Università di Trieste, Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Esame di Analisi 3 mod. A (LT in Matematica)

Trieste, 23 gennaio 2014

Esercizio 1.

i) Si consideri, per $n \geq 1$, la funzione $f_n(x) = n(e^{\frac{\sin x}{n}} - 1)$. Si dica se e dove la successione di funzioni (f_n) converge puntualmente. Si dica se e dove la convergenza è uniforme.

ii) Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisca, per $n \geq 1$, la funzione $\tilde{f}_n(x) = n(e^{\frac{\varphi(x)}{n}} - 1)$. Si dica se e dove la successione di funzioni (f_n) converge puntualmente. Si dica se e dove la convergenza è uniforme.

Esercizio 2.

i) Si provi che, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si ha

$$|xy^2z| \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

ii) Si calcoli $\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} xy^2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

iii) Per $f(x, y, z) = xy^2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}$ si determinino punti e valori di massimo e minimo su $\mathbb{R}^3$.

iv) Per f come al punto precedente si determinino punti e valori di massimo e minimo sull'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Esercizio 3.

i) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = t(u - 1), \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

ii) Si indichi con $u_a :]\alpha_a, \beta_a[\to \mathbb{R}$ la soluzione massimale di

$$\begin{cases} u' = t\sin(u - 1), \\ u(0) = a. \end{cases}$$

Si dica se esiste ed eventualmente si calcoli il $\lim_{t\to\beta_a} u_a(t)$ al variare di a in $\mathbb{R}$.