Università di Trieste, Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Esame di Analisi 3 mod. A (LT in Matematica)

Trieste, 18 febbraio 2013

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x, y, z) = z^2 + xy + xz + yz.$$

i) Si determinino i punti stazionari di f e se ne discuta la natura.

ii) Si determinino $\inf f(\mathbb{R}^3)$ e $\sup f(\mathbb{R}^3)$.

iii) Si trovino il massimo e il minimo di f sul vincolo

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y = 0\}.$$

Esercizio 2. Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + (x - n)^2}.$$

i) Si dica se converge puntualmente.

ii) Si dica se converge totalmente.

ii) Si dica se converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si verifichi che l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \cos y + \log(1 + y) + \int_0^{xy} e^{t^2}\, dt = 0\}$$

è localmente grafico di una funzione della variabile x in un intorno del punto $(0, 0)$. Si calcoli l'approssimante lineare di tale funzione nel punto 0.

Esercizio 4. Si consideri l'equazione differenziale

$$u' + (u^2 + u)2t \sin t = 0$$

i) Se ne determino le soluzioni costanti.

ii) Si determini la soluzione tale che $u(0) = 1$.

iii) Si provi che la soluzione tale che $u(0) = -\frac{1}{2}$ ha infiniti punti di massimo e di minimo locale.