

Università di Trieste, Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Esame di Analisi 3 mod. A (6 CFU - LT in Matematica)

Trieste, 23 settembre 2014

**Esercizio 1.** Si consideri, per  $n \geq 2$

$$f_n(x) = n \log\left(1 + \frac{\cos x}{n}\right).$$

- i) Si provi che la successione  $(f_n)_n$  converge puntualmente e se ne calcoli la funzione limite.
- ii) Sapendo che esiste  $\delta_0 > 0$  tale che, per ogni  $|y| < \delta_0$ , si ha

$$\left| \frac{\log(1+y) - y}{y^2} \right| < 1,$$

si provi che la convergenza è uniforme.

**Esercizio 2.** Si consideri l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, xy^2 + yx^2 = 1\}.$$

- i) Si calcoli

$$\min_{(x,y) \in E} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- ii) Si dica se l'insieme  $E$  è il grafico di una funzione  $\phi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , eventualmente determinando  $a$  e  $b$ . Qual è la regolarità della funzione  $\phi$ ? (sugg. Può essere utile studiare l'intersezione di  $E$  con le rette di equazione  $y = cx$ , per  $c > 0$ .)

**Esercizio 3.** Si consideri l'equazione differenziale

$$u' - (u^3 + u)e^{-t} = 0$$

- i) Si determini la soluzione tale che  $u(0) = 0$ .
- ii) Si determini la soluzione tale che  $u(0) = 1$ .