Università di Trieste, Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Esame di Analisi 3 mod. A (LT in Matematica)

Trieste, 12 settembre 2013

Esercizio 1. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n + x^2\sqrt{n}}}.$$

i) Si determini l'insieme di convergenza.

ii) Si provi che la convergenza è uniforme su tutto l'insieme di convergenza.

iii) Detta $s(x)$ la funzione somma della serie, si provi che $s(x)$ è una funzione continua.

iv) $s(x)$ è anche derivabile?.

Esercizio 2. Si consideri funzione

$$f(x,y) = (x + y^2 - 2)(x - 1).$$

i) Si determini in gradiente e i punti critici di f.

ii) Si determini la matrice hessiana di f e si discuta la natura dei punti critici.

iii) Si determinino massimo e minimo di f sull'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}.$$

Esercizio 3. Si consideri l'equazione differenziale

$$u''' - 3u' + 2u = 0.$$

i) Si determini lo spazio delle soluzioni.

ii) Si determini la funzione $g(t)$ in modo che la funzione $te^t - t\sin t$ sia una soluzione dell'equazione differenziale

$$u''' - 3u' + 2u = g(t).$$

iii) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''' - 3u' + 2u = g(t), \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 1, \\ u''(0) = 0, \end{cases}$$

dove $g(t)$ è la funzione al punto precedente.