsf{Cn}(\mathcal{W}) &\subsetneq \mathcal{E} . \end{aligned}$$

(Gli enunciati che non si possono né refutare né dimostrare vengono spesso chiamati ***indecidibili***).

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Aggiungiamo il solito postulato tipico delle teorie degli insiemi *puri*, l'***assioma di estensionalità***

‖ "non ci sono due insiemi con gli stessi elementi":

$$\forall x \forall y \Big(\quad \forall u \, (u \in x \leftrightarrow u \in y) \quad \rightarrow \quad x = y \quad \Big) .$$

Aggiungiamo il solito postulato tipico delle teorie degli insiemi *puri*, l'***assioma di estensionalità***

> "non ci sono due insiemi con gli stessi elementi":

$$\forall x \, \forall y \Big(\quad \forall u \, \big(u \in x \;\leftrightarrow\; u \in y \big) \quad \rightarrow \quad x = y \quad \Big) .$$

Aggiungiamo anche lo *schema d'induzione* secondo cui

> "quando lo $\varnothing$ gode di una certa proprietà $\boldsymbol{\gamma}$ e quando di tale $\boldsymbol{\gamma}$ gode anche qualsiasi insieme della forma $\boldsymbol{x} \cup \{ \boldsymbol{e} \}$ che abbia $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{e}$ soddisfacenti $\boldsymbol{\gamma}$, allora tutti gli insiemi godono di $\boldsymbol{\gamma}$":

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Aggiungiamo il solito postulato tipico delle teorie degli insiemi *puri*, l'***assioma di estensionalità***

> "non ci sono due insiemi con gli stessi elementi":

$$\forall x \forall y \Big(\quad \forall u \, (u \in x \leftrightarrow u \in y) \quad \rightarrow \quad x = y \quad \Big) .$$

Aggiungiamo anche lo *schema d'induzione* secondo cui

> "quando lo $\emptyset$ gode di una certa proprietà γ e quando di tale γ gode anche qualsiasi insieme della forma $x \cup \{ e \}$ che abbia x ed e soddisfacenti γ , allora tutti gli insiemi godono di γ":

$$\forall z \Big(\forall v \, v \notin z \rightarrow \gamma(z) \Big) \rightarrow$$

$$\forall x \forall e \forall w \Big(\forall u \, (u \in w \leftrightarrow u \in x \vee u = e) \rightarrow \gamma(x) \rightarrow \gamma(e) \rightarrow \gamma(w) \Big)$$

$$\rightarrow \forall x \, \gamma(x) .$$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Vien naturale chiedersi:

- La teoria di Peano è ***completa***, nel senso che

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{P}) \quad = \quad \mathsf{Th}(\{\mathcal{N}\}),$$

ove $\mathcal{N}$ è la struttura 'standard'

$$\mathcal{N} \quad = \quad (\mathbb{N}, 0, s, +, \cdot, \leqslant),$$

in cui $x \overset{s}{\mapsto} x + 1$ ecc.?

Vien naturale chiedersi:

- La teoria di Peano è ***completa***, nel senso che

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{P}) \quad = \quad \mathsf{Th}(\{\mathcal{N}\}),$$

ove $\mathcal{N}$ è la struttura 'standard'

$$\mathcal{N} \quad = \quad (\mathbb{N}, 0, s, +, \cdot, \leqslant),$$

in cui $x \overset{s}{\mapsto} x+1$ ecc.?

- Dopo l'arricchimento assiomatico $\bar{\mathcal{W}}$ ora proposto, la teoria di Vaught è ***completa***, nel senso che

$$\mathsf{Cn}(\bar{\mathcal{W}}) \quad = \quad \mathsf{Th}(\{\mathcal{V}_\omega\})\,?$$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Perché interrogarsi sulla completezza ?

'Catturare' un modello privilegiato $\mathfrak{I}$ tramite assiomi propri $\mathcal{A}$ t.c.

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{A}) \;=\; \mathsf{Th}(\{\mathfrak{I}\}),$$

ci permette

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Perché interrogarsi sulla completezza ?

'Catturare' un modello privilegiato $\mathfrak{I}$ tramite assiomi propri $\mathcal{A}$ t.c.

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{A}) \;=\; \mathsf{Th}(\{\mathfrak{I}\}),$$

ci permette di ottenere dal ***teorema di enumerabilità***

> "tutte le conseguenze di un insieme decidibile di enunciati possono venire elencate in modo effettivo"

un procedimento

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Perché interrogarsi sulla completezza ?

'Catturare' un modello privilegiato $\mathfrak{I}$ tramite assiomi propri $\mathcal{A}$ t.c.

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{A}) \;=\; \mathsf{Th}(\{\mathfrak{I}\}),$$

ci permette di ottenere dal ***teorema di enumerabilità***

> "tutte le conseguenze di un insieme decidibile di enunciati possono venire elencate in modo effettivo"

un procedimento per accertare quale sia lo status di qualsiasi congettura ϑ.

Come ?

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Perché interrogarsi sulla completezza ?

'Catturare' un modello privilegiato $\mathfrak{I}$ tramite assiomi propri $\mathcal{A}$ t.c.

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{A}) \;=\; \mathsf{Th}(\{\mathfrak{I}\}),$$

ci permette di ottenere dal ***teorema di enumerabilità***

> "tutte le conseguenze di un insieme decidibile di enunciati possono venire elencate in modo effettivo"

un procedimento per accertare quale sia lo status di qualsiasi congettura ϑ.

Come ?

Basta interfogliare la ricerca di una

DIMOSTRAZIONE di ϑ con quella di una sua

REFUTAZIONE, ossia dim. di $\neg\,\vartheta$.

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

‘Patologia’ della indecidibilità essenziale

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Definizione

Una teoria Γ si dice ***indecidibile*** se non è computabile la funzione che riconosce fra gli enunciati del suo linguaggio quali stiano in Γ e quali no.

Definizione

Una teoria Γ si dice ***indecidibile*** se non è computabile la funzione che riconosce fra gli enunciati del suo linguaggio quali stiano in Γ e quali no.

Definizione

Una teoria Γ si dice ***essenzialmente indecidibile*** se è indecidibile tanto Γ che qualunque sua estensione non-contraddittoria.

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

La teoria di Vaught,

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{W})$$

è *essenzialmente indecidibile*; di conseguenza

La teoria di Vaught,

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{W})$$

è *essenzialmente indecidibile*; di conseguenza è indecidibile—sempre che non sia, ancor peggio, contraddittoria—tanto

La teoria di Vaught,

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{W})$$

è *essenzialmente indecidibile*; di conseguenza è indecidibile—sempre che non sia, ancor peggio, contraddittoria—tanto

- il suo supposto completamento $\mathsf{Cn}(\bar{\mathcal{W}})$ che

La teoria di Vaught,

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{W})$$

è *essenzialmente indecidibile*; di conseguenza è indecidibile—sempre che non sia, ancor peggio, contraddittoria—tanto

- il suo supposto completamento $\mathsf{Cn}(\bar{\mathcal{W}})$ che
- la classica teoria degli insiemi ZF di Zermelo-Fraenkel.

Teorema di Gödel–Rosser

Sia $\mathcal{Q}$ l'insieme finito di assiomi che si ottiene lasciando cadere da $\mathcal{P}$ lo schema d'induzione.

Teorema di Gödel–Rosser

Sia $\mathcal{Q}$ l'insieme finito di assiomi che si ottiene lasciando cadere da $\mathcal{P}$ lo schema d'induzione.

Teorema [Davis(1993), Capitolo 4]

Nessuna teoria Γ assiomatizzabile e non-contraddittoria può

includere $\mathcal{Q}$ ed essere completa .

Teorema di Gödel–Rosser

Sia $\mathcal{Q}$ l'insieme finito di assiomi che si ottiene lasciando cadere da $\mathcal{P}$ lo schema d'induzione.

Teorema [Davis(1993), Capitolo 4]

Nessuna teoria Γ assiomatizzabile e non-contraddittoria può

includere $\mathcal{Q}$ ed essere completa .

Corollari

- $\mathcal{P}$ è incompleta (o contraddittoria);

Teorema di Gödel–Rosser

Sia $\mathcal{Q}$ l'insieme finito di assiomi che si ottiene lasciando cadere da $\mathcal{P}$ lo schema d'induzione.

Teorema [Davis(1993), Capitolo 4]

Nessuna teoria Γ assiomatizzabile e non-contraddittoria può

includere $\mathcal{Q}$ ed essere completa .

Corollari

- $\mathcal{P}$ è incompleta (o contraddittoria);
- $\mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\})$ non è assiomatizzabile.

Esercizio:

1. Individuare un modello per la teoria

$$\mathsf{Cn}(\mathcal{Z})$$

   di cui [Davis(1993), pag. 41] fornisce gli assiomi.

2. Che ci dice, in merito a questa, il teor. di Gödel–Rosser ?

L'aritmetica dei naturali ha *Entscheidungsproblem* insolubile

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Può la funzione

$$\vartheta \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } \vartheta \in \mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\}), \\ 0 & \text{se } \vartheta \notin \mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\}), \end{cases}$$

definita per ogni ϑ del linguaggio di Peano, essere computabile ?

Può la funzione

$$\vartheta \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } \vartheta \in \mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\}), \\ 0 & \text{se } \vartheta \notin \mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\}), \end{cases}$$

definita per ogni ϑ del linguaggio di Peano, essere computabile ?

Se cosí fosse, potremmo rispondere fra l'altro ai quesiti di forma

$$\exists\, x_1 \cdots \exists\, x_m$$

$$P_0(\underline{\boldsymbol{a}_1}, \ldots, \underline{\boldsymbol{a}_n}, x_1, \ldots, x_m) \stackrel{?}{=} P_1(\underline{\boldsymbol{a}_1}, \ldots, \underline{\boldsymbol{a}_n}, x_1, \ldots, x_m)$$

con:

Può la funzione

$$\vartheta \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } \vartheta \in \mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\}), \\ 0 & \text{se } \vartheta \notin \mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\}), \end{cases}$$

definita per ogni ϑ del linguaggio di Peano, essere computabile ?

Se cosí fosse, potremmo rispondere fra l'altro ai quesiti di forma

$$\exists\, x_1 \cdots \exists\, x_m$$

$$P_0(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, x_1, \ldots, x_m) \stackrel{?}{=} P_1(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, x_1, \ldots, x_m)$$

con:

- $P_b(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m)$ polinomio a coefficienti in $\mathbb{N}$ per $b = 0, 1$,

Può la funzione

$$\vartheta \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } \vartheta \in \mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\}), \\ 0 & \text{se } \vartheta \notin \mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\}), \end{cases}$$

definita per ogni ϑ del linguaggio di Peano, essere computabile ?

Se cosí fosse, potremmo rispondere fra l'altro ai quesiti di forma

$$\exists\, x_1 \cdots \exists\, x_m$$

$$P_0(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, x_1, \ldots, x_m) \stackrel{?}{=} P_1(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, x_1, \ldots, x_m)$$

con:

- $P_b(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m)$ polinomio a coefficienti in $\mathbb{N}$ per $b = 0, 1$,
- $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m$ variabili,

Può la funzione

$$\vartheta \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } \vartheta \in \mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\}), \\ 0 & \text{se } \vartheta \notin \mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\}), \end{cases}$$

definita per ogni ϑ del linguaggio di Peano, essere computabile ?

Se cosí fosse, potremmo rispondere fra l'altro ai quesiti di forma

$$\exists\, x_1 \cdots \exists\, x_m$$

$$P_0(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, x_1, \ldots, x_m) \stackrel{?}{=} P_1(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, x_1, \ldots, x_m)$$

con:

- $P_b(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m)$ polinomio a coefficienti in $\mathbb{N}$ per $b = 0, 1$,
- $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m$ variabili,
- ciascun $\underline{a_i}$ numerale della forma $\underbrace{s \cdots s}_{a_i \text{ volte}} 0$,

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

$\mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\})$ HA *Entscheidungsproblem* RISOLUBILE ?

Può la funzione

$$\vartheta \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } \vartheta \in \mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\}), \\ 0 & \text{se } \vartheta \notin \mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\}), \end{cases}$$

definita per ogni ϑ del linguaggio di Peano, essere computabile ?

Se cosí fosse, potremmo rispondere fra l'altro ai quesiti di forma

$$\exists\, x_1 \cdots \exists\, x_m$$

$$P_0(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, x_1, \ldots, x_m) \stackrel{?}{=} P_1(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, x_1, \ldots, x_m)$$

con:

- $P_b(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m)$ polinomio a coefficienti in $\mathbb{N}$ per $b = 0, 1$,
- $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m$ variabili,
- ciascun $\underline{a_i}$ numerale della forma $\underbrace{s \cdots s}_{a_i \text{ volte}}\, 0$,
- e i coefficienti dei polinomi rappresentati come numerali.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Questo articolo del 1961:

Annals of Mathematics
Vol. 74, No. 3, November, 1961
Printed in Japan

THE DECISION PROBLEM FOR EXPONENTIAL DIOPHANTINE EQUATIONS

By Martin Davis[1], Hilary Putnam[1], and Julia Robinson

(Received July 26, 1960)

1. Introduction

We prove that every recursively enumerable set can be existentially defined in terms of exponentiation. Hence, there is no general algorithm for deciding whether or not an exponential diophantine equation has a solution in positive integers. We also obtain a general theorem about bounds for solutions of diophantine equations with a finite number of solutions[2].

arricchisce

Questo articolo del 1961:

Annals of Mathematics
Vol. 74, No. 3, November, 1961
Printed in Japan

THE DECISION PROBLEM FOR EXPONENTIAL DIOPHANTINE EQUATIONS

By Martin Davis[1], Hilary Putnam[1], and Julia Robinson

(Received July 26, 1960)

1. Introduction

We prove that every recursively enumerable set can be existentially defined in terms of exponentiation. Hence, there is no general algorithm for deciding whether or not an exponential diophantine equation has a solution in positive integers. We also obtain a general theorem about bounds for solutions of diophantine equations with a finite number of solutions[2].

arricchisce il linguaggio dell'aritmetica con il costrutto di esponenziazione (col che le variabili possono apparire anche ad esponente nei 'polinomi').

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

In tale articolo, Davis & Putnam & Robinson riescono a tradurre ogni istanza del problema

$$\exists\, y\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \stackrel{?}{=} y\,,$$

con $\boldsymbol{g}$ funzione parzialmente computabile, nel problema di risolvere un'equazione simile a quella vista sopra, nella quale però P_0 e P_1 sono polinomi diofantei *esponenziali*.

In tale articolo, Davis & Putnam & Robinson riescono a tradurre ogni istanza del problema

$$\exists\, y\ g(a_1, \ldots, a_n) \stackrel{?}{=} y\,,$$

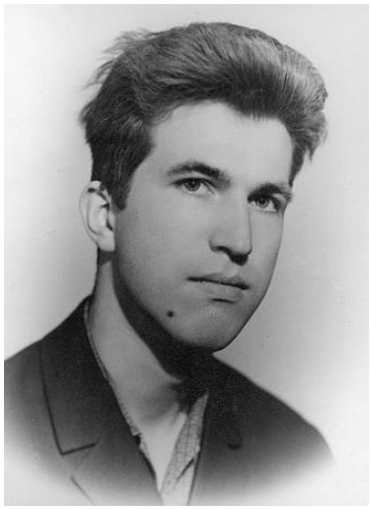
con g funzione parzialmente computabile, nel problema di risolvere un'equazione simile a quella vista sopra, nella quale però P_0 e P_1 sono polinomi diofantei *esponenziali*.

Ma allora:

Corollario del teorema DPR:

$$\mathrm{Th}(\{\mathcal{N}^{**}\})\,,$$

dove $\mathcal{N}^{**}$ risulta dall'aggiunta dell'esponenziazione ad $\mathcal{N}$, ha *Entscheidungsproblem* insolubile !



Nel 1970, il 22-enne Yuri Vladimirovich Matiyasevich dimostra che c'è un polinomio

$$E(a, b, c, u_1, \ldots, u_k)$$

a coefficienti in $\mathbb{Z}$ tale che per a, b, c in $\mathbb{N}$:

$a^b = c$ sse l'equaz. $E(a, b, c, u_1, \ldots, u_k) = 0$ ha soluzione $u_1, \ldots, u_k$ su $\mathbb{N}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Assodato che l'esponenziazione ammette una specifica polinomiale, possiamo ora eliminarla dal teorema DPR:

Teorema DPRM:

Si può tradurre ogni istanza del problema

$$\exists\, y\ g(a_1, \ldots, a_n) \stackrel{?}{=} y\,,$$

con g funzione parzialmente computabile, nel problema . . .

che dunque è insolubile.

Assodato che l'esponenziazione ammette una specifica polinomiale, possiamo ora eliminarla dal teorema DPR:

Teorema DPRM:

Si può tradurre ogni istanza del problema

$$\exists\, y\; g(a_1, \ldots, a_n) \stackrel{?}{=} y\,,$$

con g funzione parzialmente computabile, nel problema della risolubilità su $\mathbb{N}$ di un'equazione diofantea polinomiale

$$\exists\, x_1 \cdots \exists\, x_m$$

$$P_0(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, x_1, \ldots, x_m) \stackrel{?}{=} P_1(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n}, x_1, \ldots, x_m)$$

del tipo descritto sopra — che dunque è insolubile.

A maggior ragione:

Corollario del teorema DPRM:

La teoria

$$\mathrm{Th}(\{\mathcal{N}\})$$

ha *Entscheidungsproblem* insolubile !

Non tutto è patologico:
Aritmetiche di Presburger,
di Tarski, ...

··· A SEGUIRE ···

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Riferimenti bibliografici


Martin Davis.
Lecture Notes in Logic.
1993.


Martin D. Davis, Ron Sigal, and Elaine J. Weyuker.
Computability, complexity, and languages - Fundamentals of theoretical computer science.
Computer Science ad scientific computing. Academic Press, 1994.


A. Tarski and S. Givant.
A formalization of Set Theory without variables, volume 41 of *Colloquium Publications*.
American Mathematical Society, 1987.