

Università di Trieste, Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Esame di Analisi 3 mod. A (LT in Matematica)

Trieste, 4 febbraio 2013

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n + n^4 x^2}$$

sull'intervallo $[0, +\infty[$.

- (i) La successione converge puntualmente? A quale limite?
- (ii) La successione converge uniformemente?
- (ii) L'insieme $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è limitato in $(\mathcal{C}([0, +\infty[), d_{\text{sup}})$? È totalmente limitato?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, xy(x + y - \frac{17}{4}) = -1\}$.

- i) Si dica, giustificando la risposta, se Γ è chiuso.
- ii) Si dica, giustificando la risposta, se Γ è compatto.
- iii) Si dica in quali punti Γ è localmente grafico di una funzione delle variabile x o y .
- iv) Si calcolino i punti di minima e massima distanza di Γ dall'origine (dare per scontato che il sistema

$$\begin{cases} xy(x + y - \frac{17}{4}) = -1 \\ x^2 + 3xy + y^2 - \frac{17}{4}(x + y) = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni nel primo quadrante).

Esercizio 3.

- i) Si trovino tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} u' = 2tu^2 \\ u(0) = a \end{cases}$$

al variare di a in \mathbb{R} .

- ii) Si determinino le soluzioni costanti dell'equazione differenziale $u' = 2tu^2 \sin u$.
- iii) Si provi che per ogni a in \mathbb{R} le soluzioni massimali di

$$\begin{cases} u' = 2tu^2 \sin u \\ u(0) = a \end{cases}$$

sono definite su tutto \mathbb{R} e se ne calcoli, al variare di a in \mathbb{R} il limite per $t \rightarrow +\infty$.