Università di Trieste, Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Esame di Analisi 3 mod. A (6 CFU - LT in Matematica)

Trieste, 11 febbraio 2014

Esercizio 1. Si consideri $C([0,1])$, lo spazio delle funzioni continue su $[0,1]$ con la norma $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Sia Φ la funzione $\Phi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ così definita

$$\Phi(f) = \int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

i) Si dica se Φ è lineare.

ii) Si dica se Φ è continua.

iii) Detto φ un elemento di $C([0,1])$ con norma 1, si calcoli $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(f)$.

Esercizio 2. Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n \sqrt{n}} \sin \frac{1}{x^2 \sqrt{n}}.$$

i) Si dica se e dove converge puntualmente.

ii) Si dica se sull'insieme $[2,+\infty[$ la convergenza è anche uniforme.

Esercizio 3. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y,z) = (x^2 + y^2 - z,\ x + y + z).$$

Sia $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (0,0)\}$.

i) Si provi che Γ è compatto.

ii) Si dica in quali punti Γ è localmente grafico di una funzione da un intervallo di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$.

iii) Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y,z) = z$. Si determini $\max\limits_{(x,y,z)\in\Gamma} \varphi$ e $\min\limits_{(x,y,z)\in\Gamma} \varphi$ (sugg.: può essere utile il teorema dei moltiplicatori di Lagrange).

Esercizio 4. Si consideri l'equazione differenziale

$$u' + (u^3 - u)\cos t = 0$$

i) Si determini la soluzione tale che $u(0) = 1$.

ii) Si determini la soluzione tale che $u(0) = 2$.

ii) Si provi che la soluzione tale che $u(0) \in]0,1[$ ha infiniti punti di massimo e di minimo locale.