

Anno Accademico 2016/17

Corso di Analisi 3, modulo A

Titolare del corso: Daniele Del Santo

Programma di massima del corso

Spazi metrici e normati

Nozione di distanza e di spazio metrico. Topologia indotta da una distanza: palle aperte e chiuse, intorno, insiemi aperti e loro proprietà, punti di accumulazione. Insieme derivato, insiemi chiusi e chiusura di un insieme. Teorema di caratterizzazione della chiusura tramite il derivato. Metriche topologicamente equivalenti, metriche strettamente equivalenti. Esempi notevoli: \mathbb{R} con la distanza euclidea, \mathbb{R}^n con la distanza euclidea, distanza-1 e distanza-infinito, altre distanze particolari, distanza P e distanza M su \mathbb{R}^2 . Successioni in uno spazio metrico, successioni convergenti e successioni di Cauchy. Successioni e topologia di uno spazio metrico, caratterizzazione dei chiusi e della chiusura tramite le successioni. Funzioni continue tra spazi metrici. Continuità in un punto e continuità globale. Generalità sugli spazi normati. Continuità delle operazioni di somma e prodotto per uno scalare in uno spazio normato. Distanza generata da una norma. Spazi di Banach. Lo spazio di Banach delle funzioni limitate e continue e limitate su uno spazio metrico con la norma del sup. Disuguaglianza di Young, disuguaglianza di Hölder. Disuguaglianza di Minkowski, norme p su \mathbb{R}^n . Applicazioni lineari tra spazi normati. Per una funzione lineare tra spazi normati la continuità equivale alla limitatezza. Una funzione lineare da \mathbb{R}^n a uno spazio normato di dimensione finita è sempre continua. Norme equivalenti. Su \mathbb{R}^n e sugli spazi normati di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti.

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

Nozione di derivata direzionale per una funzione definita su un aperto di \mathbb{R}^n a valori in \mathbb{R} . Definizione di funzione differenziabile. Differenziabilità implica continuità. Differenziabilità implica derivabilità rispetto a tutte le direzioni. Unicità del differenziale. Significato geometrico di differenziabilità e di gradiente. Teorema del differenziale totale. Funzioni differenziabili da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . Matrice jacobiana. Differenziale della funzione composta. Esempi significativi. Lemma sulla derivabilità degli integrali dipendenti da un parametro. Derivate parziali successive. Il teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione. Formula di Taylor di una funzione di più variabili. Punti critici e massimi o minimi locali liberi per funzioni di più variabili. Punti di sella. Forme quadratiche definite positive, negative e indefinite. Condizione di positività e autovalori, teorema di Sylvester. Funzioni definite in forma implicita: generalità. Teorema del Dini. Esempi. Teorema di Dini nel caso di una funzione da \mathbb{R}^n a valori in \mathbb{R} . Ortogonalità tra gradiente e curve di livello di una funzione. Teorema di Dini per una funzione da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^2 e generalizzazione per una funzione da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^k (senza dim.). Teorema di invertibilità locale. Minimi e massimi vincolati. Interpretazione geometrica e condizione di parallelismo tra il gradiente della funzione e il vettore normale al vincolo. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di vincolo dato da una sola funzione.

Equazioni differenziali

Equazioni differenziali. Esempio dell'equazione della crescita malthusiana e dell'equazione logistica. Definizioni di equazione e soluzione. Sistemi di equazioni differenziali. Esempio del sistema di Lotka-Volterra. Sistemi di equazioni e loro rapporto con le equazioni di ordine superiore. Problema di Cauchy. Teorema di Cauchy-Lipschitz-Picard. Equazioni a variabili separabili. Prolungamento di soluzioni. Prolungabilità di soluzioni. Soluzioni massimali. Condizioni di prolungabilità: esistenza del limite di una soluzione. Esistenza del limite di una successione di valori di una soluzione calcolata su una successione di punti crescenti. Teorema di uscita da un compatto del dominio per il grafico di una soluzione. Lemma di Gronwall. Teorema di esistenza globale sulla striscia in condizioni di sottilinearità. Studi qualitativi delle soluzioni del problema di Cauchy. Equazioni lineari di ordine superiore. Struttura dell'insieme delle soluzioni. Metodo della matrice wronskiana per la determinazione della soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Equazioni a coefficienti costanti.

Successioni e serie di funzioni

Convergenza puntuale e uniforme per successioni di funzioni. Passaggio al limite sotto il segno di integrale e di derivata. Il teorema dei due limiti. Serie di funzioni. Serie puntualmente, uniformemente, totalmente convergenti. M-test di Weierstrass. Serie di potenze. Il lemma di Abel. Il teorema di Cauchy-Hadamard. Esempi di calcolo di raggi di convergenza. Serie derivata. Proprietà della funzione somma di una serie di potenze. Serie di Taylor di una funzione e serie di Taylor della funzione somma di una serie di potenze. Condizioni di sviluppabilità in serie di Taylor (senza dim.).

Testo di riferimento: Enrico Giusti, *Analisi Matematica 2*, Boringhieri.